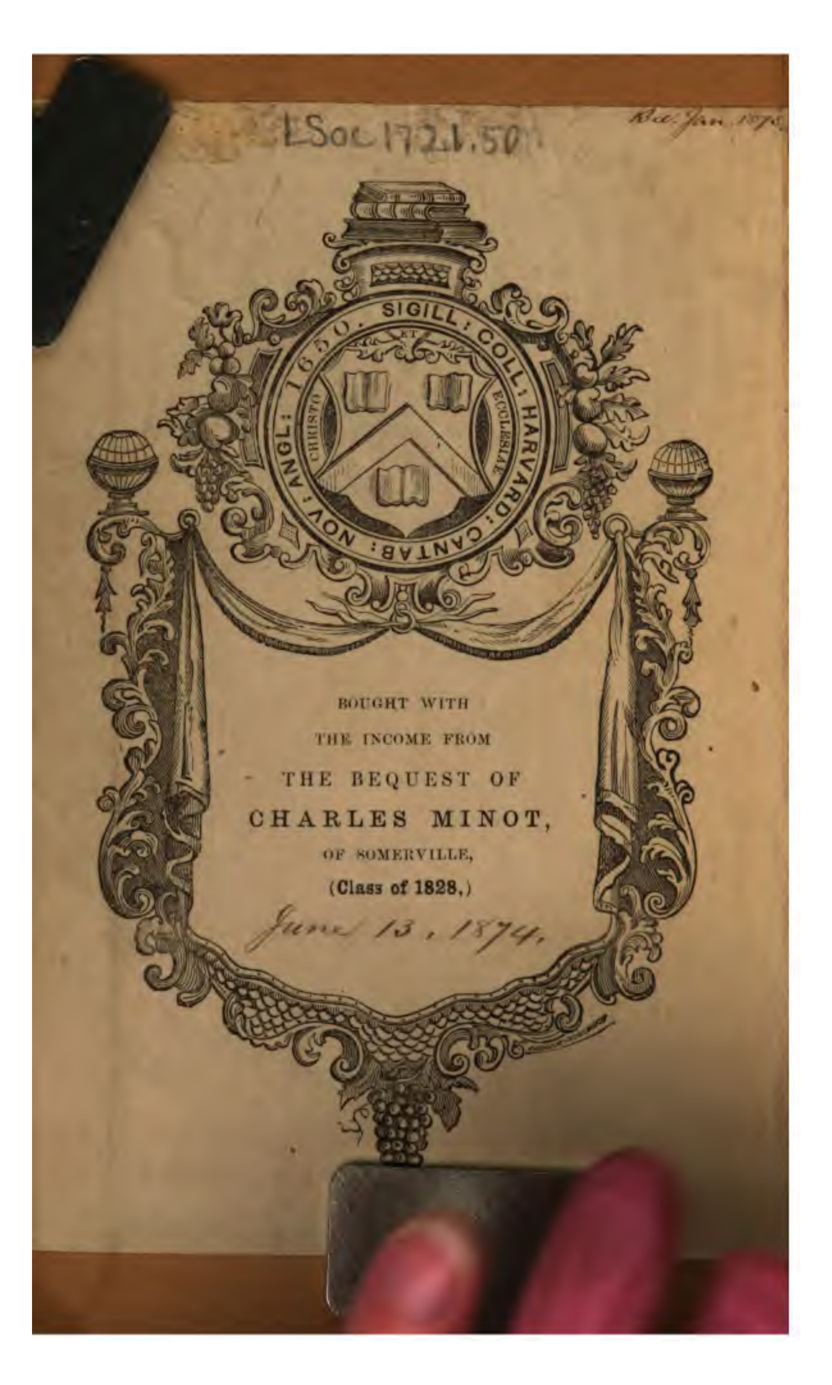
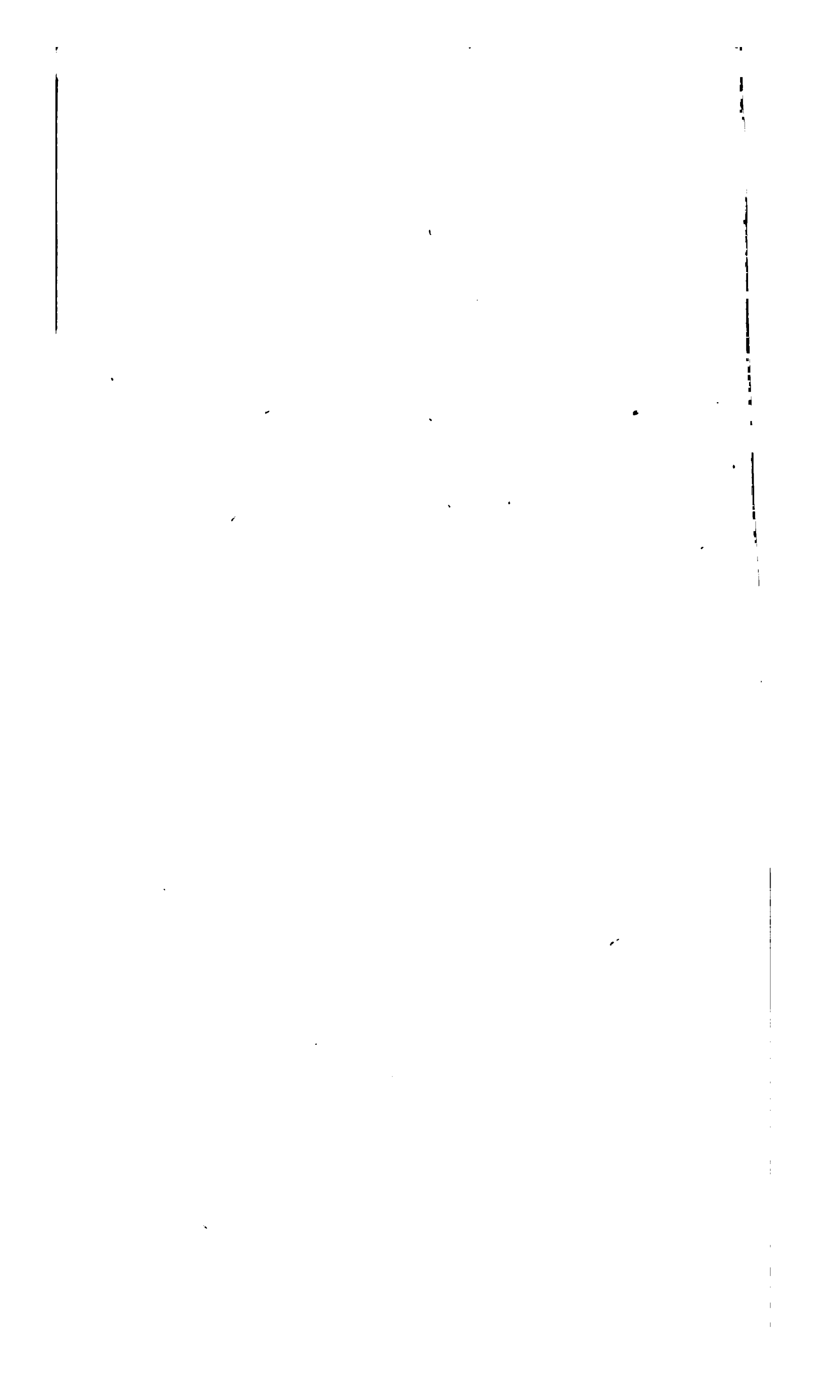
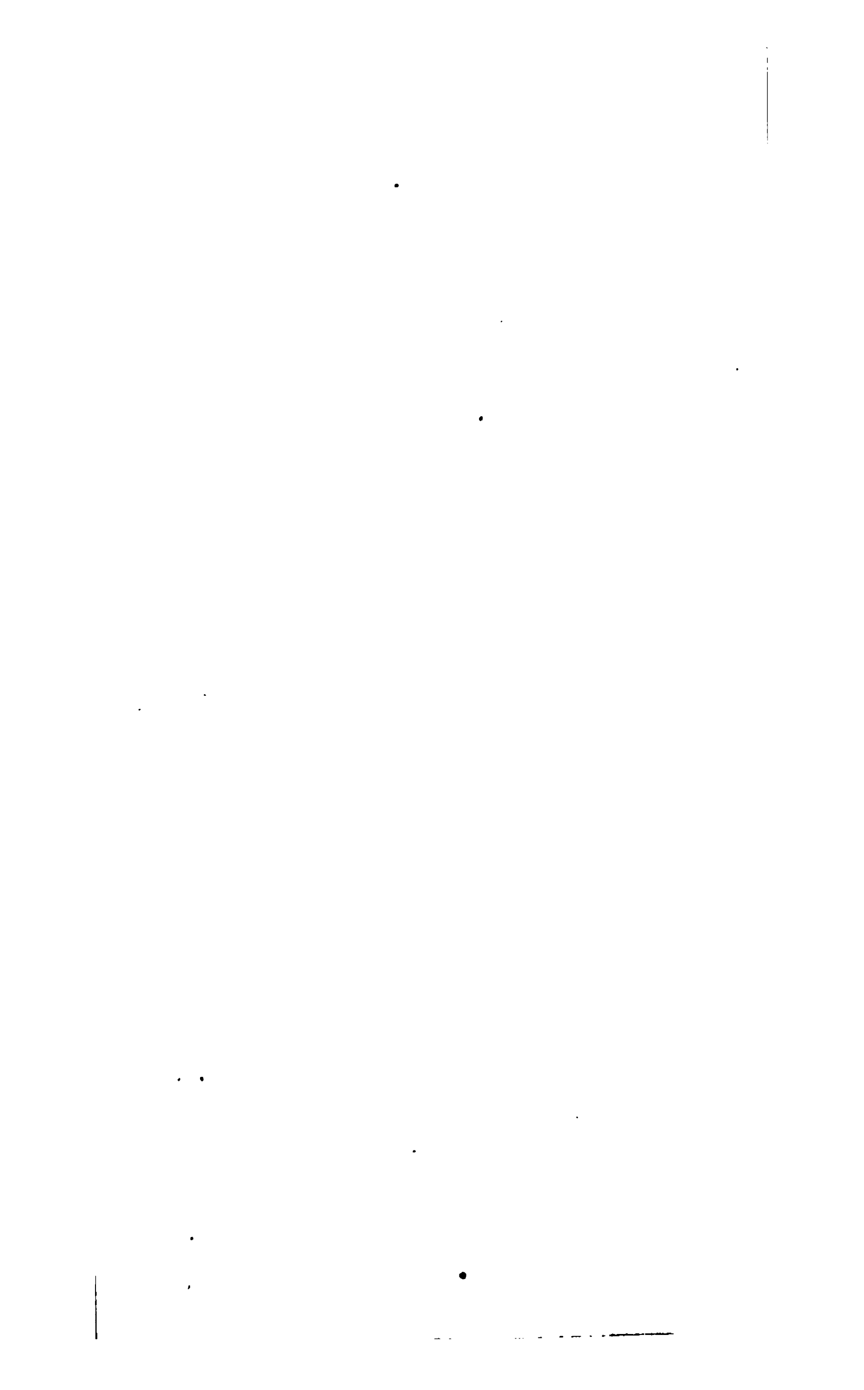


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE









Nachrichten

von der

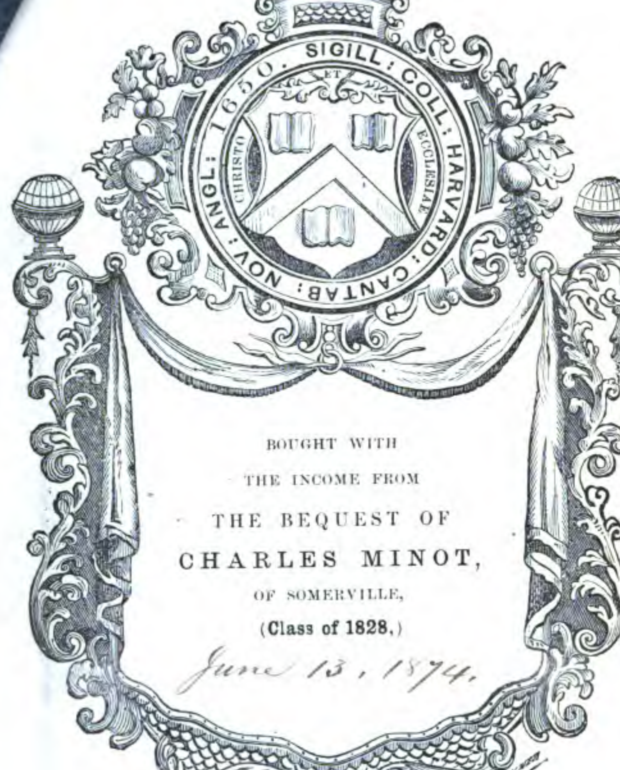
K. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

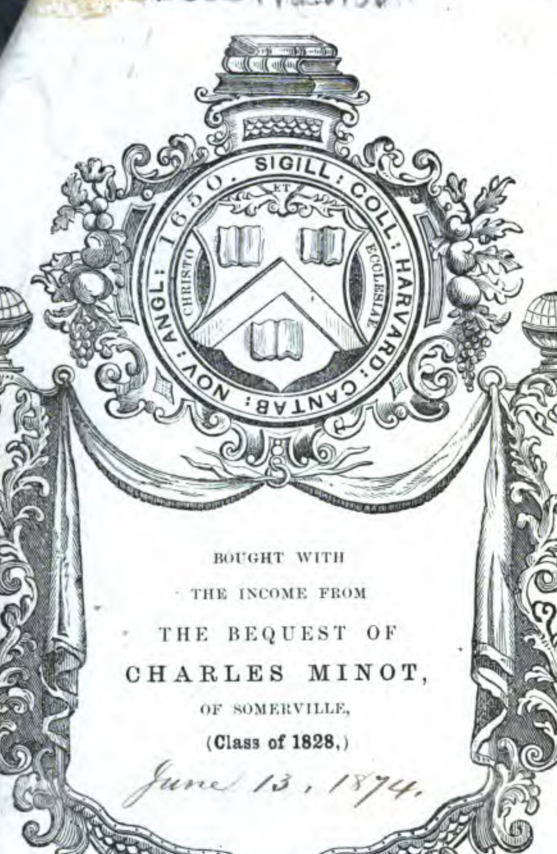
Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1871.

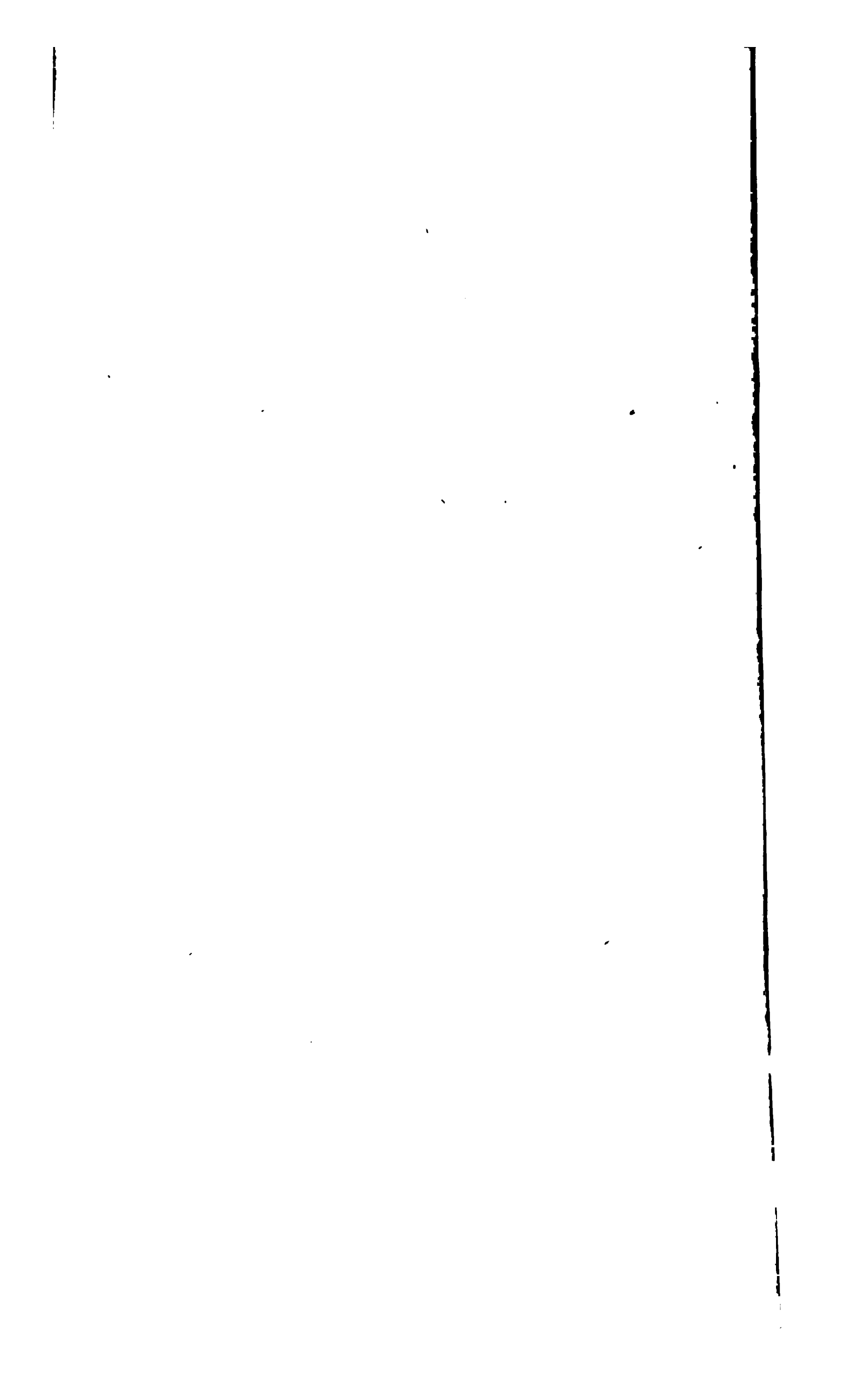
Göttingen.
Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.
1871.

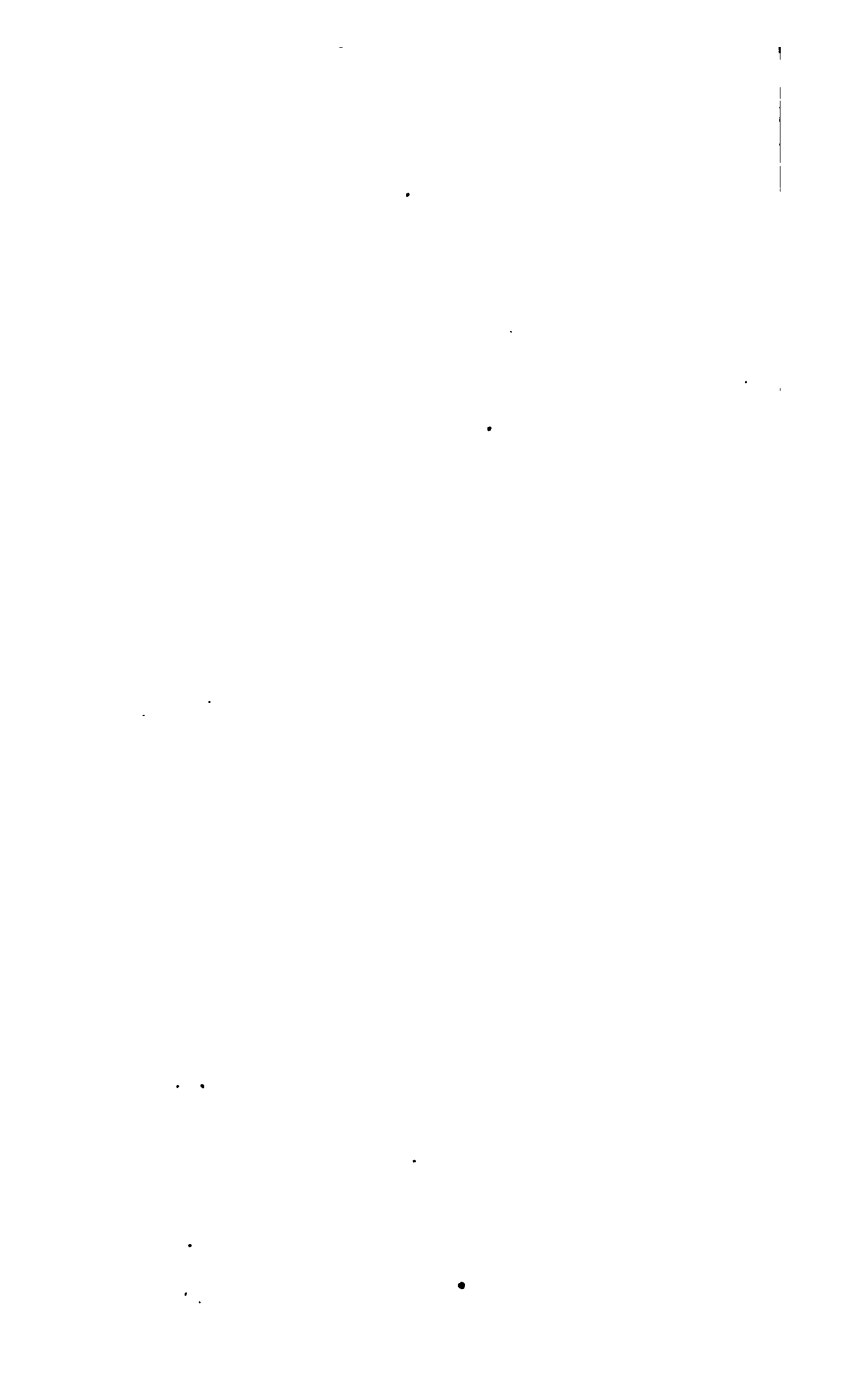

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE

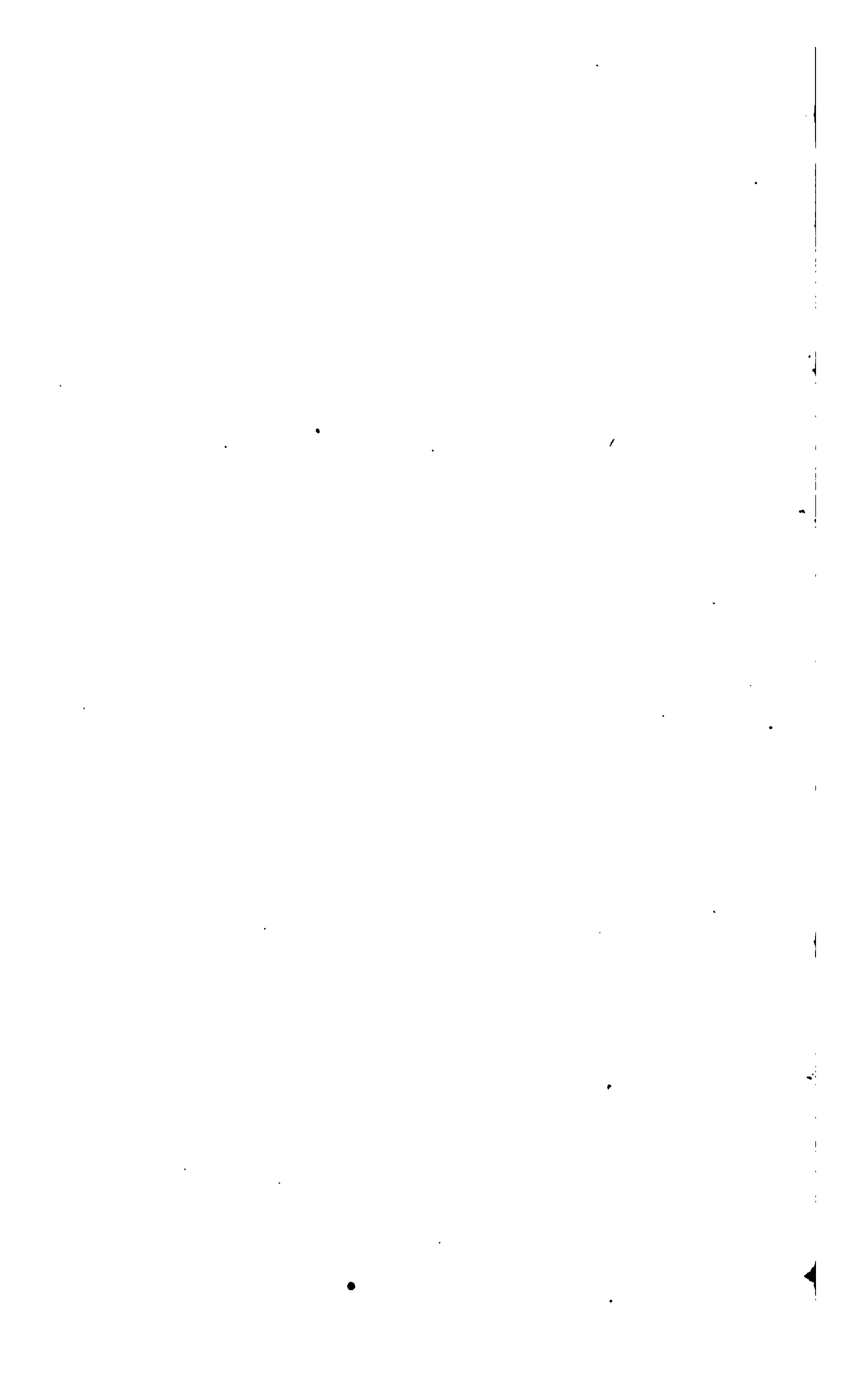



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE









Nachrichten

von der

K. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1871.

Göttingen.
Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.
1871.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

18. Januar. № 1. 1871.

(Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der K. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen).

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Januar.

Enneper, weitere Bemerkungen über asymptotische Linien.

Marmé, über Wirkung und Vorkommen des Cytisin. (Vorgelegt von Wöhler).

Klein, zur Theorie der Kummer'schen Fläche und der zugehörigen Linien-Complexe 2ten Grades, vorgelegt von Clebsch.

Kohlrausch, das Weber'sche compensirte Magnetometer zur Bestimmung der erdmagnetischen Intensität.

Weitere Bemerkungen über asymptotische Linien.

Von

A. Enneper.

In den Nachrichten v. d. K. G. d. W. vom Jahre 1870 findet sich auf Seite 501 ein System von Gleichungen, durch welches die windschiefen Flächen bestimmt sind, für welche die asymptotischen Linien eines Systems die Eigenschaft haben, dass die Distanz zweier Curven, gemessen in der Richtung der Generatricen, constant ist. Die Reduction dieses Systems von Gleichungen auf die einfachste Form scheint äusserst complicirt zu sein, so dass es nicht ohne Interesse ist, eine andere Behandlung zu geben, welche die Integration verwickelter Differentialgleichungen nicht erfordert. Man bezeichne wieder durch:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;$$

$$\lambda,\ \mu,\ \nu;$$

$$l,\ m,\ n;$$

die Winkel, welche die Tangente, der Krümmungsradius und die Normale zur Krümmungsebene im Puncte $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ einer Raumcurve mit den Coordinatenaxen bilden, sei ferner ϱ der Krümmungshalbmesser, r der Torsionsradius im bemerkten Puncte und ds das Bogenelement. Die Winkel:

$$X,\ Y,\ Z;$$

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1;$$

$$X_2,\ Y_2,\ Z_2;$$

gehören zu drei gegenseitig orthogonalen Richtungen im Raume, wenn man setzt:

$$\cos X = \cos\alpha\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\cos\varphi + \cos l\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\cos X_1 = \cos\alpha\sin\theta - \cos\lambda\cos\theta\cos\varphi - \cos l\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\cos X_2 = \qquad \cos\lambda\sin\varphi - \qquad \cos l\cos\varphi.$$

Durch Vertauschung von α, λ, l mit β, μ, m und γ, ν, n ergeben sich die entsprechenden Werthe von $\cos Y$, $\cos Y_1$, $\cos Y_2$ und $\cos Z$, $\cos Z_1$, $\cos Z_2$. Nach den obigen Gleichungen ist:

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\alpha = \cos X\cos\theta + \cos X_1\sin\theta.$$

Setzt man:

$$1)\begin{cases} q = \dfrac{d\theta}{ds} + \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}. \\[2ex] p = \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\cos\theta + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{d\varphi}{ds}\right)\sin\theta, \\[2ex] p_1 = \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\sin\theta + \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{d\varphi}{ds}\right)\cos\theta, \end{cases}$$

so ist:

$$\frac{d\cos X}{ds} = -q\cos X_1 + p\cos X_2,$$

$$\frac{d \cos X_1}{ds} = \quad q \cos X + p_1 \cos X_2,$$

$$\frac{d \cos X_2}{ds} = -p \cos X - p_1 \cos X_1.$$

Analoge Gleichungen finden für $\cos Y$, $\cos Z$ etc. statt. Für den Punct (x, y, z) einer windschiefen Fläche hat man die Gleichungen:

$$x = \xi + v \cos X,$$
$$y = \eta + v \cos Y,$$
$$z = \zeta + v \cos Z.$$

Bekanntlich wird ein System asymptotischer Linien von den Generatricen gebildet, sollen die Curven des andern Systems aequidistant sein, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2}, & \frac{d^2y}{ds^2}, & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds}, & \frac{dy}{ds}, & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} \cos X, & \cos Y, & \cos Z \\ \cos X_1, & \cos Y_1, & \cos Z_1 \\ \cos X_2, & \cos Y_2, & \cos Z_2 \end{vmatrix}$$

so ist das Product gleich:

$$-[p_1(p^2+q^2)+p\frac{dq}{ds}-q\frac{dp}{ds}]v^2$$

$$+[p\frac{d\sin\theta}{ds}-\sin\theta\frac{dp}{ds}+2p_1 q\cos\theta]v$$

$$-(p\cos\theta+p_1\sin\theta)\sin\theta.$$

Soll dieser Ausdruck verschwinden, so muss dieses mit den Factoren von v^2, v und dem von v unabhängigen Term der Fall sein. Schliesst man die Annahme $\sin\theta = 0$ aus, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} p_1(p^2+q^2)+p\frac{dq}{ds}-q\frac{dp}{ds}=0, \\ \frac{d}{ds}\frac{\sin\theta}{p}+2p_1\frac{q\sin\theta}{p^2}=0, \\ p\cos\theta+p_1\sin\theta=0. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen 1) geht die letzte der vorstehenden Gleichungen über in:

$$3)\quad \frac{\sin\varphi}{\varrho}=0.$$

Setzt man in 2) $q = p\,\mathrm{tang}\,w$, so folgt:

$$p_1+\frac{dw}{ds}=0,\quad \frac{d\log\frac{\sin\theta}{p}}{ds}+2p_1\,\mathrm{tang}\,w=0.$$

Eliminirt man p_1 zwischen diesen Gleichungen und integrirt, so ist:

$$\frac{\sin\theta}{p}\cos^2 w = a,$$

wo a eine Constante bedeutet. Nimmt man nach 3) zuerst $\varphi = 0$, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$4)\begin{cases} p = \frac{\sin\theta}{r}, \quad p_1 = -\frac{\cos\theta}{r}, \quad q = p \operatorname{tang} w, \\ r\cos^2 w = \frac{\sin\theta}{p}\cos^2 w = a, \quad \frac{dw}{ds} = \frac{\cos\theta}{r}, \\ \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin\theta}{r}\operatorname{tang} w. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen findet man:

$$5) \quad \frac{r\cos w}{\sin\theta}\,\frac{d\cos X}{ds} = -\sin w\cos X_1 + \cos w\cos X_2$$

$$6) \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{r\cos w}{\sin\theta}\,\frac{d\cos X}{ds}\right) + \frac{\sin\theta}{r\cos w}\cos X = 0.$$

Die Gleichung 6), welche auch für $\cos Y$ und $\cos Z$ besteht zeigt, dass man eine Relation von der Form:

$$\cos X_0 \cos X + \cos Y_0 \cos Y + \cos Z_0 \cos Z = 0$$

hat, wo X_0, Y_0, Z_0 Constanten sind. Die Generatrix ist also einer festen Ebene parallel.

Nimmt man dieselbe zur xy-Ebene, so ist $\cos Z = 0$. Aus 6) folgt:

$$\left(\frac{r\cos w}{\sin\theta}\,\frac{d\cos X}{ds}\right)^2 + \cos^2 X = k^2;$$

wo k eine Constante bedeutet. Für:

7) $\cos X = k\cos u$, $\cos Y = \sqrt{1 - k^2\cos^2 u}$

folglt:

$$8)\qquad \frac{r\cos w}{\sin\theta}\,\frac{du}{ds} = 1.$$

Die Gleicbung 5) wird nach 7) und 8):

$$-\sin w\cos X_1 + \cos w\cos X_2 = -k\sin u.$$

Analog ergeben sich wenn Y_1, Y_2 und Z_1, Z_2 statt X_1, X_2 gesetzt werden folgende Gleichungen:

$$-\sin w\cos X_1 + \cos w\cos X_2 = -k\sin u$$

$$-\sin w\cos Y_1 + \cos w\cos Y_2 = \frac{k^2\sin u\cos u}{\sqrt{1 - k^2\cos^2 u}}$$

$$-\sin w\cos Z_1 + \cos w\cos Z_2 = 0.$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$1 = \frac{k^2\sin^2 u}{1 - k^2\cos^2 u}$$

also $k^2 = 1$. Nimmt man $k = 1$, so ist:

9) $\cos X = \cos u, \quad \cos Y = \sin u, \quad \cos Z = 0.$

$$-\sin w \cos X_1 + \cos w \cos X_2 = -\sin u$$

$$-\sin w \cos Y_1 + \cos w \cos Y_2 = \cos u$$

$$-\sin w \cos Z_1 + \cos w \cos Z_2 = 0.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\cos w \cos X_1 + \sin w \cos X_2 = 0,$$

$$\cos w \cos Y_1 + \sin w \cos Y_2 = 0,$$

$$\cos w \cos Z_1 + \sin w \cos Z_2 = 1,$$

oder:

$$\cos X_1 = \sin u \sin w, \cos Y_1 = -\cos u \sin w, \cos Z_1 = \cos w,$$

$$\cos X_2 = -\sin u \cos w, \cos Y_2 = \cos u \cos w, \cos Z_2 = \sin w.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und der Gleichungen 9) erhält man:

$$10) \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{d\xi}{ds} = \cos\theta \cos X + \sin\theta \cos X_1 = \\ \qquad \cos u \cos\theta + \sin u \sin w \sin\theta \\ \cos\beta = \dfrac{d\eta}{ds} = \cos\theta \cos Y + \sin\theta \cos Y_1 = \\ \qquad \sin u \cos\theta - \cos u \sin w \sin\theta, \\ \cos\gamma = \dfrac{d\zeta}{ds} = \cos\theta \cos Z + \sin\theta \cos Z_1 = \\ \qquad \sin\theta \cos w. \end{cases}$$

Nimmt man u als unabhängige Variabele, so folgt aus der letzten Gleichung 10) nach 8):

$$\frac{d\zeta}{du} = r\cos^2 w$$

und da nach 4) die rechte Seite constant gleich a ist, so folgt:

$$\frac{d\zeta}{du} = a$$

also, mit Weglassung einer unnöthigen Constanten:

$$\zeta = au. \tag{11}$$

Die beiden ersten Gleichungen 10) geben:

$$\sin u \frac{d\xi}{ds} - \cos u \frac{d\eta}{ds} = \sin w \sin \theta,$$

$$\cos u \frac{d\xi}{ds} + \sin u \frac{d\eta}{ds} = \cos \theta,$$

oder nach 8) u als unabhängige Variabele eingeführt:

$$\sin u \frac{d\xi}{du} - \cos u \frac{d\eta}{du} = r \sin w \cos w = a \operatorname{tang} w,$$

$$\cos u \frac{d\xi}{du} + \sin u \frac{d\eta}{du} = \cos \theta \frac{ds}{du}.$$

Differentiirt man die erste Gleichung nach u, zieht darauf die zweite Gleichung ab, so folgt:

$$\sin u \frac{d^2\xi}{du^2} - \cos u \frac{d^2\eta}{du^2} = (\frac{a}{\cos^2 w} \frac{dw}{ds} - \cos\theta) \frac{ds}{du}.$$

Nach 4) verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, es ist also:

$$\sin u \frac{d^2\xi}{du^2} - \cos u \frac{d^2\eta}{du^2} = 0.$$

Ist U eine beliebige Function von u, setzt man:

$$\frac{dU}{du} = U', \quad \frac{d^2U}{du^2} = U'', \ldots .$$

so genügt man der obigen Gleichung durch:

$$\xi = (U'' - U) \cos u + 2U' \sin u$$

$$\eta = (U'' - U) \sin u - 2U' \cos u.$$

Setzt man:

$$\Delta = \sqrt{[a^2 + (U''' + U')^2 + (U'' + U)^2]},$$

so geben die Gleichungen 11) und 12):

$$\frac{ds}{du} = \Delta,$$

$$\Delta . \cos\alpha = (U''' + U') \cos u + (U'' + U) \sin u,$$

$$\Delta . \cos\beta = (U''' + U') \sin u - (U'' + U) \cos u,$$

$$\Delta . \cos\gamma = a.$$

Setzt man weiter zur Abkürzung:

$$\Delta_1 = \sqrt{[a^2 + (U'' + U)^2]},$$

so finden die Gleichungen statt:

$$\Delta\Delta_1 \cos\lambda = [a^2 + (U'' + U)^2] \cos u$$

$$- (U''' + U')(U'' + U) \sin u,$$

$$\Delta\Delta_1 \cos\mu = [a^2 + (U'' + U)^2] \sin u$$

$$+ (U'' + U')(U'' + U) \cos u,$$

$$\Delta\Delta_1 \cos\nu = - a(U''' + U')$$

$$\Delta_1 \cos l = a \sin u, \quad \Delta_1 \cos m = - a \cos u$$

$$\Delta_1 \cos n = -(U + U'').$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{U^{IV} + 2U'' + U}{\Delta^3} \sqrt{[a^2 + (U + U'')^2]}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{a^2 + (U + U'')^2}.$$

Die doppelten Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ geben:

$$\Delta \cos\theta = U''' + U'$$

$$\Delta \sin\theta \sin w = U'' + U, \quad \Delta \sin\theta \cos w = a.$$

Die Gleichung 3) giebt noch die Annahme $\varrho = \infty$. Die Generatricen der Fläche gehn dann durch eine feste Gerade. Für eine Gerade kann man die Richtungen, bestimmt durch die Winkel

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu;$$
$$l,\ m,\ n;$$

mit den Coordinatenaxen zusammenfallen lassen. Man hat dann:

$$\cos X = \sin\theta\cos\varphi,\ \cos Y = \sin\theta\sin\varphi,\ \cos Z = \cos\theta.$$

Im vorliegenden Falle ist die feste Gerade zur Axe der z genommen, so dass also $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta = s$. Die Werthe von x, y, z sind dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = v\sin\theta\cos\varphi,\quad y = v\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = s + v\cos\theta.$$

Für $\varrho = \infty$ ist auch $r = \infty$, die Gleichungen 1) geben dann:

$$p = -\frac{d\varphi}{ds}\sin\theta,\quad p_1 = \frac{d\varphi}{ds}\cos\theta,\quad q = \frac{d\theta}{ds}$$

Die Gleichungen 2) lassen sich hierdurch auf folgende Art darstellen, wo $\frac{d\varphi}{ds} = \varphi'$, $\frac{d\theta}{ds} = \theta'$ gesetzt ist:

$$\varphi'.\cos\theta = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\theta'}{\varphi'\sin\theta}\right)}{1+\left(\frac{\theta'}{\varphi'\sin\theta}\right)^2}$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\theta' = 0.$$

Sind a und b zwei Constanten, von denen keine verschwinden kann, so erhält man durch Integration:

$$1 + \left(\frac{\theta'}{\varphi' \sin\theta}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta$$

$$\varphi' \sin^2\theta = a.$$

oder:

$$\varphi' \sin^2\theta = a, \quad (\theta' \sin\theta)^2 = b^2 \sin^2\theta - a^2.$$

Setzt man:

$$14) \qquad b\cos\theta = \cos u \sqrt{b^2 - a^2},$$

so ist:

$$15) \qquad \frac{du}{ds} = b.$$

Nimmt man u als unabhängige Variabele, so erhält man:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{a}{\sin^2\theta}\frac{ds}{du} = \frac{ab}{a^2\cos^2 u + b^2 \sin^2 u}.$$

Lässt man eine Constante weg, welche sich nur auf eine Drehung des Coordinatensystems um die Axe der z bezieht, so ist:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}\operatorname{tang} u.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 13), 14), 15) giebt:

$$x = v\frac{a}{b}\cos u, \quad y = v\sin u,$$

$$z = \frac{u}{b} + v\cos u\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b},$$

oder:

$$bz - x\frac{b}{a}\sqrt{b^2 - a^2} = \operatorname{arctang}\frac{ay}{bx}.$$

Durch ein Missverständniss ist auf Seite 507 ein allgemeiner Satz auf zwei Flächen beschränkt, welche eigentlich von der allgemeinen Regel eine Ausnahme bilden. Verschwindet in jedem Puncte einer Fläche die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, so sind die Flächen, welche diese Eigenschaft haben, paarweise so mit einander verbunden, dass dieselben sich auf einander abwickeln lassen und den asymptotischen Linien der einen Fläche Krümmungslinien der andern Fläche entsprechen. Ist nun eine der Flächen eine Rotationsfläche, so lässt sich dieselbe auf einer andern Rotationsfläche, so abwickeln, dass die Krümmungslinien ihren Charakter bewahren. Man erhält so eine Fläche für welche nicht die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwindet und deren Krümmungslinien den asymptotischen Linien einer sogenannten Minimumsfläche entsprechen. Die Minimumsfläche ist in diesem Falle die Schraubenfläche. Nimmt man für dieselbe:

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u, \quad z = au,$$

so hat man für die Rotationsfläche die Gleichungen:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{b} \cos bu, \quad y = \frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{b} \sin bu$$

$$z = \int \sqrt{\left[1 - \frac{1}{b^2} \frac{v^2}{a^2 + v^2}\right]} dv.$$

In den lezten Gleichungen ist b eine von Null verschiedene Constante.

Was den allgemeinen Fall betrifft, so setzt man $i = \sqrt{-1}$

$$16) \qquad u + vi = p, \quad u - vi = q.$$

Ist P eine beliebige Function von p, Q eine Function von q,

$$P' = \frac{dP}{dp}, \quad Q' = \frac{dQ}{dq},$$

setzt man:

$$17) \begin{cases} 4x = \int \frac{P^2 - 1}{P'} dp + \int \frac{Q^2 - 1}{Q'} dq, \\ 4y = i \int \frac{P^2 + 1}{P'} dp - i \int \frac{Q^2 + 1}{Q'} dq, \\ 2z = \int \frac{P}{P'} dp + \int \frac{Q}{Q'} dq, \end{cases}$$

so ist (x, y, z) ein Punct einer Minimimumsfläche, für den Fall, dass u und v die Argumente

der Krümmungslinien sind. Die obigen Gleichungen geben für x, y, z immer reelle Werthe wenn man setzt:

$$P = \varphi(p) + i\,\psi(p), \quad Q = \varphi(q) - i\,\psi(q),$$

wo φ, ψ beliebige Functionen ihrer Argumente sind. Für:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = E,$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = G,$$

folgt:

$$18) \qquad E = G = \frac{(1 + PQ)^2}{4P'Q'}.$$

Seien nun x, y, z die Coordinaten eines Punctes einer Minimumsfläche, für welche E und G dieselben Werthe haben wie in 18), aber nun u und v die Argumente der asymptotischen Linien sind. Für die Coordinate x hat man die Gleichungen:

$$2\frac{d^2x}{d^2u} = \frac{1}{E}\frac{dE}{du}\frac{dx}{du} - \frac{1}{G}\frac{dE}{dv}\frac{dx}{dv},$$

$$2\frac{d^2x}{d^2v} = -\frac{1}{E}\frac{dG}{du}\frac{dx}{du} + \frac{1}{G}\frac{dG}{dv}\frac{dx}{dv},$$

Wegen $E = G$ folgt:

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{du^2}-\frac{d^2x}{dv^2}=\frac{1}{E}\frac{dE}{du}\frac{dx}{du}-\frac{1}{E}\frac{dE}{dv}\frac{dx}{dv}.$$

Mittelst der Gleichungen 16) und 18) gehn die vorstehenden Gleichungen über in:

$$\frac{d^2x}{dp\,dq}=0$$

$$\frac{1}{P'}\frac{d}{dp}(P'\frac{dx}{dp})+\frac{1}{Q'}\frac{d}{dq}(Q'\frac{dx}{dq})=$$

$$2\frac{QP'\frac{dx}{dp}+PQ'\frac{dx}{dq}}{1+PQ}$$

Setzt man in der zweiten der vorstehenden Gleichungen:

19) $$P'\frac{dx}{dp}=P_1,\quad Q'\frac{dx}{dq}=Q_1,$$

so sind wegen der ersten Gleichung P_1 und Q_1 respective nur von p und q abhängig. Nimmt man für einen Augenblick P und Q_1 zu unabhängigen Variabeln so folgt:

20) $$\frac{dP_1}{dP}+\frac{dQ_1}{dQ}=2\frac{QP_1+PQ_1}{1+PQ}.$$

Durch Differentiation nach P und Q folgt:

$$\frac{d^2P_1}{dP^2}=\frac{2Q}{1+PQ}\frac{dP_1}{dP}+2\frac{Q_1-P_1Q^2}{(1+PQ)^2},$$

$$\frac{d^2Q_1}{dQ^2} = \frac{2P}{1+PQ}\frac{dQ_1}{dQ} + 2\frac{P_1 - Q_1P^2}{(1+PQ)^2}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit P die zweite mit Q, bildet die Summe der Producte, so folgt:

$$P\frac{d^2P_1}{dP^2} + Q\frac{d^2Q_1}{dQ^2} = \frac{2PQ}{1+PQ}\left(\frac{dP_1}{dP} + \frac{dQ_1}{dQ}\right)$$

$$+ 2\left(\frac{1-PQ)(QP_1 + PQ_1}{(1+PQ)^2}\right)$$

Setzt man rechts aus 20) für $QP_1 + PQ_1$ seinen Werth ein, so folgt:

$$P\frac{dP_1}{dP} + Q\frac{d^2Q_1}{dQ} = \frac{dP_1}{dP} + \frac{dQ_1}{dQ}$$

oder:

$$P^2\frac{d}{dP}\left(\frac{1}{P}\frac{dP_1}{dP}\right) + Q^2\frac{d}{dQ}\left(\frac{1}{Q}\frac{dQ_1}{dQ}\right) = 0$$

d. h.

$$P^2\frac{d}{dP}\left(\frac{1}{P}\frac{dP_1}{dP}\right) = f, \quad Q^2\frac{d}{dQ}\left(\frac{1}{Q}\frac{dQ_1}{dQ}\right) = -f,$$

wo f eine Constante bedeutet. Aus diesen Gleichungen findet man:

$$P_1 = f_1P^2 - fP + f_2,$$

$$Q_1 = f'_1Q^2 + fQ + f'_2.$$

Wegen 20) findet man: $f'_1 = f_2$, $f'_2 = f_1$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 19) findet man nun:

$$21)\quad \begin{aligned} P' \frac{dx}{dp} &= f_1 P^2 - f P + f_2, \\ Q' \frac{dx}{dq} &= f_2 Q^2 + f Q + f_1. \end{aligned}$$

Ebenso folgt:

$$22)\quad \begin{aligned} P' \frac{dy}{dp} &= g_1 P^2 - g P + g_2, \\ Q' \frac{dy}{dq} &= g_2 Q^2 + g Q + g_1, \\ P' \frac{dz}{dp} &= h_1 P^2 - h P + h_2, \\ Q' \frac{dz}{dq} &= h_2 Q^2 + h Q + h_1. \end{aligned}$$

Zwischen den Constanten f, g, h .... ergeben sich leicht die nöthigen Relationen mittelst der Gleichungen 18) und:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = 0,$$

oder mittelst der Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dp} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = \frac{(1+PQ)^2}{8P'Q'}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 21) und 22) geben:

$$23)\begin{cases} f_1^2 + g_1^2 + h_1^2 = 0, \quad f_2^2 + g_2^2 + h_2^2 = 0, \\ ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0, \quad ff_2 + gg_2 + hh_2 = 0, \\ f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = \frac{1}{8} \\ f^2 + g^2 + h^2 = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Eine genauere Untersuchung ergiebt, dass f_1, g_1, h_1; f_2, g_2, h_2 complexe, zu einander conjugirte Grössen sind. Ist k eine Constante, so hat man:

$$kf_1 = \frac{f' + if''}{4}, \quad \frac{f_2}{k} = \frac{f' - if''}{4},$$

$$kg_1 = \frac{g' + ig''}{4}, \quad \frac{g_2}{k} = \frac{g' - ig''}{4},$$

$$kh_1 = \frac{h' + ih''}{4}, \quad \frac{h_2}{k} = \frac{h' - ih''}{4},$$

wo:

$$f'^2 + g'^2 + h'^2 = 1, \quad f''^2 + g''^2 + h''^2 = 1,$$

$$f'f'' + g'g'' + h'h'' = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass man f', g', h' und und f'', g'', h'' als die Cosinus der Winkel ansehn kann, welche zwei feste Richtungen, die zu einander orthogonal sind, mit den Coordinatenaxen bilden. Nimmt man dieselben respective zu Axen der x und y, so ist:

$$f' = 1, \quad g' = 0, \quad h' = 0,$$
$$f'' = 0, \quad g'' = 1, \quad h'' = 0,$$

folglich:

$$24)\quad \begin{cases} f_1 = \frac{1}{4k}, & f_2 = \frac{k}{4}, \\ g_1 = \frac{i}{4k}, & g_2 = -\frac{ki}{4}, \\ h_1 = 0, & h_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 23) geben:

$f + ig = 0$, $f - ig = 0$, $f^2 + g^2 + h^2 = -\frac{1}{4}$.

Man kann also setzen:

$$25)\quad f = 0, \quad g = 0, \quad h = -\tfrac{1}{2}i.$$

Die Gleichungen 21) und 22) geben nach 24) und 25) für x, y nur reelle Werthe wenn $k = 1$. Unter dieser Annahme erhält man endlich:

$$4x = \int \frac{P^2+1}{P'} dp + \int \frac{Q^2+1}{Q'} dq,$$

$$4y = i\int \frac{P^2-1}{P'} dp + i\int \frac{Q^2-1}{Q'} dq,$$

$$2z = i\int \frac{P}{P'} dp - i\int \frac{Q}{Q'} dp.$$

Vertauscht man x mit $-y$ und y mit x, so folgt:

$$26)\quad \begin{cases} 4x = i\int \frac{P^2-1}{P'} dp - i\int \frac{Q^2-1}{Q'} dq, \\ 4y = -\int \frac{P^2+1}{P'} dp - \int \frac{Q^2+1}{Q'} dq, \\ 2z = i\int \frac{P}{P'} dp - i\int \frac{Q}{Q'} dq. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen 17) und 26) sind zwei Flächen bestimmt, von denen eine als Biegung der andern angesehn werden kann, den Krümmungslinien der einen Fläche entsprechen die asymptotischen Linien der andern Fläche und

umgekehrt. Die Gleichungen 17) und 26) ergeben noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft beider Flächen, dass nämlich die Normalen in zwei correspondirenden Puncten einander parallel sind. Sollen sich umgekehrt zwei Flächen auf einander abwickeln lassen und die Normalen in je zwei entsprechenden Puncten beider Flächen parallel sein, so ergiebt sich, dass für beide Flächen in jedem Puncte die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwinden muss. Die Bemerkung, dass zwei Minimumsflächen sich hinsichtlich ihrer Krümmungslinien und asymptotischen Linien derartig entsprechen, wie die Gleichungen 17) und 26) zeigen, ist zuerst ohne weiteren Beweis von Bonnet in den Comptes rendus t. 37 gemacht. Es lassen sich mittelst der Gleichungen 17) und 26) Systeme von algebraischen Flächen aufstellen, die auf einander abwickelbar sind. Setzt man z. B. in 17) $P = bp$, $Q = bq$, so folgt, wenn nach Ausführung der Integrationen $bp = \alpha$, $bq = \beta$ und $4b^2 = \frac{1}{a}$ gesetzt wird:

$$\frac{x}{a} = \tfrac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3) - (\beta + \alpha)$$

$$\frac{y}{ai} = \tfrac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) + \alpha - \beta$$

$$\frac{z}{a} = \alpha^2 + \beta^2$$

Für $\alpha\beta + 1 = t$ findet man:

$$\frac{1}{9}\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 - y^2}{2az} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3}t^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{3a^2} + \tfrac{4}{9} = \tfrac{1}{3}t^2 + \tfrac{1}{9}t^3$$

und hieraus durch Elimination von t:

$$\left(\frac{1}{9}\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 - y^2}{2az} + \frac{4}{8}\right)^3 =$$

$$3\left(\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{2z^2}{9a^2} - \frac{8}{9} + \frac{x^2 - y^2}{2az}\right)^2$$

Für dieselbe Substitution geben die Gleichungen 26):

$$\frac{x}{ai} = \frac{1}{8}(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha - \beta),$$

$$-\frac{y}{a} = \frac{1}{8}(\alpha^3 + \beta^3) + \alpha + \beta,$$

$$\frac{z}{ai} = \alpha^2 - \beta^2$$

folglich:

$$\frac{1}{9}\frac{z^2}{a^2} - \frac{xy}{az} + \frac{4}{8} = \frac{1}{8}t^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{4}{9} = \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{9}t^3.$$

Die Elimination von t giebt:

$$\left(\frac{1}{9}\frac{z^2}{a^2} - \frac{xy}{az} + \frac{4}{8}\right)^3 =$$

$$3\left(\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{2z^2}{9a^2} - \frac{8}{9} + \frac{xy}{az}\right)^2$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 17) bestimmt zwei algebraische Flächen von denen eine als Biegung der andern angesehn werden kann.

Ueber Wirkung und Vorkommen des Cytisin

von

Dr. Wilhelm Marmé,
Docent der Pharmacologie.

Das Cytisin, der giftig wirkende Bestandtheil der unter dem Namen »Goldregen« allgemein bekannten Zierpflanze, Cytisus Laburnum L., wurde als krystallisirende, einfache und Doppelsalze bildende in Wasser und Weingeist sehr leicht (nicht in Aether) lösliche, stark alkalische Pflanzenbase von uns in Gemeinschaft mit Dr. Aug. Husemann, jetzigem Professor der Chemie und Physik an der Cantonschule zu Chur aus den unreifen Schoten u. reifen Samen hier wachsender Sträucher zuerst dargestellt. Zur Vervollständigung der von uns beiden gemeinschaftlich (Zeitschrift für Chemie 8. Jahrgang S. 161) und später von A. Husemann (Neues Jahrbuch für Pharmacie XXXI S. 1—21) gemachten Mittheilungen erlaube ich mir der königlichen Societät Resultate meiner im hiesigen physiologischen Institute angestellten Experimente und ergänzenden chemischen Untersuchungen nachstehend in gedrängter Uebersicht vorzulegen*).

I. *Die Wirkung des Cytisin auf Thiere.*

1. Die toxische Wirkung des Cytisin — des reinen Alkaloids sowohl wie des am be-

*) Durch Dr. Aug. Husemann's Anstellung zu Chur und mit derselben verbundene Berufsgeschäfte und nothwendige literarische Arbeiten sahen wir uns genöthigt von der gemeinschaftlichen Fortsetzung der Untersuchung abzustehen. Wir einigten uns deshalb dahin, dass H. die Erledigung des rein chemischen Theils, ich dagegen die Lösung der physiologisch-toxicologischen Fragen übernehmen sollte.

sten krystallisirenden salpetersauren Salzes — erstreckt sich auf alle Thiertypen. Im Laufe der letzten Jahre war es allmählich möglich die Giftwirkung unseres Alkaloids experimentell zu prüfen und durch zum Theil sehr zahlreiche Wiederholungen festzustellen an nachbenannten Individuen.

I. Typus. Protozoa. Bodo, aus dem Darm des Froschs.

II. Typus. Coelenterata. Hydra viridis.

III. Typus. Echinodermata. Astropecten aurantiacus.

IV. Typus. Vermes. Ascaris mystax. Oxyuris ambigua. Hirudo medicinalis. Lumbricus terrestris. Lumbricus communis.

V. Typus. Arthropoda. a. Crustacea. Oniscus murarius. Porcellio scaber. Armadillium vulgare. Astacus fluviatilis. — b. Arachnoidea. Ixodes Ricinus. Dermanyssus avium. Dermanyssus coreaceus. Phalangium opilio. Epeira diadema. Legenaria domestica. Chelifer cancroides. — c. Myriapoda. Polydesmus complanatus. Lithobius forficatus. — d. Insecta. Aspidiolus Nerii. Aphis rosae. Hydrometra lacustris. Forficula auricularia. Locusta viridissima. Libellula virgo. Pulex irritans canis. Culex pipiens. Musca domestica. Vespa vulgaris. Vanessa urticae. Pieris brassicae (mit Raupe). Coccionella septempunctata. Meloë proscarabaeus. Lucanus cervus. Melolontha vulgaris. Gyrinus natator.

VI. Typus. Mollusca. Ostrea edulis. Anodonta anatina. Limax agrestis. Arion antiquorum. Helix pomatia.

VII. Typus. Vertebrata. a. Pisces. Cyprinus carpio. Anguilla fluviatilis. b. Amphibia. Triton cristatus. Salamandra maculosa. Rana esculenta. Rana temporaria. Hyla arborea. Bombinator igueus. Bufo communis. — c. Reptilia. Anguis fragilis. Lacerta viridis. Lacerta agilis. — d. Aves. Podiceps minor. Podiceps cristatus. Anas boschas dom. Gallus domesticus. Columba livida. Hirundo urbica. Corvus corax. Corvus monedula. Corvus pica. Garrulus glandarius. Fringilla domestica. Fringilla canaria. Strix flammea. Strix passerina. Buteo vulgaris. Astur palumbarius. Falco peregrinus. — e. Mammalia. Capra hircus. Lepus caniculus. Cavia cobaya. Mus musculus. Erinaceus europaeus. Talpa europaea. Canis familiaris. Felis domestica. Vespertilio murinus. Vesperugo noctula.

2. Die toxische Wirkung des Cytisin kommt — abgesehen von der äusseren Haut — von allen Applicationsstellen aus zu Stande. Von der Conjunctiva aus gelang es niemals lethale Intoxication herbeizuführen, es erfolgte von hier aus nur ein geringer Grad der Vergiftung, der bei Kaninchen leicht für Somnolenz gehalten werden kann. Dagegen erfolgt der tödliche Ausgang sehr leicht, wenn man das Gift auf die Schleimhaut der Luftwege, des Intestinaltractus oder des Urogenitalapparates bringt und nicht minder leicht nach endermatischer und subcutaner Application so wie endlich auch das Cytisin von serösen Häuten und am raschesten vom Blute aus seine giftige Wirkung entfaltet.

3. Die Dosis toxica und lethalis ist durchgehends für alle höheren Thiere (im Verhältniss zu ihrem Körpergewicht) sehr klein. Unter den Vögeln sowohl wie den Säugethieren erliegen die Fleischfresser geringeren Giftmengen als die Körner- und Pflanzenfresser und unter den letzteren gehen Ziegen erst nach den relativ grössten Dosen zu Grunde. Es genügen z. B. bei subcutaner Application für
Frösche v. 40—70 Grm Gew. 0,002—0,004 Grm
junge Tauben v. 300 Grm Gew. 0,003 Grm
Käutze v. 300 Grm Gew. 0,001 Grm
Dohlen v. 500 Grm Gew. 0,0015 Grm
Katzen v. 3 Kilogrm Gewicht 0,03—0,05
Hunde v. 10—15 Kilogrm Gewicht 0,06—0,1
Kaninchen v. 1,5—2 Kilogrm Gewicht 0,05—0,08
junge Zieg. v. 2,5—3,5 Kilogrm Gewicht 0,3—0,4
und bei Injection in eine Vene für
Katzen von genanntem Gewicht 0,015
Hunde von genanntem Gewicht 0,025—0,05
Kaninch. von genanntem Gewicht 0,01—0,015 Grm
Cytisinum nitricum.

4. Im Allgemeinen lässt sich die Wirkung des Cytisin dahin präcisiren, dass dasselbe zuerst excitirend wirkt, diese Erregung rasch vorübergeht, und um so rascher einer Depression oder vollkommenen Lähmung weicht, je grösser die zur Wirkung gelangende Giftmenge ist.

Die Versuche die Wirkung des Cytisin auf die einzelnen Organe oder Systeme des thierischen Körpers zu eruiren haben zu folgenden Resultaten geführt:

5. Die Function des grossen Gehirns wird nicht direct afficirt; eine nar-

cotische Wirkung im engeren Sinne des Wortes lässt sich bei Thieren nicht erkennen. Alle verrathen keine Beeinträchtigung des Bewusstseins so lange sie überhaupt noch im Stande sind zweckentsprechende Bewegungen z. B. zur Abwehr von Belästigungen auszuführen.

6. Das Rückenmark und die motorischen Nerven werden zuerst excitirt; auf diese Excitation folgt eine mehr oder minder vollständige Lähmung und diese Lähmung beginnt in den peripherischen Enden der motorischen Nerven.

Die Erregung zeigt sich am augenscheinlichsten bei allen Vögeln, ferner bei Bombinator igneus und Salamandra maculosa. Die Unke bietet, wie wir in 6 Fällen sahen, ganz das Bild einer beginnenden Strychninvergiftung. Die Extremitäten werden mehr oder weniger rigide, der Leib des Thieres durch die halbsteifen Beine zollhoch erhoben ohne dass es zu wirklichem Tetanus kommt. Salamandra maculosa wird völlig starr; die vier Extremitäten werden nach rückwärts an den Leib gestreckt u. zugleich tritt oft aus den Hautdrüsen das weisse, giftige Secret hervor. Erst einige Zeit später wird der Körper schlaff; während er früher quer über einen Finger gelegt, eine gerade Linie bildete, senken sich nun allmählich Kopf und Schwanz zu beiden Seiten des Fingers herab.

Tauben und ohne Ausnahme auch alle anderen genannten Vögel zeigen ähnliche Symptome wie bei Nicotin-Vergiftung. Die Beine werden häufig erst eines nach dem anderen starr nach hinten gestreckt, die Zehen flectirt. Es fällt z. B. die Taube vornüber auf die Brust, kann aber in diesem Stadium der Vergiftung nicht nur die Flügel bewegen, sondern auch von ge-

eigneter Unterlage (der auf und abwärts bewegten Hand) aus noch ganze Strecken weit z. B. über das ganze Auditorium weg zur Decke des Zimmers fortfliegen, ganz ähnlich wie — alte, fluggeübte — Tauben, die mit kleinen Dosen von Coniin-Salzen vergiftet sind. Gelangen grosse Dosen auf einmal oder doch rasch zur Wirkung so gesellt sich bei grösseren Vögeln, wie Falken, Bussarden, Hähnen, zu der Starre der Beine auch heftiger Opisthotonus gerade wie bei Strychnintetanus.

Bei Fröschen sahen wir die Erregung der medulla nie so deutlich wie bei Unken. Immer aber werden hier nach Anwendung nicht zu grosser Dosen zuerst die vorderen Extremitäten der Willkühr entzogen, rigide, und zwar bald in der Weise, dass das Thier die beiden Arme zusammenpresst, (die Hände in einanderfaltet) oder sie ab und rückwärts unter das Abdomen streckt. Nöthigt man jetzt das Thier zum Sprunge, so schiebt es den Körper durch Bewegung der hinteren Extremitäten über die steifen vorderen vorwärts.

Die der Erregung folgende Lähmung beginnt in den peripherischen Enden der motorischen Nerven. Dies lässt sich bei vergifteten Fröschen mit vorgängiger (einseitiger) Unterbindung der Schenkelgefässe oder Anlegung einer Massenligatur mit Ausschluss des Nervus Ischiadicus durch die im Gegensatz zur Lähmung aller anderen Bewegungsnerven fortdauernde Erregbarkeit des betreffenden Schenkelnerven durch Inductionsströme (2 Grove's, Wippe, Du Bois Schlitten und Schlüssel) in der bekannten Weise demonstriren.

Der Lähmung der Nerven scheint gleichfalls eine Reizung vorherzugehen. Man sieht nämlich

ähnlich wie bei Nicotin-Vergiftungen fibrilläre Zuckungen besonders bei Säugethieren über den ganzen Körper verbreitet, bald hier, bald dort auftreten und nach Sistirung der Respiration und Herzaction noch lange Zeit in den verschiedensten Muskeln wiederkehren.

Bei Säugethieren zeigt sich die Erregung des Rückenmarks nur in einer nicht immer sehr deutlich ausgebildeten Steifheit der Extremitäten. Die Thiere scheuen Bewegungen, angerufen trippeln sie mit steifen Beinen ohne die Stelle zu verändern, bald aber knicken selbst bei diesen Bewegungen die Zehen um, das Thier fällt auf die Kniee und endlich auf die Seite, Hunde am häufigsten auf die rechte. Kommt es, weil zu geringe Dosen angewendet wurden, nicht zur Lähmung, so sitzen Kaninchen öfters still und theilnahmlos in einer Ecke, schliessen auch wohl die Augen wie zum Schlafen, ein Zustand, der von einigen Autoren für Narcose gehalten worden ist*).

7. Die willkührlichen Muskeln sind nach vollständiger Lähmung ihrer motorischen Nerven und selbst wenn direct angebrachte mechanische und chemische Reize keine Zuckung veranlassen durch Inductionsströme noch vollkommen erregbar. Die Faradocontractilität der Muskeln bleibt jedenfalls lange Zeit nach der Lähmung der motorischen Nerven erhalten. Allmählich zeigt die Contractilität sich in der Weise verändert, dass die hervorgerufene Contraction nur allmählich, absatzweise in Erschlaffung zurückkehrt.

*) W. Scott Gray ist sogar der Meinung zur Winterszeit, bei spärlich vorhandener Nahrung narcotisirten sich die Hasen durch Abnagen der Rinde von Cyt. Lab. absichtlich um das Hungergefühl abzustumpfen!

8. Die sensiblen Nerven werden wenn überhaupt jedenfalls erst sehr spät durch Cytisin in ihrer Function beeinträchtigt. Lange nach erfolgter Lähmung der motorischen Nerven löst faradische Reizung der sensiblen Rückennerven bei rana esculenta in den Muskeln derjenigen Extremität, deren Blutgefässe vor der Vergiftung unterbunden wurden, Reflexcontractionen aus.

9. Veränderung der Respiration tritt bei allen höheren Thieren als eines der ersten Vergiftungssymptome zu Tage. Das Athmen erscheint stets zunächst wesentlich beschleunigt, geht dann allmählich über in Verlangsamung mit welcher sich bald auch Dyspnoe verbindet, bis schliesslich durch Lähmung der Athmungsnerven völliger Stillstand eintritt.

Bei Amphibien hält die Beschleunigung nur sehr kurze Zeit an und geht nach einem gleichfalls kurzen Stadium sehr angestrengten, mühsamen Athmens in Stillstand über. Bei Hunden verhält sich die Respiration ganz ähnlich wie nach starker Muskelanstrengung bei Sommerhitze, sie ist keuchend und von 8 auf 32 in $^1/_4$ Minute vermehrt; geht dann aber nach und nach in Verlangsamung über. Werden grössere Dosen in eine Vene injicirt, so folgt auf wenige rasche Inspirationen Stillstand der Athmung im Inspirationsstadium. Dieser inspiratorische Krampf, bisweilen von 20—30 Sek. Dauer, geht vorüber und es beginnt nun die Respiration wieder mit langsamen Zügen. Gesteigerte Athemfrequenz, inspiratorischer Krampf des Zwerchfells, Rückkehr der Athmung mit verminderter Frequenz tritt bei Hunden nach Injection des Giftes in die Blutbahn sowohl bei intacten wie bei durchschnittenen N. Vagi ein; leichter allerdings

und schon auf geringere Dosen bei erhaltenen als bei durchtrennten Nerven. Die Reizung der peripherischen Vagusenden erfordert geringere Cytisinmengen um Zwerchfellskrampf hervorzurufen, als das Vaguscentrum. Kommen relativ grosse Dosen auf einmal in die Blutbahn, z. B. bei Katzen 0,025, so geht der inspiratorische Krampf in Lähmung der Athmungsnerven über ohne vorherige Wiederkehr der Respirationsbewegungen.

Um den Einfluss des Cytisin auf das Circulationssystem festzustellen, waren sehr zahlreiche und zum Theil complicirte Experimente erforderlich, bei welchen mir die Herren Prosector Dr. Merkel, Dr. Creite und Stud. med. Strüh auf das Bereitwilligste ihre sehr dankenswerthe Unterstützung gewährten.

10. Das vasomotorische Nervensystem wird durch Cytisin erregt. — Betrachtet man unter dem Mikroskop die Schwimmhaut oder das Mesenterium eines curarinisirten Frosches, bringt dann auf das feucht gehaltene Object einen winzigen Crystall des Giftes, so sieht man nach einiger Zeit die kleineren und grösseren Gefässe sich contrahiren, die letzteren oft bis auf den dritten Theil ihres früheren Lumens. Die Contraction erfolgt meist zuerst an einer Stelle ringförmig, erstreckt sich dann aber auch gleichmässig und besonders schön an Mesenterialgefässen auf die ganze Länge des im Gesichtsfelde liegenden Gefässes. Statt der directen Application eines Krystalls kann man auch das Gift in Lösung unter die Haut spritzen. Der Erfolg wird dadurch verzögert aber nicht verhindert. — Vielleicht kommt dem Cytisin auch eine direct auf die Gefässmuskulatur gerichtete Reizwirkung zu.

11. Die im Sympathicus und Halsmark verlaufenden Beschleunigungsnerven werden durch Cytisin erregt. — Schliesst man die Einwirkung des regulatorischen Herznervensystems durch Discision der Ni. Vagi am Halse möglichst aus, hebt ausserdem den Einfluss des vasomotorischen Nervensystems und die excitirenden Einflüsse, die angeblich vom Gehirn durch das Rückenmark zum Herzen gehen, durch Trennung der medulla zwischen 1. u. 2. Halswirbel auf, leitet künstliche Respiration in der bekannten Weise ein, bestimmt die Zahl der Herzschläge vor der Vergiftung, so sieht man regelmässig nach der Vergiftung das blosgelegte Herz schneller pulsiren.

12. Das im Herzen gelegene, die rhytmische Contraction des letzteren bedingende gangliöse Centralorgan wird durch Cytisin ebenfalls erregt und erst durch colossale Mengen geschwächt, vielleicht auch gelähmt. —

Es dauern nämlich die Herzcontractionen nach völligem Stillstand der Respiration und Lähmung des Rückenmarks immer noch fort; bei Reptilien sogar oft mehr als zweimal 24 Stunden. — Ferner kann man, wenn nach Eintritt des durch enorme Dosen bedingten Todes das Herz still steht durch direct angebrachten electrischen Reiz oft genug rhytmische Contractionen hervorrufen. Drittens hört man nach Injection des Giftes in die Blutbahn bei grossen Hunden den Herzchock oft ganz laut schon aus der Entfernung und fühlt mit der aufgelegten Hand die enorme Verstärkung des Herzstosses. — Hat man bei Kaninchen die Carotis, bei Hunden eine Carotis oder Cruralarterie in üblicher Weise mit einem Manometer verbunden und den Rollenabstand bestimmt,

bei welchem durch Reizung des Vagus Herzstillstand eintritt, vergiftet mit nicht zu kleinen Dosen durch Injection in eine Vene, so sieht man unter allen Umständen den Blutdruck bedeutend steigen und die Reizung der Vag. ist bei Hunden ohne jeden Einfluss auf die Herzaction selbst wenn die Rollen übereinander geschoben sind. Bei Kaninchen erreicht man häufig noch Verlangsamung und selbst Stillstand des Herzens durch electrische Reizung des Vagus, nicht aber wenn man gleichzeitig den Aortenbogen comprimirt. — Sind endlich sämmtliche Nerven, welche bekannter Massen die Thätigkeit des Herzens beeinflussen, durchtrennt, eine Carotis mit dem Manometer verbunden, künstliche Respiration eingeleitet, so sieht man auch jetzt gleich nach der Injection den Blutdruck steigen, selbst wenn auch noch die beiden Ni. Splanchnici durchschnitten sind.

13. Der Einfluss des Cytisin auf die im N. Vagus verlaufenden Hemmungsnerven ist mir bei Hunden und noch weniger bei Katzen, welche die Durchschneidung des Vagus am schlechtesten ertragen, nicht ganz deutlich geworden. Mag man alle Herznerven mit Ausnahme des N. Vagus eliminiren oder auch bestehen lassen und bei gleichzeitiger künstlicher Respiration kleine oder grosse Dosen Cytisin in die Blutbahn oder wirksame in das subcutane Bindegewebe bringen, so sieht man bei vorgängiger wie nachfolgender Durchschneidung des Vagus immer die Herzaction beschleunigt und den Blutdruck gesteigert, während electrische Reizung des Vagus ohne Einfluss auf die Herzthätigkeit bleibt. Hinderlich ist bei Hunden die zur Vermeidung anderer Störungen unbedingt nothwendige tiefe Narcose,

welche selbst schon eine Beschleunigung der Herzaction zur Folge hat. Trotz dieses unerwarteten Ergebnisses muss unseres Erachtens die Annahme einer directen Lähmung des N. Vagus zurückgewiesen und statt deren eine Uebercompensirung seiner hemmenden Wirkung angenommen werden durch die gangliösen Herznerven, falls alle anderen ausser Wirkung gesetzt sind oder durch das Gangliennervensystem im Verein mit den vasomotorischen und excitirenden Nerven, falls deren Wirkung vorher nicht eliminirt war. — Bei Kaninchen dagegen lässt sich eine Erregung des N. Vagus und zwar besonders der peripherischen Enden experimentell nachweisen. Bei diesen dem Einfluss des Giftes besser widerstehenden Thieren wird allem Anschein nach der Vagus früher oder energischer erregt, als die übrigen Herznerven. Es erfolgt hier Verlangsamung der Herzaction durch Vagus-Reizung, geht bei Injection kleinerer Dosen bald vorüber und lässt sich durch nachfolgende Injectionen wiederholt erzielen.

14. In directem Zusammenhang mit der Einwirkung des Cytisin auf die Herzthätigkeit, allein abhängig von dem gesteigerten Blutdruck im Gefässsystem, steht die namentlich bei Ziegen constant bald nach der Vergiftung zu beobachtende Vermehrung der Harnsecretion.

15. Bei Hunden, Katzen und Kaninchen, häufig auch bei Vögeln sieht man während der entwickelten Vergiftung Salivation auftreten. Sie scheint das Ergebniss verschiedener Einflüsse und einerseits durch Erregung der sensiblen und Geschmacksnerven der Mundhöhle, anderseits des N. Vagus (Nausea) und endlich durch Kaubewegungen bedingt zu sein. Man sieht bei den

meisten Thieren nach subcutaner Application des Giftes als eines der ersten Symptome Kaubewegungen und Lecken eintreten.

16. Bei Vögeln und vielen Säugethieren erregt das Cytisin von allen Applicationsstellen aus Erbrechen u. zwar sowohl bei erhaltenen wie bei durchschnittenen Ni. Vagi. Die Ursachen dürften verschiedene sein. Hier mögen einmal die directe Einwirkung auf die Magenwände, dann die reizende Wirkung auf die Enden und das Centrum des Vagus, vielleicht auch der bittere Geschmack des Cytisin und endlich möglicher Weise der unter allen Umständen erhöhte Blutdruck zusammen wirken. Kommen rasch grosse Dosen in die Blutbahn, so kann das Erbrechen ganz ausbleiben.

17. Das Cytisin erregt sowohl nach Einführung in den Magen und Darm wie nach Injection in das Gefässsystem oder nach subcutaner Anwendung gesteigerte, oft krampfhafte Peristaltik. Nach Injection in das Gefässsystem hört man sehr bald lebhaftes Gurren im Leibe, die aufgelegte Hand fühlt, ja bisweilen sieht man durch die unverletzten Bauchdecken die lebhafte Bewegung der Eingeweide. Bei Hunden und Katzen gesellt sich hierzu angestrengtes Würgen und Erbrechen und äusserst energische Thätigkeit der prela abdominis. — Hat man grosse Hunde mit 4—5 CC. Tr. Opii simpl. von einer Schenkelvene aus so tief narcotisirt, dass auch nicht die leiseste Reflexaction durch operative Eingriffe verursacht wird, ein Zustand, in welchem die Respiration stark verlangsamt, die Herzaction meist enorm (von 5—8 auf 19—22 in 5 Sek.) beschleunigt ist, die Eingeweide in der geöffneten Bauchhöhle bewegungslos und durch die prall-

gefüllten Blutgefässe mehr weniger livid gefärbt daliegen, so kann man durch Injection auf 35° C. erwärmter Cytisinlösung (1 CC = 0,025 Cyt. nitric. genügt) in den Darm intensive Peristaltik mit völligem Erblassen der Darmschlinge hervorrufen. Die Bewegung verbreitet sich von der Injectionsstelle aus über den Intestinaltractus weiter fort*). Sie erfolgt auch nach Injection des Giftes in die Blutbahn. Dazu gesellt sich im letzteren Falle bei weiblichen besonders trächtigen Thieren auch Contraction der Uterusmuskulatur. Ob das Cytisin hier direct auf die glatten Muskelfasern oder indirect durch die betreffenden Nerven einwirkt, lässt sich zur Zeit nicht entscheiden. Injicirt man in die Ureter grosser Hunde Cytisinlösung, so sieht man oft, nicht immer, ringförmige Contraction der Harnleiter auftreten, was, die Richtigkeit der Angaben von Engelmann und A. vorausgesetzt, für eine directe Einwirkung des Cytisin auf die glatten Muskelfasern sprechen würde, ohne natürlich eine indirecte Wirkung durch das Nervensystem an anderen Stellen auszuschliessen.

Eine Vermehrung der Secretion der Darmschleimhaut oder gar eine Entzündung derselben haben wir nach Application von Cytisin nie beobachtet. Die bei verschiedenen Vögeln, übrigens auch, wenn gleich in viel geringerem Grade, bei Säugethieren und endlich auch nach

*) Sehr beschränkte Eröffnung des Cavum Peritonei in der Linea alba und Injection indifferenter Flüssigkeit in den Darm, so ausgeführt, dass jeder Austritt von Darminhalt unmöglich bleibt, ertragen Kaninchen und Hunde ohne Nachtheil. Injicirt man Cytisinlösung in eine leere Darmschlinge in lethaler Dosis, so erfolgt der Tod sehr rasch, während Injection von ausserordentlich grossen Mengen in das stets angefüllte Coecum Kaninchen ohne Nachtheil überleben.

Vergiftungen mit Theilen des Goldregens bei Menschen hie und da beobachtete purgirende Wirkung muss, soweit sie nicht durch individuelle Zufälligkeiten bedingt ist, auf die vermehrte Peristaltik als ihre Veranlassung zurückgeführt werden.

17. Weder bei Application in den Conjunctivalsack noch nach innerer Anwendung setzt Cytisin eine constante Wirkung auf die Pupille. In sehr vielen Fällen kommt während der Vergiftung weder Myosis noch Mydriasis zur Beobachtung. Bei ganz jungen Falken trat meistens, aber auch nicht immer, eine Verengerung der weiten Pupille als erstes Symptom der Vergiftung auf nach subcutaner, nicht nach äusserer Application auf das Auge. Bei Säugethieren war gleichfalls häufig nichts zu beobachten bis zum Eintritt hochgradiger Athemnoth, welche meistens von Myosis begleitet war und welche letztere selbst nach dem Tode noch längere Zeit fortbestand. Umgekehrt sahen wir besonders bei Katzen nach Injection grosser Dosen (0,02—0,03 Grm Cyt. nitric) in kürzester Zeit möglichst starke Erweiterung der Pupille neben Vorfall der Nickhäute ohne vorgängige Verengerung auftreten.

18. Die Körpertemperatur ist während der Vergiftung nur ganz zu Anfang etwas erhöht, sinkt dann aber stetig bis zum tödtlichen Ausgang.

19. Die Elimination des in den Körper gebrachten Cytisin erfolgt — abgesehen vom Erbrechen — vorzugsweise durch die Nieren. — Mit dem Harn cytinisirter Frösche kann man andere in characteristischer Weise vergiften. Erhält man bei Kaninchen künstlich die Respira-

tion im Gange, so kann man ohne die Herzthätigkeit zu lähmen nach und nach so grosse Mengen des Giftes in die Blutbahn bringen, dass hinreichend davon durch die Nieren ausgeschieden wird, um aus dem auf Frösche giftig wirkenden Harn das Alkaloid chemisch darzustellen. Das Cytisin wird also im Körper nicht, oder nicht vollständig zersetzt.

20. Erholung von der Vergiftung erfolgt meistens, wenn es möglich ist die Respiration hinreichend lange künstlich zu unterhalten. Erbrechen begünstigt die Genesung. Der Gebrauch der Gerbsäure als chemisches Antidot ist nicht zu empfehlen, denn in überschüssiger Gerbsäure löst sich das zuerst gebildete gerbsaure Cytisin zum Theil oder auch ganz. Aber auch mit alkalischen Lösungen des Tannin konnten wir bei vergifteten Thieren keine erfolgreiche Behandlung durchführen. Mittelst Transfusion unter vorgängiger Depletion gelang es uns stark vergiftete Hunde wieder herzustellen, bei welchen die Respiration bereits längere Zeit sistirt hatte und das Herz nur noch schwache und sehr verlangsamte Action erkennen liess. Leichter und rascher erfolgte die Wiederbelebung, wenn gleichzeitig künstliche Respiration unterhalten wurde. — Frösche können sich von Cytisin-Vergiftung wie von Curare und Coniinvergiftung vollständig erholen, wenn sie in zweckdienlicher Weise aufbewahrt werden. Auch Vögel und Hunde erholen sich bisweilen gegen alles Erwarten von sehr schwerer Vergiftung ganz spontan.

21. Der Tod erfolgt immer asphyctisch, bald unter heftigen klonischen und tonischen Krämpfen, wenn, wie es Regel ist, bei Anwendung grösserer Dosen die Respiration vor der

Lähmung der motorischen Nerven stillsteht, oder bald ohne alle Convulsionen bis auf die erwähnten weit verbreiteten fibrillären Zuckungen, die bald hier bald da auftreten und oft noch eine halbe Stunde nach dem Stillstand der Respiration und Circulation vorkommen.

22. Der Sectionsbefund nach Cytisinvergiftung bietet abgesehen von den Folgen des Erstickungstodes durchaus nichts Characteristisches.

23. Der gerichtlich chemische Nachweis einer Cytisinvergiftung dürfte unter allen Umständen auf grosse Schwierigkeiten stossen und wenig Aussicht auf Erfolg darbieten. Der Mangel einer empfindlichen und characteristischen Reaction für das Cytisin, der Umstand, dass bei Lebzeiten meistens durch Emesis, vielleicht auch Catharsis und Diuresis der grösste Theil des Giftes aus dem Körper entfernt sein dürfte, würde den Erfolg einer chemischen Untersuchung der verschiedenen Körpertheile zur Darstellung des Giftes wahrscheinlich unmöglich machen. Bei der ausserordentlich geringen dosis lethalis war es uns nie möglich nach subcutaner Application des Giftes aus dem Erbrochenen Cytisin in einer zur Vergiftung kleinerer Thiere hinreichenden Menge aufzufinden.

24. Aus vergleichenden Experimenten mit wässrigen und weingeistigen Extracten der Samen, der Samenschale, der Blüthen, unreifen Schoten, der Blätter, der Rinde, der Wurzel halten wir uns berechtigt 1) sämmtliche genannten Pflanzentheile für giftig und 2) das Cytisin für den alleinigen Träger der giftigen Wirkung zu erklären *). —

*) Hätte J. Dougal zu seinen Experimenten nicht nur Kaninchen benutzt, so würde er nicht zu seinen irrigen

II. *Das Vorkommen des Cytisin.*

Die in einzelnen Fällen von Vergiftungen mit Pflanzentheilen des Cytisus Lab. bei Menschen beobachteten Entzündungserscheinungen im Intestinaltractus waren für mich Veranlassung nach etwa noch anderen wirksamen Bestandtheilen in den verschiedenen Pflanzentheilen zu suchen. Die Ergebnisse dieser vorzugsweise chemischen Untersuchungen kann ich in wenigen Sätzen zusammenfassen.

1. Die von W. Scott Gray vermeintlich dargestellte Laburninsaeure ist ein Gemisch von anorganischen und organischen Säuren. Die von ihm beobachtete giftige Wirkung war bedingt durch einen geringen Gehalt an Cytisin und die angebliche narcotische Wirkung beruht auf irriger Deutung.

2. Das Cytisin kommt auch in der schwarzen Schale der Samen vor. Aus 500 Grm mühsam isolirter Samenschalen erhielt ich nach der früher l. c. angegebenen Methode verhältnissmässig viel Cytisin. Es enthält also der Cytisussamen, wie übrigens auch schon aus den Experimenten mit Extracten hervorgieng, nicht, wie nach Fraser die zur selben Familie gehörende Calabarbohne, einen purgirenden Stoff.

Schlüssen gelangt sein; um übrigens nicht zu tadeln ohne zu verbessern und Experimente nur mit der Feder zu kritisiren, habe ich dieselbe Menge alter Samen, die D. bei Kaninchen vom Magen aus wirkungslos fand mit möglichst wenig Wasser ausgezogen und den filtrirten Auszug in eine leere Dünndarmschlinge eines Kaninchens gebracht, das Thier erlag in kurzer Zeit. Die Giftigkeit des Samens zu demonstriren, reiche man ihn Tauben als alleiniges Futter. Sie nehmen davon bis Erbrechen, Athemnoth und Unsicherheit in den Extrencitäten sie von jedem fernern Genuss abschrecken.

3. Das aus den Samen mittelst Aether ausgezogene fette Oel, von hellgelber Farbe und mildem Geschmack, wirkt nicht giftig. Einmal begegnete mir bei einem Kaninchen, dem ich wiederholt grössere Mengen dieses Oels in den Magen gebracht hatte, eine exquisite Diphtheritis des Darms. Da ich aber in vielen gerade durch diesen Befund veranlassten Wiederholungen nichts krankhaftes gesehen habe, muss ich diese eine Ausnahme als eine zufällige Complication aus anderen unbekannten Ursachen ansprechen. — Es scheint mir auch Scott Gray nicht Unrecht zu haben, wenn er in dem von Christison*) mitgetheilten Vergiftungsfall die intensive und langanhaltende Darmaffection für eine Folge anderer Ursachen erklärt.

4. Dass das Cytisin nicht nur im Cytisus Laburnum vorkommt, sondern ausserdem in drei anderen Species von A. H. und mir gefunden worden ist, findet sich bereits in unserer ersten Mittheilung angegeben. Diese drei Species betrafen Cyt. alpinus, supinus und elongatus. Seit jener Veröffentlichung habe ich im Laufe der letzten Jahre noch einige andere Species hinsichtlich ihres Gehaltes an Cytisin und ihrer toxischen Wirkung auf Frösche untersucht. Die Species, von welchen mir Samen und Schoten, von einigen auch Rinde, durch den Gartenmeister des hiesigen botanischen Gartens zugestellt wurden, sind Cytisus Weldeni, C. sessilifolius, C. capitatus, C. hirsutus und C. nigricans. Alle bis auf die letztgenannte ergaben bei der chemischen Untersuchung und natürlich auch der experimentellen Prüfung an Ranae positive

*) Ed. Med. and S. J. Oct. 1843. Auch Taylor (on Poisons II p. 840) erklärt die Angabe der Symptome für imperfect.

Resultate. Hingegen war es nicht möglich aus Schoten, Samen und Rinde von Cytisus nigricans eine toxisch wirkende Substanz zu isoliren, obgleich die mit Bleiacetat gereinigten und wieder entbleiten Auszüge mit Gerbsäure Fällungen gaben. Die in Wasser aufgenommenen Rückstände der zersetzten Gerbsäure-Niederschläge wirkten ebensowenig giftig wie die nachträglich aus neuen Quantitäten Samen, Schoten und Rinde dargestellten wässrigen Extracte. Dieses negative Resultat scheint mir von Interesse, weil in ihm ein Grund mehr gegeben ist, die Gattung Cytisus, wie es auch englische Botaniker nach dem Vorgange von Hofr. Grisebach *) bereits gethan haben, in mehrere Gattungen zu trennen. Das Vorkommen des Cytisin würde sich also nachgewiesener Maassen erstrecken auf die folgenden Angehörigen der

Gattung Laburnum, Grisebach.
Cytisus Laburnum,
— fragrans,
— sessilifolius,
Gattung Cytisus.
Sectio Eucytisus,
Cytisus capitatus,
— supinus,
— elongatus,
— hirsutus,

während die Gattung Lembotropis, Grisebach,
mit Lemb. nigricans

sich nicht nur botanisch, sondern auch durch den Mangel der giftigen Eigenschaften, das Fehlen des Cytisin, bestimmt von den vorhergehenden unterscheiden liesse.

*) A. Grisebach, Spicilegium florae Rumelicae et Bithynicae I p. 7—10.

Schliesslich erlaube ich mir hinsichtlich der experimentellen Belege und der ausführlichen Zusammenstellung der physiologischen Wirkung mit den nach Vergiftungen durch Cytisus Laburnum bei Menschen vorgekommenen Erscheinungen auf meine demnächst erscheinenden Beiträge zur Pharmacologie und Toxicologie hinzuweisen.

Zur Theorie der Kummer'schen Fläche und der zugehörigen Linien-Complexe zweiten Grades.

Von

Felix Klein.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Die Coordinaten der geraden Linie im Raume lassen sich, wie ich im Nachstehenden zeigen will, durch 4 Parameter in einer Art und Weise darstellen, welche zur Behandlung der Kummer'schen Fläche und der zugehörigen Linien-Complexe zweiten Grades besonders geeignet scheint. Die Einführung dieser Parameter ist algebraisch in der Jacobi'schen Einführung elliptischer Coordinaten mit enthalten, so dass man dieselbe als eine neue geometrische Anwendung des Jacobi'schen Verfahren's betrachten kann. — Ich werde diese Parameter zunächst dazu benutzen, um die Tangenten der Kummer'schen Fläche, die Geraden der zugehörigen Linien-Complexe u. s. f. durch dieselben darzustellen; sodann werde ich mit Hülfe derselben einige auf die Kummer'sche Fläche und die betreffenden Complexe bezüglichen Differentialgleichungen in-

tegriren. Dabei knüpfe ich an eine frühere Arbeit an, die unter dem Titel: „Zur Theorie der Complexe des ersten und zweiten Grades" in den mathematischen Annalen, T. II, und im Auszuge auch in den Göttinger Nachrichten vom 4ten Juni 1869 veröffentlicht worden ist.

1. In dem letztgenannten Aufsatze habe ich gezeigt, dass sich die einfach unendlich vielen Complexe zweiten Grades, welche eine selbe Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche haben, durch die folgende Gleichung darstellen lassen, in der σ einen Parameter bedeutet, die k_α Constanten sind:

$$1)\quad o = \frac{x_1^2}{k_1 + \sigma} + \frac{x_2^2}{k_2 + \sigma} + \dots\dots \frac{x_6^2}{k_6 + \sigma}.$$

Die x sind dabei lineare Functionen der Linien-Coordinaten, welche identisch die Relation befriedigen:

$$2)\quad o = x_1^2 + x_2^2 + \dots\dots x_6^2.$$

Giebt man den x_α beliebige feste Werthe, so erhält man aus (1) fünf zugehörige Werthe von σ. Von diesen Werthen wird einer unendlich gross und kommt nicht weiter in Betracht, wenn die x_α die Gleichung (2) befriedigen, also Coordinaten einer geraden Linie sind. Die vier übrigen mögen x, y, z, t heissen. Sie sind die 4 Parameter, die ich fortan gebrauchen werde.

Vermöge derselben drücken sich die Coordinaten x_α in der folgenden Weise aus (vergl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik. p. 198 ff.).

$$3)\quad \varrho x_\alpha^2 = A_\alpha (x + k_\alpha)(y + k_\alpha)(z + k_\alpha)(t + k_\alpha),$$

unter A_α die Ausdrücke verstanden:

$$A_1 = \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)\dots(k_6 - k_1)} \text{ u.s. f.}$$

2. Um nun vermittelst dieser Parameter die Tangenten der Kummer'schen Fläche darzustellen, braucht man in (3) nur zwei derselben, etwa z und t, einander gleich zu setzen (cf. hier und im Folgenden die citirte Arbeit).

Betrachtet man dabei x und y als constant, so hat man jedesmal solche Tangenten, welche die Fläche in demselben Punkte berühren. x und y characterisiren also den Berührungspunkt, man kann sie als Coordinaten des Punktes auf der Fläche auffassen. Die von den Tangenten in zwei Punkten, x, y und x^1, y^1, gebildeten zwei Büschel sind dabei, gleichen Werthen von $z = t$ entsprechend, projectivisch auf einander bezogen.

Setzt man drei der Parameter einander gleich, so erhält man die Haupttangenten der Fläche.

Nimmt man die vier Parameter paarweise gleich, so hat man die Linien, welche in einer der 16 Doppelebenen der Fläche liegen oder durch einen der 16 Doppelpunkte derselben hindurchgehen.

Endlich die Annahme, dass alle Parameter einander gleich sind, ergiebt die Tangenten der in den 16 Doppelebenen gelegenen Berührungs-Kegelschnitte, so wie die Erzeugenden der in den 16 Knotenpunkten berührenden Kegel.

Die einem bestimmten Complexe (1) angehörigen Geraden erhält man, wenn man einen der Parameter, etwa t, dem betreffenden σ gleich setzt.

Nimmt man zwei Parameter, etwa z und t, constant, so hat man die Linien der Congruenz,

welche den Complexen $\sigma = z$ und $\sigma = t$ gemeinsam ist.

Ist zugleich $z = t$, so hat man die singulären Linien des Complexes $\sigma = t = z$. Diese singulären Linien sind, wenn $z = t = -k_\alpha$, Doppeltangenten der Fläche, nämlich diejenigen, welche dem unter den Complexen (1) befindlichen linearen Complexe $x_\alpha = 0$ angehören.

Sind drei der Parameter, etwa y, z, t, constant, so erhält man die Erzeugenden der den drei Complexen $\sigma = y$, $\sigma = z$, $\sigma = t$ gemeinsamen Linienfläche.

Ist dabei $y = z = t$, so hat man die osculirenden singulären Linien des Complexes $\sigma = y = z = t$. Wenn der gemeinsame Werth von y, z, t gleich $-k_\alpha$ ist, werden dies vierpunktig berührende Linien.

Endlich alle Parameter constant, giebt die den Complexen $\sigma = x$, $\sigma = y$, $\sigma = z$, $\sigma = t$ gemeinsamen 32 geraden Linien. Ist dabei $x = y = z = t$, so hat man die 32 ausgezeichneten singulären Linien des Complexes $\sigma = x = y = z = t$, welche Tangenten der Berührungskegelschnitte in den 16 Doppelebenen derselben sind.

3. Ich werde jezt die Darstellung der Linien-Coordinaten durch die vier Parameter dazu benutzen, um einige Differenzialgleichungen zu integriren.

Damit zwei gerade Linien mit den Coordinaten x_α und y_α sich schneiden, muss sein (vgl. die citirte Abhandlung):

$$\Sigma x_\alpha y_\alpha = 0.$$

Damit also zwei consecutive Linien sich schneiden, muss da in Folge von (2) sowohl Σx^2_α als $\Sigma x_\alpha dx_\alpha$ verschwindet, sein:

$$\Sigma x_\alpha d^2 x_\alpha = 0,$$

oder, was vermöge (2) dasselbe ist:

$$\Sigma dx_\alpha^2 = 0.$$

Führt man in diese Gleichung die Parameter x, y, z, t, ein, so erhält man (vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik. p. 205):

$$(4)\quad o = \frac{(x-y)(x-z)(x-t)}{(x+k_1)(x+k_2)\ldots.(x+k_6)}\,dx^2$$

$$+\frac{(y-z)(y-t)(y-x)}{(y+k_1)(y+k_2)\ldots.(y+k_6)}\,dy^2$$

$$+\frac{(z-t)(z-x)(z-y)}{(z+k_1)(z+k_2)\ldots.(z+k_6)}\,dz^2$$

$$+\frac{(t-x)(t-y)(t-z)}{(t+k_1)(t+k_2)\ldots.(t+k_6)}\,dt^2.$$

Nimmt man nun etwa z und t constant, also $dz = 0$, $dt = 0$, so erhält man, indem sich aus (4) der Factor $(x - y)$ forthebt, die Differentialgleichung der Umhüllungs-Curven der den beiden Complexen $\sigma = z$ und $\sigma = t$ gemeinsamen Congruenz in der quadrirbaren Form:

$$dx\sqrt{\frac{(x-z)(x-t)}{(x+k_1)(x+k_2)\ldots.(x+k_6)}} =$$

$$dy\sqrt{\frac{(y-z)(y-t)}{(y+k_1)(y+k_2)\ldots.(y+k_6)}}.$$

Setzt man hierin $z = t$, so hat man die Umhüllungs-Curven der singulären Linien des Complexes $\sigma = z = t$.

Ist insbesondere $z = t = -k_\alpha$, so hat man die Umhüllungs-Curven derjenigen Doppeltangenten der Kummer'schen Fläche, welche dem Complexe $x_\alpha = 0$ angehören.

Setzt man ferner $x = y$, $z = t$, so ist (4) identisch befriedigt. Diess desswegen, weil, wie bereits angeführt, die entsprechenden Linien diejenigen sind, welche in einer der 16 Doppelebenen der Kummer'schen Fläche liegen oder durch einen der 16 Doppelpunkte derselben hindurchgehen.

Wir setzen endlich $y = z = t$. So geht (4) über in:

$$dx = 0, \text{ also } x = \text{Constans}.$$

Dies sind die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche. Unter denselben finden sich $x = -k_\alpha$ entsprechend, sechs, die zugleich Curven vierpunktiger Berührung sind.

Den in der letzten Integration ausgesprochenen Satz haben mein Freund Lie und ich in einer gemeinsamen Arbeit, die der Berliner Akademie der Wissenschaften am 15ten December 1870 eingereicht worden ist, auf geometrischem Wege entwickelt. Ich muss dabei hinzufügen, dass Lie es gewesen ist, der zuerst, nach einer dort beiläufig auseinandergesetzten, von der hier angewandten sehr verschiedenen Methode die Quadrirbarkeit der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche und ihre algebraische Natur erkannte.

Das Weber'sche compensirte Magnetometer zur Bestimmung der erdmagnetischen Intensität;

von

F. Kohlrausch, corresp. Mitgliede.

Die Theorie dieses Magnetometers, welches eine bisherige Lücke in den erdmagnetischen Messinstrumenten ausfüllt, hat Herr Weber vor mehreren Jahren im mathematisch-physikalischen Seminar vorgetragen. Ich habe dasselbe nur ausführen lassen und die Beobachtungen angestellt, welche ich hier nebst einigen Bemerkungen über das Wesentliche des Instrumentes als Beispiele seiner Anwendung mittheile.

Das compensirte Magnetometer soll zunächst ein Instrument zur bequemen und genauen Vergleichung der Horizontal-Intensität an verschiedenen Orten sein. Diese Aufgabe macht es zum Reisemagnetometer und zu einem nicht unwichtigen Hülfsapparat im physikalischen Laboratorium, wo der bedeutenden magnetischen Localeinflüsse wegen sehr oft das Bedürfniss dieser Vergleichung vorliegt. Die für die genannten Zwecke erforderliche Genauigkeit, dass nämlich die zu befürchtenden Beobachtungsfehler kleiner seien als die Variationen des Erdmagnetismus, leistet der Apparat vollständig. Dabei ist in der Regel keine zeitraubende oder besondere Festigkeit erfordernde Aufstellung verlangt, und die Beobachtung besteht in einer einfachen Bussolenablesung.

Eine absolute Bestimmung mit dem Instrument ist unnöthig, sobald die vergleichende Be-

obachtung einmal an einem Orte mit bekannter absoluter Intensität angestellt worden ist. Immerhin aber bietet das compensirte Magnetometer auch die Mittel zu einer solchen mit nicht mehr Mühe als andere, und mit der Genauigkeit, welche von einem transportabelen Instrumente nur verlangt werden kann.

Die Bestimmung der erdmagnetischen Intensität nach Gauss besteht in ihrem einen Theile aus der Beobachtung von Ablenkungen, die ein Magnetstab unter gemessenenen Verhältnissen einer Magnetnadel mittheilt. Man wählt hierbei die Entfernungen so gross, dass in der Gauss'schen Reihenentwickelung, welche zur Berechnung dient, nur die beiden ersten Glieder genommen zu werden brauchen. Diese werden aus den bei zwei verschiedenen Entfernungen beobachteten Ablenkungswinkeln ermittelt.

Die Eigenthümlichkeit des neuen Instrumentes besteht nun darin, dass durch eine bestimmte Combination von mehreren Ablenkungsstäben der Coefficient des zweiten Gliedes von selbst auf Null gebracht wird, indem die von den verschiedenen Magneten herrührenden Theile desselben sich „compensiren", so dass eine einmalige Ablenkungsbeobachtung genügt. Man erreicht durch die gleichzeitige Wirkung mehrerer Stäbe noch den zweiten Vortheil einer erhöheten Genauigkeit, indem die günstigste Grösse des Ablenkungswinkels von ungefähr 45^0 hervorgebracht wird, ohne die Grenze in der Länge der Magnete zu überschreiten, welche durch das Weglassen der späteren Glieder in der Reihenentwicklung vorgeschrieben ist.

Das compensirte Magnetometer in der ausgeführten Form besteht aus zwei Paaren von je

einander gleichen Magneten *MM* und *mm*, in deren Mittelpuncte die Bussole sich befindet. Bei den Ablenkungsbeobachtungen liegen alle Magnete ostwestlich, so dass die Verbindungslinie der Mittelpuncte von *MM* den magnetischen Meridian vorstellt.

M

m m

M

Die Pole gleichbenannter Magnete sind gleichgerichtet, die von *m* aber entgegengesetzt wie die von *M*, so dass die ablenkenden Kräfte auf die Bussole sich summiren. Bezeichnen wir durch *L* die Länge, *R* den Abstand der Magnete *MM* von der Nadel, durch *l*, *r* die entsprechenden Grössen für die Magnete *mm*, und endlich durch λ die Länge der Nadel; setzen wir ferner voraus, Magnete und Nadel seien nach allen Dimensionen ähnlich gestaltet und ähnlich magnetisirt, so liefert die Theorie, damit das zweite Glied der Reihe Null wird, die Bedingungen

$$L^2 = 2\,l^2 + \lambda^2 \text{ und } \frac{R^5}{r^5} = \frac{3}{4}\,\frac{L^3}{l^3}.$$

Diesen beiden Gleichungen kann z. B. genügt werden, wenn man setzt

$$\lambda : l : L = 1:2:3 \text{ und } \frac{R}{r} = 1{,}204.$$

Hiernach ist das Magnetometer construirt. Die Bussolennadel hat von oben gesehen die Gestalt eines Rhombus von 16 Mm Länge und 4 Mm Breite mit einer Durchbohrung von 3 Mm Durchmesser. Die Dicke beträgt 1 Mm. An den Magneten *m* sind unter Beibehaltung der Gestalt alle Dimensionen verdoppelt, an *M* verdreifacht. Der Abstand der Mittelpuncte der *m* von ein-

ander beträgt 210 Mm, der *M* 252,8 Mm. Diesen Anforderungen hat die Ausführung in der Werkstätte des Herrn Dr. Meyerstein mit anerkennenswerther Genauigkeit entsprochen. Die Stäbe wurden zwischen den Polen zweier sehr starker Magnete möglichst gleichmässig magnetisirt und besassen hiernach in der That einen dem Volumen sehr nahe proportionalen Magnetismus, indem auf 1 Mgr der grösseren Stäbe 201, auf 1 Mgr der kleineren Stäbe 205 Einheiten Magnetismus kamen.

Ueber die äussere Einrichtung des Instrumentes ist noch Folgendes zu bemerken. Die vier Ablenkungsstäbe sind auf einem leichten Messingrahmen drehbar befestigt, den man in zwei um 180° verschiedenen Stellungen auf kleine Zapfen der Bussole auflegen und so die Ablenkung nach entgegengesetzter Seite beobachten kann. Als Zeiger an der kleinen Nadel dienen aufgeklebte Glasfäden. Soll die Schwingungsdauer des Rahmens mit den Magneten beobachtet werden, so hängt man ihn in einem Kasten auf, welcher sonst zur Verpackung dient; die Beobachtung geschieht mittels eines kleinen angesteckten Spiegels. Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes dienen in gewöhnlicher Weise zwei an Coconfäden angehängte Gewichte.

Für den Gebrauch des Instrumentes gelten folgende Regeln.

1) Um das Verhältniss der Intensität T an zwei Beobachtungsorten zu ermitteln, brauchen nur die Ablenkungen an ihnen mit kurzer Zwischenzeit gemessen zu werden. Werden diese durch φ und φ_1 bezeichnet, so ist einfach

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\operatorname{tang} \varphi_1}{\operatorname{tang} \varphi}. \qquad (1.)$$

Ist die Temperatur an beiden Orten verschieden und hat man ermittelt, dass der Magnetismus der Stäbe für 1^0 um μ (in Theilen des ganzen Magnetismus) abnimmt, so ist der Ausdruck, noch mit $1 + \mu(\vartheta_1 - \vartheta)$ zu multipliciren, wenn durch ϑ und ϑ_1 die beiden Temperaturen bezeichnet werden.

So wurden z. B. die Intensitäten in dem Göttinger magnetischen Observatorium und in dem eisenfreien Pavillon des physikalischen Institutes verglichen, bei merklich gleicher Temperatur. Es fanden sich die Ablenkungswinkel

im Observatorium 51°01

im Pavillon 50°91

wonach die Intensität am letzteren Orte um $^1/_8$ Procent grösser ist.

Ausserdem wurde u. A. eine Vergleichung des Pavillons mit dem westlichen Zimmer im ersten Stockwerk des Instituts vorgenommen zum Zweck der in den Nachrichten 1870 S. 401 mitgetheilten Messungen. Die Intensität fand sich am letztgenannten Orte um 2,8 Procent grösser.

2) Ist zwischen den Beobachtungen an beiden Orten eine grössere Zeit verflossen, so ist die etwaige Veränderung des Stabmagnetismus zu berücksichtigen. Man beobachtet dann, ausser dem Ablenkungswinkel, die Schwingungsdauer des Rahmens mit den Magneten, nachdem man diese gleichgerichtet hat. Die Schwingungsdauern an beiden Orten mit t und t_1 bezeichnet, ist

$$\frac{T}{T_1} = \frac{t_1}{t}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi}}. \qquad (2.)$$

Hierbei ist angenommen, dass die Magnetis-

men der Stäbe M und m sich in gleichem Verhältniss geändert haben. Ohne diese Annahme ist noch die zweite Schwingungsdauer τ und τ_1 zu ermitteln, nachdem die kleineren Magnete um 180° gewendet sind. Dann hat man

$$\frac{T}{T_1} = \frac{t_1\ \tau_1}{t\ \ \tau}\sqrt{\frac{\text{tg.}\varphi_1}{\text{tg}\,\varphi}\ \frac{r^3(\tau^2+t^2)+2\,R^3\,(\tau^2-t^2)}{r^3(\tau_1{}^2+t_1{}^2)+2R^3(\tau_1{}^2-t_1{}^2)}}. \quad (3.)$$

Nach diesen Vorschriften wurde die Intensität in Zürich mit der in Göttingen verglichen und um 7,7 Procent grösser gefunden, was so gut wie genau mit den Lamont'schen Karten übereinstimmt. Das Verhältniss $\frac{m}{M}$ hatte sich nur um $\frac{1}{400}$ geändert, so dass die einfachere Formel (2.) bis auf $\frac{1}{2500}$ dasselbe Resultat lieferte.

3) Für eine absolute Bestimmung von T endlich ist es nothwendig, das Trägheitsmoment K und den Torsionscoefficienten des Aufhängefadens zu kennen. Nennen wir den letzteren im Verhältniss zu der erdmagnetischen Directionskraft bei gleich gerichteten Magneten Θ, so setzen wir $\Theta' = 2\,\Theta\,\frac{\tau^2}{t^2+\tau_2}$ und haben

$$T^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi^2\ K}{t^2\ \tau^2\ \text{tang}\ \varphi}\left(\frac{\tau^2+t^2}{R^3(1+\Theta')} + 2\,\frac{\tau^2-t^2}{r^3}\right). \quad (4.)$$

Eine solche Bestimmung habe ich in dem bereits erwähnten eisenfreien Pavillon des physikalischen Instituts am 14. August 1870 ausgeführt und $T = 1{,}840$ gefunden. Herr Riecke fand etwa ein Jahr früher an demselben Orte $T = 1{,}848$. Beide Werthe stimmen unter einander und mit den im Observatorium gefundenen

Werthen (1,8396 im August 1869) innerhalb der zu erwartenden Grenzen überein, so dass das neue Instrument allen Ansprüchen genügt, welche an ein transportabeles Magnetometer zur Intensitätsbestimmung gestellt werden können.

Der Preis des in der Werkstätte des Herrn Dr. Meyerstein ausgeführten Magnetometers stellt sich incl. eines leicht transportabelen Statives für die Ablenkungen und Schwingungsbeobachtungen auf gegen 50 Thaler.

Zürich, December 1870.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

1. März. № 2. 1871.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1871. Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Theologie des Alten Testaments: Professor *Bertheau* vierstündig Mont., Dienst., Donnerst., Freit. um 11 Uhr.

Erklärung der Genesis: Prof. *de Lagarde* fünfstündig um 10 Uhr,

Erklärung des Buchs des Propheten Jesaia: Professor *Bertheau* sechsstündig um 10 Uhr.

Theile des hebräischen Spruchbuchs erklärt Dr. *Hoffmann* zweistündig, öffentlich.

Hebräische Grammatik: Lic. *Wellhausen* dreistündig Dienst. Donnerst. Freit. um 6 Uhr.

Geschichte des V. Israel: *Derselbe* 4 St. um 11 Uhr.

Einleitung in das Neue Testament: Prof. *Wiesinger* viermal um 11 Uhr.

Leben Jesu Christi: Professor *Ehrenfeuchter* viermal, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. um 12 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Lünemann* sechsmal um 9 Uhr.

Erklärung des Römerbriefs: Lic. *Zahn* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Hebräerbriefs: Prof. *Ritschl* fünfstündig um 9 Uhr.

Kirchengeschichte: Prof. *Wagenmann* sechsstündig um 8 Uhr.

Kirchengeschichte I. Theil: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des XIX. Jahrhunderts: Professor *Wagenmann* dreistündig um 7 Uhr, öffentlich.

Dogmengeschichte: Prof. *Duncker* fünfmal um 11 Uhr und Sonnabends um 9 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Schöberlein* fünfmal um 4 Uhr; Prof. *Matthaei* zweimal, Donnerst. und Freit., um 2 Uhr.

Dogmatik I. Theil: Prof. *Ritschl* fünfmal um 8 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Schöberlein* fünfmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie II. Theil (Liturgik, Homiletik, Theorie der Seelsorge und Kirchenpolitik): Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal von 3—4 Uhr.

Praktische Theologie in ihren Grundzügen: Professor *Schöberlein* viermal um 5 Uhr.

Die Uebungen des Königl. Homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabends 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabends 3—4 Uhr; Prof. *Wiesinger* Mittwochs 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Professor *Schöberlein* Sonnabends 9—10 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang giebt *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

Eine dogmatische Societät leitet Prof. *Schöberlein* Freit. um 6 Uhr; eine historisch-theologische Prof. *Wagenmann* Freit. 6 Uhr.

Die exegetischen, kirchenhistorischen und systematischen Conversatorien im theologischen Stift werden in

gewöhnlicher Weise Montags Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.

Repetent *Zöpffel* wird zweistündig die Apostelgeschichte cursorisch und unentgeltlich erklären.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Francke* von 11—12 Uhr; Institutionen und Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Hartmann* zehnstündig von 10—11 und von 11—12 Uhr.

Pandekten, mit Ausnahme der Lehren über Eigenthum und Jura in re: Dr. *Enneccerus* täglich von 10—11 und von 11—12 Uhr.

Ueber Eigenthum und Jura in re: Prof. *Ribbentrop*, nach Arndts Lehrbuch der Pandekten, fünfmal wöch., von 12—1 Uhr, öffentlich.

Erbrecht: Prof. *Francke* von 8—9 Uhr.

Ein Exegeticum wird Prof. *Ribbentrop* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr halten nach einer den Herren Zuhörern mitzutheilenden gedruckten Chrestomathie.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöch. von 11—12 Uhr.

Deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehn-, Handels- und Wechselrechts: Prof. *Kraut* nach der vierten Ausgabe seines Grundrisses zu Vorlesungen über das deutsche Privatrecht u. s. w. nebst beigefügten Quellen. Göttingen 1855; Deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehnrechts: Prof. *Dove* fünfmal wöch. von 8—9 und von 9—10 Uhr; Deutsches Privatrecht nebst dem Lehn- und Handelsrechte: Prof. *Wolff* 12 Stunden von 7—8 und von 9—10 Uhr.

Handelsrecht: Prof. *Thöl* nach seinem Buche (das Handelsrecht, vierte Aufl.) fünfmal wöch. von 7—8 Uhr.

Preussisches Privatrecht: Dr. *Ziebarth* viermal wöch. von 8—9 Uhr.

Hannoversches Recht: Dr. *Grefe* fünfmal wöchentl. von 1—2 Uhr.

Deutsches Criminalrecht: Prof. *Zachariae* sechsstündig um 11 Uhr.

Gemeines deutsches Staatsrecht: Professor *Zachariae* sechsstündig um 12 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Frensdorff* dreimal wöch. von 12—1 Uhr.

Theorie des Civilprocesses: Prof. *Hartmann* sechsmal wöch. von 12—1 Uhr und zweimal zu einer andern passenden Stunde.

Pandectenpracticum: Prof. *Thöl* Mont. und Donnerst. von 4—5 und von 5—6 Uhr.

Processpracticum: Prof. *Briegleb* Dienst. und Freit. von 4—6 Uhr.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Anthropologie mit Benutzung der Blumenbach'schen Sammlung (auch für Nicht-Mediciner) trägt Dr. *Merkel* Montag, Mittwoch, Freitag von 4—5 Uhr vor.

Die Knochen- und Bänderlehre trägt Dr. *Merkel* Dienstag, Donnerstag, Sonnabend von 11—12 Uhr vor.

Systematische Anatomie II. Theil (Gefäss- und Nervenlehre): Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie: Prof. *Henle*, Montag, Mittwoch, Freitag von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatissime, Dr. *Merkel* wie bisher.

Mikroskopische Curse im pathologischen Institute hält Prof. *Krause* wie bisher für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 12 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* sechs Mal wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil (Physiologie der Ernährung): Prof. *Meissner* fünf Mal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Physiologie der Zeugung nebst allgemeiner und specieller Entwicklungsgeschichte: Prof. *Meissner*, Freitag von 5—7 Uhr.

Physiologische Optik s. S. 65.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie und Therapie: Prof. *Krause*, Montag und Donnerstag von 2—3 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit praktischen Uebungen lehrt Prof. *Krämer* Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr oder zu anderen gelegenen Stunden. Dasselbe trägt Dr. *Wiese* vier Mal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden vor.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel so wie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit pharmakognostischen Demonstrationen trägt Dr. *Husemann* fünfmal wöchentlich um 3 Uhr vor.

Arzneimittellehre und Receptirkunde in Verbindung mit Demonstrationen der Arzneimittel und ihrer physiologischen und toxischen Wirkung trägt Dr. *Marmé* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr vor.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Wiggers* fünfmal wöchentlich von 2—3 Uhr nach seinem Handbuche der Pharmakognosie. 5. Aufl. Göttingen 1864.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* sechsmal wöchentlich von 6—7 Uhr Morgens; Dasselbe lehrt Dr. *Stromeyer* privatissime.

Pharmaceutische Chemie und Organische Chemie für Mediciner: Vgl. Naturwissenschaften S. 66.

Praktische pharmakologische und toxikologische Uebungen leitet Dr. *Husemann* privatissime und gratis in später festzustellenden Stunden.

Ein pharmakologisches Practicum (Uebungen im Bestimmen und Verordnen der einfachen und zusammengesetzten Arzneimittel) hält Dr. *Marmé* Sonnabend von 3—5 Uhr privatissime und unentgeltlich.

Pharmakologische und toxikologische Untersuchungen leitet Dr. *Marmé* im physiologischen Institut zu passenden Stunden.

Elektrotherapie in Verbindung mit praktischen Uebungen in der Anwendung des Inductions- und des constanten Stroms lehrt Dr. *Marmé* Donnerstag und Freitag von 6—7 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich von 7—8 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von 10½—12 Uhr.

Chirurgie I. Theil: Prof. *Baum* fünf Mal wöchentlich von 4—5 Uhr, Sonnabend von 3—4 Uhr.

Specielle Chirurgie trägt Prof. *Lohmeyer* von 11—12 Uhr vor.

Ueber Knochenbrüche und Verrenkungen trägt Prof. *Baum* Mittwoch und Sonnabend von 2—3 Uhr publice vor.

Pathologie und Therapie der Augenkrankheiten lehrt Prof. *Schweigger* Montag, Dienstag, Donnerstag, von 3—4 Uhr.

Die Theorie des Augenspiegels trägt Prof. *Schweigger* publice am Freitag von 3—4 Uhr vor.

Die chirurgische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Baum* täglich um 9 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Schweigger* Montag, Dienstag, Donnerst. u. Freitag von 12—1 Uhr.

Uebungen in chirurgischen Operationen an der Leiche leitet Prof. *Baum* im Anatomiegebäude so oft Leichen vorhanden von 5 Uhr Nachm. an.

Praktische Uebungen im Gebrauch des Augenspiegels leitet Prof. *Schweigger* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Gynaekologie trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krämer* in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr.

Psychiatrische Klinik hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Sanitätspolizei lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 7—8 Uhr.

Die Lehre von den Krankheiten der Hausthiere in Verbindung mit klinischen Demonstrationen im Thier-

hospitale trägt Dr. *Luelfing* wöchentlich sechsmal von 7—8 Uhr vor.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie: Dr. *Stumpf*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Ausführliche Darstellung und Kritik der philosophischen Systeme von Kant an: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Logik verbunden mit Erklärung von Trendelenburgs elementa logices aristoteleae: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Logik: Prof. *Peip*, Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 7 Uhr früh.

Metaphysik: Prof. *Lotze* 4 St., 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. u. Donnerst. 11 Uhr.

Aesthetik: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Lotze*, 4 St., 4 Uhr.

Prof. *Baumann* wird in seiner philosophischen Societät aus Kants Kritik der reinen Vernunft den Abschnitt von der transcendentalen Logik behandeln, Freit. 6 Uhr.

Prof. *Peip* wird in seinen philosophischen Societäten Nachm. 5—6 Uhr am Donnerst. Anselms von Canterbury „Monol." und „Prosl.", am Freit. Desselben „Cur Deus homo" erklären.

Dr. *Peipers* wird in seiner Societät ausgewählte Abschnitte des aristotelischen Organons erklären Freitags von 6—8 Uhr.

Dr. *Stumpf* wird in seiner philosoph. Societät das 1. Buch der aristotelischen Metaphysik erklären.

Geschichte der Erziehung: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Dienst. 11 Uhr.

Mathematik und Astronomie.

Die Stereometrie mit der sphärischen Trigonometrie: Prof. *Ulrich*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 10 Uhr.

Praktische Geometrie mit Uebungen auf dem Felde: *derselbe* 4 mal wöch., von 5—7 Uhr.

Analytische Geometrie der Ebene: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Ausgewählte Capitel der höhern Geometrie: Prof. *Clebsch*, Mont. Donnerst. 11 Uhr.

Theorie der Zahlengleichungen: Prof. *Stern*, 4 St., 8 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Stern*, 5 St. 7 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof. *Enneper*, Mont. Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Functionen complexer Veränderlicher, insbesondere Elliptische Abelsche und Riemannsche Functionen: Prof. *Schering*, 4 St., 9 Uhr früh.

Ueber die Plueckerschen Complexe: Dr. *Klein*, 1 oder 2 St., unentgeltlich.

Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf mathematische Physik: Dr. *Minnigerode*, 4 St.

Ueber theoretische Optik: Dr. *Klein*, 4 St.

Uebungen über Gegenstände der neuern Algebra: Prof. *Clebsch*, Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Magnetische Uebungen: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math. physikalischen Seminars, Freit. 6 Uhr.

Zu mathematischen Uebungen über irgend einen Theil der Geometrie erbietet sich Dr. *Klein*.

Sphärische Astronomie: Prof. *Klinkerfues*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit. um 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet Prof. *Ulrich* die mathematischen Uebungen Mittw. 10 Uhr; trägt Prof. *Stern* über einige Eigenschaften der Kettenbrüche vor, Mittw. 8 Uhr; giebt Prof. *Klinkerfues* einmal wöch. Anleitung zu astronomischen Beobachtungen. — Vgl. Naturwissenschaften S. 66.

Naturwissenschaften.

Zoologie in übersichtlicher Darstellung des Gesammtgebietes: Prof. *Claus*, täglich, 7 Uhr.

Specielle Naturgeschichte der Säugethiere: *Derselbe*, Dienst. Donnerst. Sonnab., 11 Uhr.

Specielle Naturgeschichte der Vögel: *Derselbe*, Mont. Mittw. Freit., 11 Uhr.

Entwickelungsgeschichte der wirbellosen Thiere: Dr. *Grenacher*, 2 St., unentgeltlich.

Zoologische und mikroskopische Uebungen: Prof. *Claus*, zu gelegener Zeit.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Bartling*, 6 St. 7 Uhr. — Botanische Excursionen veranstaltet *derselbe* in bisheriger Weise, Demonstrationen im botanischen Garten hält er in passenden Stunden.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Grisebach*, 6 St., 7 Uhr, in Verbindung mit Excursionen und Demonstrationen lebender Pflanzen. — Ueber officinale Pflanzen: *derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit., 8 Uhr. — Praktische Uebungen in der systematischen Botanik: *derselbe*, Mittw. 10 Uhr.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Lantzius-Beninga*, 6 St. wöch. Morgens 7 Uhr. — Medicinische Botanik: *derselbe*, 5 St. wöch. Morgens 8 Uhr, oder zu andern passenden Stunden. — *Derselbe* wird ein Repetitorium über allgemeine und medicinische Botanik halten und Excursionen, Demonstrationen, so wie praktische Uebungen im Zergliedern und Bestimmen der Pflanzen anstellen. — Er ertheilt auch Privatissima.

Mineralogie: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, 4 St. 11 Uhr. Das mineralogische Practicum hält *derselbe* wie bisher Donnerst. Nachmittag 2—4 Uhr und Sonnab. Vormittag 9—12 Uhr.

Geognosie: Prof. *von Seebach*, 5 St. 8 Uhr, verbunden mit Excursionen.

Petrographische und palaeontologische Uebungen leitet *derselbe* privatissime, aber unentgeltlich, in gewohnter Weise.

Physik, ersten Theil, trägt Prof. *Weber* vor, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 5—6 Uhr.

Optik, einschliesslich der Krystalloptik: Prof. *Listing*, 4 St. um 12 Uhr.

Ueber das Auge und das Mikroskop: Prof. *Listing*, privatissime in bequemen Stunden.

Uebungen in der praktischen Physik: Prof. *Listing*, Sonnab. 10—12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing* Mittwoch um 11 Uhr. Vgl. Mathematik S. 64.

Mathematische Physik, Theoretische Optik: vgl. Mathematik S. 64.

Chemie: Prof. *Wöhler*, 6 St. 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Donnerst. 12 Uhr. — Organische Chemie, speciell für Mediciner: Prof. *von Uslar*, in später zu bestimmenden Stunden.

Organische Experimentalchemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 St., 8 Uhr.

Analytische Reaktionen der organischen Chemie: Dr. *Tollens*, 1 St., 8 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Freitag 12 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, 4 St., 4 Uhr.

Die Vorlesungen über Pharmacie und Pharmacognosie s. unter Medicin S. 6.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Wicke* leitet die chemischen Uebungen für die Studirenden der Landwirthschaft.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) 8—12 und 3—5 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Alte Länder- und Völkerkunde: Prof. *Wachsmuth*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 12 Uhr.

Entdeckungsgeschichte und Geographie von Amerika: Prof. *Wappäus*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit. 12 Uhr.

Allgemeine Geschichte des Mittelalters: Prof. *Pauli*, 4 St., 5 Uhr.

Geschichte der grösseren Staaten Europas im 14. und 15. Jahrhundert: Dr. *Steindorff*, Dienst. Donnerst. Freit., 9 Uhr.

Allgemeine Geschichte im Reformationszeitalter: Prof. *Droysen*, 3 St., 10 Uhr.

Geschichte der Neuzeit vom Westphälischen Frieden bis zum Tode Friedrichs des Grossen: Prof. *Pauli*, 4 St., 9 Uhr.

Neueste deutsche Geschichte seit 1806: Prof. *Waitz*, 4 St., 4 Uhr.

Geschichte der Freiheitskriege: Prof. *Droysen*, Donnerst. 5 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, ein- oder zweimal, um 6 Uhr öffentlich. Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, 1 St., öffentlich. Historische Uebungen leitet Prof. *Droysen*, einmal, privatissime. Historische Uebungen leitet Dr. *Steindorff*, in zu verabredender Stunde, unentgeltlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth*, 1 St., öffentlich.

Kirchengeschichte: s. unter Theologie S. 58.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Encyclopädie der Staatswissenschaft: Dr. *Dede*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 12 Uhr.

Politik: Prof. *Waitz*, 4 St., 8 Uhr.

Nationalökonomie (Volkswirthschaftslehre): Prof. *Hanssen*, 5 St., 3 Uhr.

Statistik der Volkswirthschaft nach der vergleichenden Methode: Prof. *Hanssen*, 4 St., 9 Uhr.

Einleitung in die Bevölkerungsstatistik: Prof. *Wappäus*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Geschichte des Handels und Gewerbfleisses im Deutschen Reiche: Dr. *Dede*, Sonnabends 12 Uhr, unentgeltl.

Ackerbaulehre, allgemeiner und specieller Theil: Prof. *Drechsler*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Die Theorie der Organisation der Landgüter: Prof. *Griepenkerl*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre: *derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Die Ackerbausysteme *derselbe*, in 2 passenden Stunden, öffentlich.

Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Ueber Heuwerth und Futtermischung: Prof. *Henneberg*, Mittw. 11–1 Uhr, öffentlich.

Landwirthschaftliches Practicum: Prof. *Drechsler*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Chemische Uebungen: s. unter Naturwissenschaften S. 66.

Krankheiten der Hausthiere: s. Medicin S. 62 f.

Literärgeschichte.

Literaturgeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur: Prof. *Schweiger*, 4 St.

Geschichte der Philosophie: vgl. Philosophie S. 63.

Geschichte der dramatischen Kunst bei Griechen und Römern: Prof. *von Leutsch*, 4 St., 10 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung seit Opitz: Assessor *Tittmann*, 5 St., 11 Uhr.

Alterthumskunde.

Die griechische Götterlehre vortragen und Hesiod's Theogonie erklären wird Prof. *Wieseler*, 4 St., 8 Uhr, und (für die Zuhörer dieser Vorlesung unentgeltlich) die Götter- und Heroenbilder der K. Gypssammlung erläutern, ein oder zweimal wöch., Mittw. 5 Uhr und zu einer andern passenden Stunde.

Griechische Kunstgeschichte: Dr. *Matz*, 4 St., 10 Uhr.

Ueber Pompeii und Herculaneum: Dr. *Hirschfeld*, Mont. u. Donnerst., 8 Uhr.

Die Uebungen im K. archäologischen Seminar leitet Prof. *Wieseler* öffentlich wie bisher.

Die Abhandlungen der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen, wie bisher.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament s. unter Theologie S. 57.

Arabische Grammatik (nach C. P. Caspari's arabischer Grammatik, 3. Aufl.) und Lectüre: Dr. *Hoffmann*, 3 St.

Ausgewählte Stücke aus arabischen Schriftstellern erklärt Prof. *Wüstenfeld*.

Die Makamen des Hariri erklärt Prof. *de Lagarde*, Mont. u. Donnerst., öffentlich.

Syrische Schriftstücke, zunächst aus G. Knös' chrestom. Syr. (Gött. 1807) erklärt Dr. *Hoffmann*, 2 St., unentgeltlich.

Unterricht in der aethiopischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, öffentlich.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Mittw. und Freit., 4 Uhr.

Erklärung von Sanskritgedichten: Prof. *Benfey*, Mont. u. Donnerst., 5 Uhr.

Zend: Prof. *Benfey*, Dienst. u. Freit., 5 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Gesch. der dramat. Poesie bei den Griechen und Römern: s. Literaturgeschichte S. 68.

Hesiod's Theogonie: vgl. Alterthumskunde S. 68.

Kleinere griechische Lyriker: Prof. *Krüger*, Mittwoch 8 Uhr, öffentlich.

Aeschylos Perser: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 9 Uhr.

Aristoteles Politik: Prof. *Wachsmuth*, Mont. u. Donnerst., 5 Uhr.

Aristoteles Metaphysik: vgl. Philosophie S. 63.

Ueber lateinischen Stil, mit praktischen Uebungen: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 7 Uhr früh.

Reden des Livius: Prof. *von Leutsch*, 4 St., 4 Uhr.

Ciceros Verrinen II, 2: Dr. *Hirschfeld*, Dienstag und Freitag 8 Uhr, unentgeltlich.

Im K. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Wachsmuth*, Mittw. 11 Uhr, lässt griechische Elegiker erklären Prof. *von Leutsch*, Mont. und Dienst., 11 Uhr, lässt Lucretius Buch 1. Prof. *Sauppe* erklären, Donnerst. und Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *v. Leutsch*, *Sauppe* und *Wachsmuth*, Mittwoch 9 und 2 Uhr, Sonnabend 11

Uhr; lässt griechische Elegiker Prof. *v. Leutsch*, Mittw. 9 Uhr, Lucretius Buch 2. Prof. *Sauppe*, Mittw. 2 Uhr, erklären, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Abriss der gotischen Grammatik und Erklärung des Ulfilas: Dr. *Wilken*, Mittw. u. Sonnab., 2 Uhr.

Historische Grammatik der deutschen Sprache: Prof. *Wilh. Müller*, 5 St., 3 Uhr.

Die Gedichte Walthers von der Vogelweide erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Mont. Dienst. Donnerst. 10 Uhr.

Gregorius des Hartmann von Aue erklärt Dr. *Wilken*, 2 St., unentgeltlich.

Geschichte der deutschen Literatur: vgl. Literärgeschichte S. 68.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*.

Neuere Sprachen.

Grammatik der englischen Sprache lehrt in Verbindung mit praktischen Uebungen Prof. *Theod. Müller*, Donnerst. Freit. u. Sonnab., 12 Uhr.

Ausgewählte provenzalische Dichtungen nach Bartsch's Chrestomathie erläutert *derselbe*, Mont. 9 Uhr, öffentlich.

Corneille's Cid erklärt in französischer Sprache *derselbe*, Dienst. u. Freit., 9 Uhr.

Französische Schreib- und Sprechübungen veranstaltet *derselbe*, Mont. Dienst. u. Mittw. 12 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ueber Kirchenbaukunst: Prof. *Unger*, Donnerst. 6 Uhr, öffentlich.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape*, und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der Musik: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille* in passenden Stunden.

Derselbe ladet zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitschule der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. Sonnab., Morgens von 7—11 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Das *zoologische* und *ethnographische Museum* ist Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *geognostisch-paläontologische Sammlung* ist Mittw. von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *Gemäldesammlung* ist Donnerstag von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 5—7 Uhr geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-*

paläontologischen Sammlung, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

8. März. № 3. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. März.

Listing, über das Huyghens'sche Ocular.
Wicke, über den Malden-Phosphorit.
Derselbe, Versuche des Dr. Wagner über das Verhalten der Phosphorsäure im Erdboden.
Clebsch: F. Klein, über einen Satz aus der Theorie der Linien-Complexe.
Clebsch: Bemerkungen zu der Theorie der Gleichungen 5. oder 6. Grades.

Ueber einen Satz aus der Theorie der Linien-Complexe, welcher dem Dupin'schen Theorem analog ist.

Von **Felix Klein**.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Bei der Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche [1]) hat sich gezeigt, dass diese Curven in einem unmittelbaren Zusammenhange mit den Complexen zweiten Grades stehen, deren Singularitätenfläche die

1) vgl. die Arbeit von Herrn Lie und mir: »Ueber die Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche«, Monatsberichte der Berliner Akademie, December 1870; so wie eine Notiz von mir in diesen Nachrichten, 1871. Nr. 1.

Kummer'sche Fläche ist. Im Folgenden will ich nun ein allgemeines Theorem aufstellen, betreffend eine Beziehung zwischen Linien-Complexen und Haupttangenten-Curven, unter welches sich die Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche subsumirt.

Seien zunächst zwei Complexe und eine ihnen gemeinsame Gerade gegeben. In einer beliebig durch die letztere hindurchgelegten Ebene befinden sich zwei bez. den beiden Complexen angehörige Complex-Curven und diese berühren die gegebene Gerade je in einem Punkte. Man betrachte den einen Berührungspunkt als dem anderen entsprechend. Lässt man sich die angenommene Ebene um die gerade Linie drehen, so erhält man daraus ein lineares Entsprechen zwischen zwei auf der Geraden befindlichen Punktreihen. Die beiden Complexe sollen nun mit Bezug auf die gegebene gerade Linie in Involution heissen, wenn die Beziehung zwischen diesen Punktreihen die involutorische ist.

Analytisch drückt sich dies, wie ich hier ohne Beweis angebe, folgendermassen aus [1]). Die Linien-Coordinaten $x_1, \ldots x_6$ mögen so gewählt sein, dass die Summe ihrer Quadrate identisch verschwindet. Die beiden gegebenen Complexe seien $A = 0$, $B = 0$; sie liegen mit Bezug auf eine gemeinsame gerade Linie in Involution, wenn für diese Linie $\Sigma \frac{dA}{dx_\alpha} \cdot \frac{dB}{dx_\alpha}$ verschwindet.

1) Hier und im Folgenden verweise ich auf die beiden Arbeiten: »Zur Theorie der Linien-Complexe ersten und zweiten Grades« und »die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinaten«, Math. Ann. t. II.

Diese Definition vorausgesetzt, ist nun der Satz, um den es sich hier handelt, der folgende:

Wenn vier Complexe mit Bezug auf eine gemeinsame gerade Linie (p) paarweise in Involution liegen, wenn ferner je drei derselben mit Bezug auf die ihnen gemeinsame nächstfolgende gerade Linie ebenfalls paarweise in Involution sind, so berührt die dreien der Complexe gemeinsame Linienfläche die Brennfläche desjenigen Strahlensystem's, das zweien dieser drei Complexe angehört, in der Nähe von (p) nach der Richtung einer Haupttangenten-Curve.

Der hiermit ausgesprochene Satz hat seiner Form nach eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Dupin'schen Theorem über Krümmungs-Curven, wenn man das letztere so ausspricht, wie dies beispielsweise in Salmon's Raumgeometrie (II, p. 51 der Uebersetzung von Fiedler) geschieht. Diese Aehnlichkeit entspricht dem Wesen der Sache; ich werde hier einen solchen Beweis für den aufgestellten Satz geben, der dem in Salmon's Raumgeometrie mitgetheilten Beweise des Dupin'schen Theorem's genau nachgebildet ist, und aus dem sich ergibt, dass der Satz eine Erweiterung des Dupin'schen Theorem's von 3 Variabeln auf 4 ist.

Ueberhaupt ist, wie an einem anderen Orte ausführlicher dargelegt werden soll, die Linien-Geometrie aequivalent mit der metrischen Geometrie für 4 Variable. Diese Behauptung findet ihren einfachsten Ausdruck in der sogleich zu gebrauchenden Coordinatenbestimmung, vermöge derer das Moment zweier gerader Linien sich darstellt wie die Entfernung

zweier Punkte und die Bedingung für die involutorische Lage zweier Complexe wie die Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen. Zu dieser Beziehung zwischen metrischer Geometrie und Linien-Geometrie, insbesondere auch zu der Aufstellung des hier in Rede stehenden Theorem's, bin ich durch weiteren Verfolg eines Gedankenganges gekommen, der Herrn Lie angehört. Herr Lie hat nämlich, wie dies beiläufig auch in der vorstehend citirten Arbeit: »Ueber die Haupttangenten-Curven u. s. w.« auseinandergesetzt ist, gefunden, dass zwischen der Geometrie eines linearen Complexes und der metrischen Geometrie bei drei Variabeln ein vollständiger Parallelismus Statt hat, der darauf zurückkommt, dass man die Linien eines linearen Complexes in der Art eindeutig auf die Punkte des Raumes beziehen kann, dass dabei der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis als fundamentales Gebilde auftritt [1]). Dabei entsprechen sich, wie Herr Lie fand, die Krümmungs-Curven im metrischen Raume und die Haupttangenten-Curven im Raume des linearen Complexes in einer gewissen Weise.

Man kann sich nun die Frage vorlegen: Was bedeutet für den linearen Complex das auf den metrischen Raum bezügliche Dupin'sche Theorem? Die Antwort auf diese Frage ist eben der hier aufgestellte Satz, nur nicht in seiner allgemeinsten Form, sondern mit der Beschränkung, dass einer der vier Complexe, von denen in demselben die Rede ist, ein linearer ist. Es ist nicht schwer, von dieser besonderen Annahme zu dem

---

1) Herr Lie hat diese Beziehungen ausführlicher in einer demnächst in den Berichten der Akademie zu Christiania erscheinenden Abhandlung auseinandergesetzt.

allgemeinen Satze überzugehen; der Wunsch, einen unmittelbareren Beweis zu haben, führte mich zu der Aufstellung des im Nachstehenden benutzten Coordinatensystems und dieses zu der oben hervorgehobenen Analogie zwischen Linien-Geometrie und metrischer Geometrie bei vier Variabeln.

Ich wende mich jetzt zu dem Beweise des aufgestellten Theorem's.

Die vier gegebenen Complexe mögen heissen:

(1) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \varphi_4 = 0,$

die ihnen gemeinsame gerade Linie, in Bezug auf welche sie paarweise in Involution liegen, sei p; ihre (Complex-) Gleichung ist $p = 0$. Aus der einfach unendlichen Schaar der linearen Tangential-Complexe von φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 mit Bezug auf p wähle man je einen aus; dieselben heissen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Endlich möge $q = 0$ diejenige gerade Linie sein, welche den vier Complexen noch ausser p gemeinsam ist. Die sechs linearen Ausdrücke x_1, x_2, x_3, x_4, p, q lege ich im Folgenden als Linien-Coordinaten zu Grunde. Wegen der zwischen den betreffenden linearen Complexen bestehenden Beziehungen schreibt sich die für diese Linien-Coordinaten geltende Identität bei passender Wahl von Multiplicatoren unter der folgenden Form:

(2) $0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2pq.$

Fortan werde ich $q = +1$ setzen, dann ist:

(3) $-2p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$

p drückt sich mithin rational und ganz durch die x aus. Es ist also gestattet, in allen Gleichungen, welche vorkommen, p durch die x zu ersetzen und die x als

die einzigen und dann unabhängigen Veränderlichen zu betrachten.

Seien unter dieser Voraussetzung $A = 0$, $B = 0$ die Gleichungen zweier Complexe, so ist die Bedingung dafür, dass dieselben mit Bezug auf eine gemeinsame Linie in Involution liegen,

$$(4)\ \frac{dA}{dx_1}\cdot\frac{dB}{dx_1}+\frac{dA}{dx_2}\cdot\frac{dB}{dx_2}+\frac{dA}{dx_3}\cdot\frac{dB}{dx_3}+\frac{dA}{dx_4}\cdot\frac{dB}{dx_4}=0,$$

was der Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen im Raume von vier Dimensionen entspricht. Die Bedingung für die Involution ist nämlich ursprünglich:

$$\Sigma\,\frac{dA}{dx_\alpha}\cdot\frac{dB}{dx_\alpha}+\frac{dA}{dp}\cdot\frac{dB}{dq}+\frac{dA}{dq}\cdot\frac{dB}{dp}=0,$$

da aber A und B nach Voraussetzung kein p mehr enthalten, so fallen die Glieder mit $\frac{dA}{dp}$, $\frac{dB}{dp}$ fort und man erhält die vorstehende Bedingung (4) [1].

Die Gleichungen der 4 gegebenen Complexe (1) erhalten nun die folgende Form:

$$(5)\quad 0=\varphi_1=2x_1+\Omega_1(x_1, x_2, x_3, x_4)+\ldots,$$
u. s. w.,

wo Ω eine homogene Function zweiten Grades der x ist und die nicht hingeschriebenen Glieder

1) Auf ähnliche Weise erhält man für das Moment zweier Geraden $(x_1, x_2, x_3, x_4, p, q)$ und $(y_1, y_2, y_3, y_4, p^1, q^1)$, welches ursprünglich

$$= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)+pq^1+p^1q$$

ist, durch Einsetzung der Werthe für p und q:

$$= -\tfrac{1}{2}[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2+(x_4-y_4)^2].$$

aus homogenen Functionen höheren Grades derselben Argumente bestehen.

Die Form von (5) sagt erst aus, dass die vier Complexe mit Bezug auf die gemeinsame Gerade p paarweise in Involution liegen; sollen dieselben zu je drei auch mit Bezug auf die ihnen angehörige nächstfolgende Gerade paarweise in Involution sein, so particularisirt das die Form der Ω. Man findet nämlich, dass die Ω dann nur die Quadrate der x enthalten dürfen, so dass also:

$$(6)\quad \begin{array}{l} 0=\varphi_1=2x_1+(a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2)+\dots \\ 0=\varphi_2=2x_2+(b_1x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2+b_4x_4^2)+\dots \\ \text{u. s. f.} \end{array}$$

die Gleichungen der vier gegebenen Complexe werden.

Betrachten wir jetzt die Congruenz, welche zweien der vier Complexe, etwa φ_1 und φ_2, gemeinsam ist. Dieselbe besitzt eine Brennfläche und diese wird von p in zwei Punkten (den Doppelpunkten des auf p befindlichen, zu φ_1 und φ_2 gehörigen, involutorischen Punktsystem's) berührt. Sei a einer dieser Berührungspunkte. Jetzt möge p in eine benachbarte Lage übergehen, doch in der Art, dass es nach wie vor den beiden Complexen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ angehört. Dann ist p Doppeltangente der Brennfläche geblieben; der Berührungspunkt a ist in einen benachbarten Berührungspunkt übergegangen. Soll dieser Punkt in der Richtung einer der beiden in a die Brennfläche berührenden Haupttangenten liegen, so muss die Tangentialebene in ihm, auch wenn man auf Grössen erster Ordnung Rücksicht nimmt, durch a hindurchgehen. Mit anderen Worten: das Büschel der in a und das Büschel der in dem benachbar-

ten Punkte die Fläche berührenden Tangenten müssen, auch wenn man auf Grössen erster Ordnung Rücksicht nimmt, eine Gerade gemein haben. Dies werde ich analytisch ausdrücken; in der Form der betreffenden Gleichung liegt dann unmittelbar der Beweis des aufgestellten Theorem's.

Beiläufig sei bemerkt, dass aus bekannten allgemeinen Eigenschaften der Strahlensysteme folgt, dass, wenn der Berührungspunkt a auf einer Haupttangente der Brennfläche fortrückt, dieses auch mit dem zweiten Berührungspunkte der Brennfläche mit der Linie p der Fall ist.

Die Linie p hat bei unserer Coordinatenwahl die Coordinaten:

x_1	x_2	x_3	x_4	p	q
0	0	0	0	0	1

Für eine benachbarte Linie ist wegen (3) $dp = 0$; sie hat also die Coordinaten:

$$dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 \quad dx_4 \quad 0 \quad 1,$$

wo dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 völlig unabhängig sind. Soll die benachbarte Linie, wie hier vorausgesetzt, den Complexen φ_1, φ_2 angehören, so ist dx_1 und dx_2 gleich Null. Die genannte Bedingung also: dass die beiden Tangentenbüschel eine Gerade gemein haben, wird eine Gleichung zwischen dx_3 und dx_4. Der Beweis für das aufgestellte Theorem liegt nun darin, dass diese Gleichung die Form annimmt:

$$dx_3 \,.\, dx_4 = 0,$$

wie jetzt gezeigt werden soll.

Zunächst, um auszudrücken, dass zwei Geradenbüschel eine Gerade gemein haben, wähle

man zwei Gerade aus beiden Büscheln aus. Die Bedingung ist die, dass die aus beliebigen vier der Coordinaten der vier geraden Linien zusammengesetzten Determinanten verschwinden.

Von dem Büschel der in a die Brennfläche berührenden Tangenten kennt man aber eine gerade Linie; das ist p selbst, dessen Coordinaten, wie schon angegeben, sind:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1.$$

Ferner findet sich unter denselben jedesmal eine Directrix der Congruenz, welche irgend zweien auf p bezüglichen linearen Tangential-Complexen von φ_1 und φ_2 gemeinsam ist. Nehmen wir für die beiden Tangential-Complexe $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, so erhält die Directrix die Coordinaten:

$$1, \quad i, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0.$$

In dem zweiten (benachbarten) Büschel enthalten ist zunächst die zu p benachbarte Linie mit den Coordinaten:

$$0, \quad 0, \quad dx_3, \quad dx_4, \quad 0, \quad 1,$$

sodann wieder eine Directrix jeder Congruenz, die irgend zwei auf diese Linie bezüglichen linearen Tangential-Complexen von φ_1 und φ_2 gemeinsam ist. Für solche zwei Complexe findet man aus (6) unmittelbar die folgenden:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + \;.\; + a_3\, dx_3 \,.\, x_3 + a_4\, dx_4 \,.\, x_4, \\ 0 &= \;.\; + x_2 + b_3\, dx_3 \,.\, x_3 + b_4\, dx_4 \,.\, x_4. \end{aligned}$$

Eine Directrix der diesen beiden Complexen gemeinsamen Congruenz hat zu Coordinaten:

$$1, \quad i, \quad (a_3 + ib_3)\, dx_3, \quad (a_4 + ib_4)\, dx_4, \quad 0, \quad 0.$$

Die aus den Coordinaten der aufgezählten vier geraden Linien gebildeten viergliedrigen Determinanten sollen verschwinden. Vereinigt man dieselben in ein rechtwinkliges Schema, so kann man dasselbe auf die folgende Form reduciren:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx_3 & dx_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_3 + ib_3) dx_3 & (a_4 + ib_4) dx_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Damit die aus diesem Schema gebildeten Determinanten sämmtlich verschwinden, muss offenbar sein:

$$dx_3 . dx_4 = 0,$$

womit der Beweis unseres Theorem's geführt ist.

Diese Gleichung sagt nämlich aus: damit der Berührugspunkt a und also auch der zweite Berührungspunkt von p mit der Brennfläche bei einer infinitesimalen Verschiebung von p auf einer Haupttangente der Brennfläche fortrücke, muss diese Verschiebung so geschehen, dass dx_3 oder dx_4 gleich Null ist, d. h. dass p in der benachbarten Lage nicht nur, wie selbstverständlich, den Complexen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ sondern auch einem der beiden Complexe $\varphi_3 = 0$ oder $\varphi_4 = 0$ angehöre. Mit anderen Worten: die Linienfläche, welche $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ oder $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_4 = 0$ gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der Congruenz $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ in der Nähe von p nach der Richtung einer Haupttangenten-Curve, was das aufgestellte Theorem war.

Es mag jetzt ein System von unendlich vie-

len Complexen gegeben sein, welches von einem Parameter λ abhängt, der bis zur vierten Potenz vorkommt:

$$\varphi + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \lambda^3\varphi_3 + \lambda^4\varphi_4 = 0.$$

Eine beliebige gerade Linie gehört vieren der Complexe des Systems an. Das System soll nun so beschaffen sein, dass diese vier Complexe jedesmal mit Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution sind *). Dann gibt das aufgestellte Theorem durch Uebergang vom Unendlich-Kleinen zum Endlichen den Satz:

Die Linienfläche, welche dreien der Complexe des System's gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der zweien dieser drei Complexe gemeinsamen Congruenz nach einer Haupttangenten-Curve.

Hiernach kennt man die Haupttangenten-Curven auf den Brennflächen der Congruenzen je zweier der Complexe des Systems.

Aber auch die Haupttangenten-Curven auf den je dreien der Complexe gemeinsamen Linienflächen bestimmen sich ohne Weiteres. Die Berührungs-Curven einer solchen Linienfläche mit den Brennflächen der zweien der drei Complexe gemeinsamen Congruenzen sind nämlich auch Haupttangenten-Curven der Linienfläche, da überhaupt, wenn zwei Flächen sich nach einer Haupttangenten-Curve berühren, diese Curve für beide Haupttangenten-Curve ist. Diese drei

*) Ein solches Complex-System entspricht bei 4 Variabeln einem Orthogonalflächensysteme bei 3 Variabeln. Die allgemeinen Eigenschaften der letzteren (cf. Darboux, Recherches sur les Surfaces orthogonales. Ann. de l'Ecole Normale Supérieure t. II.) finden bei den Complexsystemen ihre Analoga.

Haupttangenten-Curven schneiden die Erzeugenden der Linienfläche in drei Punktepaaren. Da nun die Erzeugenden einer Linienfläche von den Haupttangenten-Curven derselben projectivisch getheilt werden *), so ist die Bestimmung der übrigen Haupttangenten-Curven der Fläche im vorliegenden Falle auf rein algebraische Operationen zurückgeführt. Zugleich ergibt sich, dass die drei Punktepaare, die auf jeder Erzeugenden festgelegt wurden, 6 festen Elementen projectivisch sein müssen. In der That findet man, dass jedes Paar zu jedem anderen harmonisch ist.

Die hiermit ausgesprochenen Sätze finden ihre Stelle insbesondere bei den Complexen zweiten Grades, die eine selbe Singularitätenfläche besitzen. Das von ihnen gebildete System hat nämlich gerade die Eigenschaft: dass eine beliebige gerade Linie vieren der Complexe angehört, und dass diese Complexe mit Bezug auf die Gerade in Involution liegen. Für die Complexe zweiten Grades, welche eine Kummersche Fläche zur Singularitätenfläche haben, kann man dies aus den diese Nachrichten 1871 Nr. 1 mitgetheilten Formeln unmittelbar entnehmen. Der Nachweis für die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes, den ich hier der Kürze wegen nicht ausführe, entspricht übrigens ganz dem Gange, den man einschlägt, um zu zeigen, dass confocale Flächen zweiten Grades sich senkrecht schneiden.

Sei nun ein solches System von Complexen zweiten Grades gegeben. Zwei demselben angehörige Complexe bestimmen eine Congruenz, deren Brennfläche im Allgemeinen von der 16ten Ordnung und Classe ist. Auf diesen Brennflä-

*) Dieser Satz ist, so viel ich weiss, zuerst von Herrn Paul Serret ausgesprochen worden.

chen kennt man nach dem aufgestellten Theoreme die Haupttangenten-Curven; es werden algebraische Curven von der 32ten Ordnung und Classe. Dieselben sind die Berührungs-Curven mit den je dreien der Complexe angehörigen Linienflächen, die im Allgemeinen auch von der 16ten Ordnung und Classe sind. Auf diesen Linienflächen kann man nach dem Obigen ebenfalls durch algebraische Operationen die Haupttangenten-Curven bestimmen.

Durch passende Particularisationen erhält man hieraus die Bestimmung der Haupttangenten-Curven auf einer grossen Zahl von besonderen Flächen. Hier sei nur eine solche Particularisation erwähnt. Die beiden Complexe des System's, welche miteinander die Congruenz und durch diese die Brennfläche bestimmen, mögen unendlich wenig von einander verschieden sein. Dann wird die Congruenz die Congruenz der singulären Linien desjenigen Complexes, in welchen die beiden zusammengefallen sind. Ihre Brennfläche zerfällt in die allen Complexen gemeinsame Singularitätenfläche, die von der vierten Ordnung und Classe ist, und eine weitere Fläche von der 12ten Ordnung und Classe. Auf beiden erhält man die Haupttangenten-Curven. Nun ist für die allgemeinen Complexe zweiten Grades die Singularitätenfläche eine Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. Man erhält also eine Bestimmung der Haupttangenten-Curven dieser Fläche und zwar eine solche, die sich unmittelbar in diejenige überführen lässt, welche Herr Lie und ich in der im Eingange citirten Arbeit auseinandergesetzt haben.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Januar, Februar und März 1871.

Nature. Nr. 57—61.
Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. 1870. II. Heft 1. 2.
Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. August, September und October 1870.
Paul Niemeyer, Handbuch der theoretischen u. clinischen Percussion u. Auscultation, vom historischen u. critischen Standpuncte bearbeitet. Bd. II. Abth. 2. Erlangen 1871. 8.
Jahrbücher der königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. Neue Folge. Heft VI. Erfurt 1870. 8.
Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. 1. Januar 1869 — Ende Januar 1870. Prag 1870. 8.
Dritter Jahresbericht des akademischen Lesevereins an der k. k. Universität u. steierm. landsch. technischen Hochschule in Graz im Vereinsjahre 1870. Graz 1870. 8.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft herausg. v. A. Auwers u. A. Winnecke. Jahrg. V. Heft 4. October 1870. Leipzig 1870. 8.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 10. 1870.
C. Rammelsberg, die chemische Natur der Meteoriten. Berlin 1870. 4.
Verhandelingen der kon. Aademie van Wetenschappen. Afdeeling Letterkunde. Deel V. Amsterdam 1870. 4.

Verslagen en Mededeelingen der kon. Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. 2de Reeks. Deel IV.

— Afdeeling Letterkunde. Deel XII. Ebd. 1869. 70. 8.

Jaarboek van de kon. Akademie van Wetenschappen. 1869. Ebd. 1869. 8.

P. Esseiva, Urania. Ebd. 1870. 8.

Processen-Verbaal. Nr. 1—10. Ebd. 1870. 8.

G. van der Mensbrugghe sur un principe de statique moléculaire, avancé par M. Lüdtge. Bruxelles 1870. 8.

H. v. Schlagintweit-Sakünlünski, Reisen in Indien u. Hochasien. Bd. II. Jena 1871. 8.

Neues Lausitzisches Magazin, herausg. von E. E. Struve. Bd. 47. Heft 2. Görlitz 1870. 8.

Nature. Nr. 62—64. 66.

E. Becker, Tafeln der Amphitrite mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars. Publication der Astronomischen Gesellschaft. X. Leipzig 1870. 4.

Reports on experiments made with the Bashforth chronograph to determine the resistance of the air to the motion of projectiles. 1865—70. London. 8.

9. Jahresbericht des Akademischen Lesevereins in Wien über das Vereinsjahr 1869—70. Wien 1870. 8.

11. Plenar-Versammlung der historischen Commission bei der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Bericht des Secretariats. 4.

C. Marignac, recherches sur les chaleurs spécifiques, les densités et les dilatations de quelques dissolutions. 8.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. November 1870.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 11. 1870.

R. Clausius, über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien. Bonn 1870. 8.

Jahrbuch der geologischen Reichsanstalt. Bd. XX. October, November, December. Wien 1870. 8.

Verhandlungen der geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1870. Nr. 13—18. Wien. 8.

C. Naumann, Elemente der Mineralogie. 8. Auflage. Leipzig 1871. 8.

Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich. Redigirt von Dr. R. Wolf. Jahrg. 14. Heft 1—4. Zürich 1869. 8.

Dr. Ad. Dronke: Julius Plücker, Prof. der Mathematik u. Physik an der Rhein. Friedrich Wilhelms-Universität in Bonn. Bonn 1871. 8.

Jacut's geographisches Wörterbuch, herausg. von F. Wüstenfeld. Bd. VI. Abth. 1. Leipzig 1870. 8.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Dec. 1870. Berlin 1870. 8.

Archivio per l'antropologia e la etnologia, pubblicato per la parte antropologica dal Dr. Paolo Mantegazza, per la parte etnologica dal Dr. F. Finzi. Vol. I. fasc. 1. Firenze 1871. 8.

A. Preudhomme de Borre, considérations sur la classifications et la distribution géographique de la famille des Cicindélètes. 8.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 12. 1870.

Beleuchtung des von Prof. Max v. Pettenkofer über das Canalisations-Project zu Frankfurt a. M. den städtischen Behörden am 24. Sept. 1870 überreichten Gutachtens. Frankfurt a. M. 1871.

Nature. Nr. 67. 69.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

15. März. №. 4. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. März.

Ueber das Huyghens'sche Ocular.

Von

J. B. Listing.

Die gegenwärtige Mittheilung bezweckt die obwohl elementäre doch noch nicht im Detail durchgeführte Erörterung der dioptrischen Cardinalpunkte des sog. Huyghens'schen Oculars, welches einen der frequentesten Bestandtheile sowohl des Fernrohrs als des Mikroskops bildet, und sogar in dem vier- oder fünfglasigen terrestrischen Ocular wesentlich in den beiden letzten Linsen wiedergefunden wird. Dasselbe wird zuweilen unter der Benennung „negatives" Ocular dem „positiven" oder Ramsden'schen gegenübergestellt. Diese Unterscheidung bezieht sich aber nicht etwa auf das Vorzeichen der äquivalenten Brennweite, welche bei beiden positiv ist, während sie bekanntlich nur bei dem Ocular des Galiläi'schen Fernrohrs (Opernglas, Feldstecher) als negativ zu betrachten ist, so dass letzteres Ocular mit grösserem Fug ein negatives genannt werden dürfte. Der durch diese Bezeichnung bezielte Gegensatz liegt vielmehr darin, dass das

zur Aufnahme eines Fadenkreuzes oder Mikrometers geeignete Diaphragma im Ramsden'schen Ocular vor der ersten Linse, im Huyghens'schen dagegen hinter der ersten, d. h. zwischen beiden Linsen seinen Platz findet. Daran aber, dass im Huyghens'schen Ocular das Interstitium zwischen den beiden seinem Aequivalent zukommenden Hauptpunkten, wie sich nachher ergeben wird, negativ ist, hat wol Niemand bei jener Benennung gedacht.

Wie bekannt, wird das Huyghens'sche Ocular gewöhnlich aus zwei planconvexen Linsen aus gleicher Glassorte, meistens Crownglas, zusammengesetzt, einer grösseren, dem sog. Collectiv oder Feldglas, und einer kleineren stärkeren, d. h. von kürzerer Brennweite, dem sog. Augenglas, beide mit der Convexseite dem eintretenden Licht zugekehrt *). Die Entfernung zwischen beiden Linsen steht ihrer Grösse nach jedenfalls zwischen den beiden Brennweiten der Bestandtheile, so dass also der zweite (hintere) Brennpunkt der ersten Linse hinter die zweite Linse, der erste (vordere) Brennpunkt der zweiten Linse dagegen nicht vor die erste Linse, wie im Ramsden'schen Ocular, sondern zwischen beide Linsen fällt. Dieser letztere Punkt gibt zugleich den Platz des Diaphragmas sammt ewaigem Fadenkreuz oder Mikrometer, wenigstens in dem normalen Falle eines weitsichtigen, auf parallele Strahlen accommodirten Auges.

*) Zuweilen wird die erste Linse für sich, anderemale das ganze Ocular auch nach dem seiner Zeit berühmt gewesenen Optiker Campani zu Bologna benannt. Wie der Ausdruck „das Nicol" und ähnliche bereits geläufig geworden, so dürfte sich die Bezeichnung „das Huyghens", „das Ramsden" für das gleichnamige Ocular, und (zumal mit einer Wortspiel-Prägnanz) „das Campani" für die erste Linse des Huyghens'schen Oculars empfehlen.

Die Bedingung der möglichsten Achromaticität hat zu der Regel geführt, dass Brennweite der ersten Linse, Distanz beider Linsen und Brennweite der zweiten Linse im Verhältniss von 3:2:1 stehen müssen, und diesen einfachen Typus findet man meistens an den Fernrohr-Ocularen von guten Künstlern befolgt, während man bei den Ocularen der Mikroskope zumal in neuerer Zeit kleinere oder grössere Abweichungen von diesem einfachen Zahlenverhältniss antrifft, meistens bestehend in einer Vergrösserung der dritten Zahl, neben kleineren Variationen der zweiten in Plus oder Minus; auch findet man nicht selten die Augenlinse statt planconvex in Gestalt eines Meniskus mit schwacher Concavität der zweiten dem Auge zugekehrten Fläche, sowie bei älteren englischen Instrumenten, namentlich den terrestrischen Fernrohrocularen, biconvexe Linsen. Die Discussion der Motive zu diesen Variationen liegt ausserhalb des Zweckes dieser Mittheilung und würde nicht ohne Eingehen auf den Bau und die optischen Besonderheiten auch des Mikroskop-Objectivs erledigt werden können. Es sei nur bemerkt, dass der erwähnte Typus 3:2:1 sich auf die Voraussetzung eines farbenfreien, aplanatischen, winkeltreuen und planen Objectivbildes stützt, welche gute Objective im Fernrohr mit grosser Annäherung erfüllen, was in gleichem Masse selbst in guten Mikroskopen nach allen vier Beziehungen zugleich nicht der Fall zu sein pflegt, so dass hier, um das dem Auge dargebotene Bild möglichst vollkommen zu machen, das Ocular compensatorische Functionen übernehmen muss, die dort fast ganz wegfallen.

Zum Behuf der nachstehenden Erörterungen bezeichnen wir die Brennweite der ersten, der

zweiten Linse und des Aequivalents bezw. durch f, f', F, sowie die Interstitien oder Distanzen der beiden Hauptpunkte durch s, s', η. Ferner nennen wir für die erste Linse den ersten und zweiten Hauptpunkt E und E', ersten und zweiten Brennpunkt U und U', ebenso für die zweite Linse die Hauptpunkte J, J', die Brennpunkte V, V', und für das Aequivalent die Hauptpunkte H, H', die Brennpunkte F, F', sowie dessen Nebenpunkte G, G'. Sodann bezeichnen wir die Entfernung $E'J$ vom zweiten Hauptpunkt der ersten Linse bis zum ersten Hauptpunkt der zweiten Linse durch t, das Intervall EH vom ersten Hauptpunkt der ersten Linse bis zum ersten Hauptpunkt des Aequivalents durch α, und das Intervall $H'J'$ vom ersten Hauptpunkt des Aequivalents bis zum zweiten Hauptpunkt der zweiten Linse durch α'. Hierbei sollen α und α' als positiv betrachtet werden, wenn im Sinne des durchgehenden Lichts H auf E folgt und H' dem J' voraufgeht, und die Interstitien als positiv gelten, wenn der zweite Hauptpunkt auf den ersten folgt. Bei positiven Brennweiten geht der erste Brennpunkt dem ersten Hauptpunkt voraus und folgt der zweite Brennpunkt auf den zweiten Hauptpunkt, wobei durchweg der erste Punkt jedes Paares von Cardinalpunkten auf das eintretende, der zweite auf das austretende Licht bezogen wird. Für alle gegentheilige Fälle findet das Minuszeichen statt. Bei einer gewöhnlichen biconvexen Glaslinse, deren Dicke geringer als die Summe der beiden Krümmungsradien ist und wo f, s und die den Intervallen α, α' analogen, von den Scheitelpunkten A und A' der Linsenflächen bis zu den Hauptpunkten zu zählenden Entfernungen positiv sind, stehen also

im Sinne des durchgehenden Lichtes die hier in Betracht kommenden Punkte in der Ordnung $UAEE'A'U'$. Noch mag bemerkt werden, dass bei einfachen Glaslinsen, deren Dicke gegen die Krümmungsradien gering ist, das positive Interstitium nahe ein Drittel der Dicke beträgt und dass die Intervalle α, α' den Krümmungsradien proportional sind, während $\alpha + \varepsilon + \alpha'$ gleich der Linsendicke ist. Bei einer Planconvexlinse fällt also, wenn A der Scheitel der Convexfläche ist, E mit A zusammen und E' liegt in der Linse so, dass $E'A'$ nahe zwei Drittel ihrer Dicke beträgt.

Sind für beide Linsen des Oculars die Cardinalpunkte und somit ε, ε', f, f' bekannt und ihre gegenseitige Entfernung nämlich $E'J = t$ gegeben, so lassen sich daraus die Cardinalpunkte des Aequivalents F, F', H, H' oder die Grössen α, α', η und F bestimmen. Die hierzu dienenden Vorschriften, wobei wir $\varepsilon + \varepsilon' = e$ und $f + f' - t = \omega$ setzen, sind

$$\alpha = \frac{t}{\omega} f$$

$$\alpha' = \frac{t}{\omega} f'$$

$$\eta = e - \frac{tt}{\omega}$$

$$F = \frac{ff'}{\omega}$$

Dies ist die zur numerischen Berechnung bequemste Form, obwohl das Aequivalent durch drei Elemente vollständig bestimmt wird, nämlich ausser F durch zwei von den drei Stücken α, α', η, welche durch die Relation

$$\alpha + \alpha' + \eta = t + e$$

zusammenhängen.

Die Scheitelpunkte der ersten Linse durch A, A', der zweiten durch B, B' bezeichnet, verstehen wir unter der Länge L des Oculars die Entfernung AB' zwischen den extremen Scheitelpunkten der Linsencombination, so dass, bei beiden Bestandtheilen die planconvexe Form in der vorhin erwähnten Stellung vorausgesetzt, $L = t + \varepsilon + 3\varepsilon'$ wird, welcher Werth indess durch geringe concave oder convexe Krümmungen bei A' und B' nur um einen kleinen Bruchtheil eines Millimeters alterirt wird.

Nehmen wir vorerst auf die Dicke der Linsen keine Rücksicht und vernachlässigen also die in der Regel geringen Grössen ε und ε', setzen also $e = 0$, so zeigt die dritte der obigen Vorschriften, dass das Interstitium η des Aequivalents nur dann Null wird, wenn zugleich $t = 0$ ist, d. h. wenn beide Linsen unmittelbar an einander liegen. Durch Trennung derselben nimmt η sofort einen negativen Werth an, welcher mit zunehmender Entfernung rasch wächst und für $t = f + f'$ unendlich wird. Bei weiterer Vergrösserung von t wird und bleibt η positiv, nimmt vom Unendlichen bis zu einem Minimalwerthe $4(f + f')$ ab, den es bei $t = 2(f + f')$ erlangt, um von da mit t zugleich wiederum bis ins Unendliche zu wachsen. Da nun, wie bereits erwähnt, im Huyghens'schen Ocular $f > t > f'$ und somit stets $t > f + f'$, so ist bei diesem Ocular für $e = 0$ das Interstitium des Aequivalents stets negativ, so dass H nicht vor sondern hinter H' liegt.

Unter Berücksichtigung von ε und ε', wo also e nicht $= 0$, ist anfänglich, d. h. bei $t = 0$,

$\eta = \varepsilon + \varepsilon'$ positiv, nimmt aber mit wachsendem t bis zu Null ab, welchen Werth es bei $t =$

$$\sqrt{\left[e(f+f') + \frac{ee}{4}\right]} - \frac{e}{2}$$

erreicht, um von hier ab negativ bis ins Unendliche zu wachsen. Bei $t = f + f'$ geht η durchs Unendliche ins Positive über, nimmt positiv geworden wiederum, wie im vorigen Falle *), bis zu einem positiven Minimalwerthe $\eta = e + 4(f + f')$ ab, den es bei $t = 2(f + f')$ erreicht, um von da mit t zugleich bis ins Unendliche zu wachsen.

In einem numerischen Beispiel seien gegeben zwei Linsen mit den Werthen (in Millimetern) $\varepsilon + \varepsilon' = 2$, $f = 60$, $f' = 24$, so würde sich schon für $t = 12$, gleich der Hälfte der kleineren Brennweite, $\eta = 0$ ergeben, und η würde also nicht bloss zwischen den Werthen 24 und 60 für t, sondern zwischen 12 und 84 negativ ausfallen. Bei allen in concreto vorkommenden Fällen (wo e nicht leicht den vierten Theil von f' erreicht) ist im Huyghens'schen Ocular das Interstitium des Aequivalents n e g a t i v.

Als einfache Beispiele bestimmter Formen des Huyghens'schen Oculars mögen zunächst die folgenden dienen.

1) Zum Schema wählen wir zuvörderst jenen oben erwähnten einfachsten Typus und zwar unter Vernachlässigung der Dicke der Linsen. Wir setzen demnach

*) Wie sich aus der Derivation

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{t}{f + f' - t}\left(2 + \frac{t}{f + f' - t}\right) = 0$$

zu erkennen gibt.

$$\varepsilon = 0, \quad f = 3, \quad t = 2$$
$$\varepsilon' = 0, \quad f' = 1$$

woraus, da $e = 0$ und $\omega = 2$, sich ergibt

$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 1, \quad \eta = -2, \quad F = \frac{3}{2}$$

und da $L = 2$, so wird $\frac{F}{L} = \frac{3}{4}$ und $-\frac{\eta}{F} = \frac{4}{3}$.

Wäre in einem speciellen Falle (in Millim.) $f = 60$, $f' = 20$, $t = 40$, so würde man erhalten

$$\alpha = 60$$
$$\alpha' = 20$$
$$\eta = -40$$
$$F = 30$$

und die Cardinalpunkte ständen in folgender Ordnung unter Beifügung ihrer von der Mitte der ersten Linse an gezählten Abscissen auf der Axe in Millimetern *):

	U	....	—60	
A	EE'	....	0	G
	....	V	20	H'
	....	....	30	F
B	....	JJ'	40	
	....	....	50	F'
	U'	V'	60	H
	....	....	80	G'

Das in V anzubringende Diaphragma, genau in der Mitte des 40 Millim. langen Oculars, fällt hier also mit dem zweiten Hauptpunkt H' zusammen; der erste Hauptpunkt H liegt um die

*) Wir geben dem Leser anheim, sich für diese Beispiele die Anordnung der Punkte auf der Axe durch eine Zeichnung zu veranschaulichen. Die Kenntniss der accesorischen oder Nebenpunkte G, G' ist für constructive Anwendungen von Interesse.

halbe Ocularlänge hinter der Augenlinse. Das negative Interstitium ist von gleicher Länge wie das Ocular; die positive Brennweite beträgt 75 Procent dieser Länge.

2) Unter Beibehaltung derselben Linsen und ihrer Entfernung wie im vorigen einfachen Schema nehmen wir in einem zweiten Beispiel die Interstitien der Linsen mit in Rechnung und setzen als gegeben

$$\varepsilon = 1.2,\ f = 60,\ t = 40,\ \text{also}\ \omega = 40$$
$$\varepsilon' = 0.8,\ f' = 20\qquad \text{und}\ e = 2.0$$

Hieraus finden wir

$\alpha = 60$
$\alpha' = 20$
$\eta = -38$
$F = 30$

	U	....	−60.0	
A	E	....	0	G
	E'	....	1.2	
	....	V	21.2	
	....	....	22.0	H'
	....	....	30.0	F
	....	J	41.2	
	....	J'	42.0	
B'	....	....	43.6	
	....	....	52.0	F'
	....	....	60.0	H
	U'	....	61.2	
	....	V'	62.0	
	....	....	82.0	G'.

Die Länge L des Oculars wird 43.6 und $\frac{F}{L} = 0.6881$, sowie $\frac{\eta}{F} = 1.267$, und der zweite Hauptpunkt H' liegt 0.8 Mill. hinter dem in V anzubringenden Diaphragma.

3) Es sei gegeben

$\varepsilon = 1.3,\ f = 48,\ t = 33,$ also $\omega = 35$
$\varepsilon' = 0.7,\ f' = 20$ und $e = 2.0$

woraus man erhält

$\alpha = 45.26$
$\alpha' = 18.85$
$\eta = -29.11$
$F = 27.48$

	U	.....	—48.00	
	.....	.....	— 9.60	G
A	E	.....	0	
	E'	.....	1.30	
	.....	V	14.30	
	.....	.....	16.15	H'
	.....	.....	17.83	F
	.....	J	34.30	
	.....	J'	35.00	
B'	.....	.....	36.40	
	.....	.....	43.58	F'
	.....	.....	45.26	H
	U'	.....	49.30	
	.....	V'	55.00	
	.....	.....	71.01	G'

Die Länge ist 36,40, also $\frac{F}{L} = 0.7536$, sowie $-\frac{\eta}{F} = 1.061$. Der zweite Hauptpunkt liegt 1.85 Mill. hinter dem Diaphragma V.

4) Gegeben sei

$\varepsilon = 1.4,\ f = 60,\ t = 40,$ also $\omega = 44$
$\varepsilon' = 0.8,\ f' = 24$ und $e = 2.2$

Man findet hieraus für das Aequivalent die vier Bestimmungsstücke sowie für die Aufeinanderfolge der Cardinalpunkte der Bestandtheile sowohl als des Aequivalents die Abscissen wie folgt

$\alpha = 54.55$
$\alpha' = 21.82$
$\eta = -36.36$
$F = 32.73$

	U	....	−60.00	
	....	....	−10.91	G
A	E	....	0	
	E'	....	1.40	
	....	V	17.40	
	....	....	20.38	H'
	....	....	21.82	F
	....	J	41.40	
	....	J'	42.20	
B'	....	....	43.80	
	....	....	53.11	F'
	....	....	54.55	H
	U'	....	61.40	
	....	V'	68.20	
	....	....	85.84	G'

Die Länge 43.8 gibt $\frac{F}{L} = 0.7473$, und es ist $-\frac{\eta}{F} = 1.080$. Der zweite Hauptpunkt fällt 2.98 Mill. hinter die Ebene des Diaphragmas.

Im ersten Beispiel war das Verhältniss $-\frac{\eta}{F} = 1.333$, im zweiten $= 1.267$, in dem dritten und vierten stellte es sich nur wenig von der Einheit abweichend heraus. Es bietet sich von selbst die Frage dar, in welche gegenseitige Distanz die beiden Linsen eines Huyghens'schen Oculars gestellt werden müssten, um Gleichheit zwischen Brennweite und Interstitium zu bewirken, wodurch also Coincidenz einerseits von H' und F andererseits von H und F' eintreten würde.

Auf den ersten Blick könnte man es befremdend finden, wie ein Punkt der Axe eines Linsensystems zugleich Haupt- und Brennpunkt sein könne. Das Befremdliche verschwindet

aber sofort, wenn man die Unterscheidung zwischen dem ersten und dem zweiten Punkte jedes der beiden Paare beachtet. Sei P der Punkt, in welchem H' und F, Q der Punkt, wo H und F' coincidiren, so ist die dioptrische Bedeutung von P, dass wenn einfallende Lichtstrahlen nach P convergiren, die austretenden Strahlen parallel der Axe verlaufen, und die Bedeutung von Q, dass parallel zur Axe einfallendes Licht nach dem Austritt aus Strahlen besteht, deren Concurrenzpunkt in Q liegt. Hierin besteht die Function beider Punkte in ihrer Eigenschaft als Brennpunkte F und F'. Die zweite Rolle, welche P und Q als Hauptpunkte H' und H spielen, besteht darin, dass einfallendes in Q concurrirendes Licht nach dem Durchgang in P concurrirt. Es leuchtet ein, dass diese Coincidenz zwischen Haupt- und Brennpunkten nur bei entgegengesetztem Zeichen von Brennweite und Interstitium stattfinden kann.

Die Realisirung dieser Coincidenz beruht auf der Forderung, dass $F = -\eta$ werde oder dass

$$\frac{tt}{\omega} - e = \frac{ff'}{\omega}$$

sei, welche für t den fraglichen Werth ergibt. Derselbe findet sich

$$\sqrt{\left[ff' + e(f+f') + \frac{ee}{4}\right]} - \frac{e}{2}$$

Es mögen noch zwei Beispiele folgen, in welchen wir der Entfernung t diesen berechneten Werth ertheilen.

5) Es sei gegeben

$\varepsilon = 1.5$, $f = 64$, $t = 41.46$ also $\omega = 47.54$
$\varepsilon' = 1.0$, $f' = 25$ und $e = 2.50$

dann finden wir

$\alpha = 55.82$
$\alpha' = 21.80$
$\eta = -33.66$
$F = 33.66$

	U	....	−64.00	
	....	....	−11.50	G
A	E	....	0	
	E'	....	1.50	
	....	V	17.96	
	....	....	22.16	FH'
	....	J	42.96	
	....	J'	43.96	
B	....	....	45.96	
	....	....	55.82	HF'
	U'	....	65.50	
	....	V'	68.96	
	....	....	89.48	G'

Die Länge wird 45.96, $\frac{F}{L} = 0.7324$ und, wie verlangt, $-\frac{\eta}{F} = 1$. Zweiter Hauptpunkt und erster Brennpunkt liegen 4.2 Mill. hinter dem Diaphragma.

6) Es sei

$\varepsilon = 1.3,\ f = 72,\ t = 47.63,$ also $\omega = 54.37$
$\varepsilon' = 0.7,\ f' = 30 \qquad e = 2.0$

woraus wir finden

$\alpha = 63.08$
$\alpha' = 26.28$
$\eta = -39.73$
$F = 39.73$

	U	....	−72.00	
	....	....	−16.38	G
A	E	....	0	
	E'	....	1.30	
	....	V	18.93	
	....	....	23.35	FH'
	....	J	48.93	
	....	J'	49.63	
B'	....	....	51.03	
	....	....	63.08	HF'
	U'	....	73.30	
	....	V'	79.63	
	....	....	102.81	G'

Bei der Länge 51.03 ist $\frac{F}{L} = 0.7785$, Zweiter Haupt- und erster Brennpunkt stehen 4.42 Mm. hinter der Blende.

Zur leichteren Vergleichung stellen wir die in den aufgeführten Beispielen dem Huyghens'schen Ocular ertheilten Formen nochmals numerisch zusammen. Aus der letzten Columne entnehmen wir die für einen schnellen Ueberschlag bequeme Regel: die äquivalente Brennweite eines Huyghens'schen Oculars ist ziemlich zutreffend drei Viertel seiner Länge, gemessen zwischen den extremen Glasflächen.

s	s'	f	f'	t	α	α'	$-q$	F	$F:L$
0	0	60	20	40	60	20	40	30	0.75
1.2	0.8	60	20	40	60	20	38	30	0.688
1.3	0.7	48	20	33	45.26	18.85	29.11	27.43	0.754
1.4	0.8	60	24	40	54.55	21.82	36.36	32.73	0.747
1.5	1.0	64	25	41.46	55.82	21.80	33.66	33.66	0.732
1.3	0.7	72	30	47.63	63.08	26.28	39.73	39.73	0.779

Diesen schematischen Beispielen soll nun eine Reihe von Messungen an Ocularen theils von Fernröhren theils von Mikroskopen namhafter früherer und jetziger Künstler folgen, welche nebst Bemerkungen über die Methode der Bestimmung sowie über die numerischen Ergebnisse den Gegenstand einer Fortsetzung gegenwärtiger Mittheilung bilden werden.

Bemerkungen zu der Theorie der Gleichungen 5ten und 6ten Grades.

Von

A. Clebsch.

Durch die Arbeiten von Jerrard, Hermite, Kronecker und Brioschi ist es bekannt, dass jede Gleichung 5. Grades sich auf eine solche zurückführen lässt, bei welcher das zweite, dritte und vierte Glied fehlt, und welche dann mittelst der Theorie der elliptischen Functionen lösbar wird. Man kann dies so ausdrücken, dass mit Hülfe einer höhern Substitution immer (ohne Lösung höherer als biquadratischer Gleichungen, also mit blosser Anwendung von Wurzelausziehen) eine binäre Form 5. Ordnung in eine solche verwandelt werden kann, deren Invariante C verschwindet. Ist nämlich dieses der Fall, so ergiebt sich folgender einfache Weg, um mittelst einer linearen Transformation jene (Jerrard'sche) Form hervorzurufen. Es sei symbolisch $f = a_x^5 = b_x^5 \ldots$; ferner führe ich die Bezeichnungen ein:

$$i = (ab)^4 a_x b_x, \quad j = -(ai)^2 a_x^3, \quad \tau = (jj')^2 j_x j'_x,$$
$$\vartheta = (i\tau) i_x \tau_x,$$
$$A = (ii')^2, \quad B = (i\tau)^2, \quad C = (\tau\tau')^2,$$
$$\alpha = (ai)^2 (ai')^2 a_x, \quad \delta = (\vartheta\alpha)\vartheta_x, \quad R = (\vartheta\alpha)^2.$$

Ist dann $C = 0$, und betrachtet man die Grenze, welcher in diesem Falle sich die Lösung der bekannten Aufgabe nähert, f als Summe von drei fünften Potenzen darzustellen, so findet man die Gleichung:

$$1 \ldots \quad R^4 f = \tfrac{3}{8} A^2 \xi^5 - \tfrac{5}{6} B \xi \eta^4 - \tfrac{1}{6} B \eta^5,$$

wo $2 \ldots \quad \xi = \delta - Ba, \quad \eta = \delta + \tfrac{1}{2} Ba.$

Die Gleichung $f = 0$ geht also durch die Substitution 2. in die Jerrardsche Form

$$3 \ldots \quad \tfrac{3}{8} A^2 \xi^5 - \tfrac{5}{6} B \xi \eta^4 - \tfrac{1}{6} B \eta^5 = 0$$

oder $4 \ldots \quad x^5 - x - a = 0$

über, wo $5 \ldots x = \frac{\xi}{\eta} \sqrt[4]{\frac{4A^2}{5B}}, \quad a = \tfrac{1}{5} \sqrt[4]{\frac{4A^2}{5B}}.$

Man kann die Form 3. dazu benutzen, um die Discriminante einer Gleichung 5. Grades auf einfache Weise zu finden. Man erhält nämlich für die Form $x^5 - x - a$ als Bedingung zweier gleichen Factoren sofort $a^4 = \frac{4^4}{5^5}$, also $A^2 - 64B = 0$. Da nun die Discriminante eine Form fünfter Ordnung nur vom 8. Grade in den Coefficienten ist, so muss ihr Ausdruck durch die 4 einzig existirenden Invarianten von $f(A, B, C, R)$ von C und R unabhängig sein; der Ausdruck $A^2 - 64B$ muss also die Discriminante auch noch darstellen, wenn C nicht verschwindet.

Eine Gleichung 6. Grades wird durch die Theorie der elliptischen Functionen in folgenden beiden Fällen sogleich lösbar: wenn sie durch eine lineare Substitution in die Modulargleichung, und wenn sie in die Multiplicatorgleichung der Transformation 5. Ordnung übergeht. Da beide Gleichungen nicht mehr durch lineare Transformation in einander übergeführt werden können, so ergeben sich hieraus in der

That zwei Classen von Formen mit verschiedenen Invarianteneigenschaften.

Es sei $f = a_x^6$ eine Form 6. Ordnung; ich führe die Bezeichnungen ein:

$$H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4, \quad T = (aH) a_x^5 H_x^7,$$
$$i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2, \quad A = (ab)^6,$$
$$l = (ai)^4 a_x^2, \quad m = (il)^2 i_x^2$$
$$n = (im)^2 i_x^2, \quad \vartheta = (nl) n_x l_x,$$
$$B = (ii')^4, \quad C = (ii')^2 (ii'')^2 (i'i'')^2,$$
$$R = (lm)(ln)(mn).$$

Aus den Untersuchungen über den algebraischen Character der gedachten Modulargleichung, welche Hr. Gordan in Bd. II. Ser. II. der Annali di matematica gegeben hat, entnimmt man dann sofort den Satz:

Wenn A und C verschwinden, so bestimme man $k = u^4$ aus der Gleichung 4. Grades

$$\frac{1 - 6k^2 + k^4}{k(1 - k^2)} = \frac{12R}{B^2\sqrt{-BD}};$$

mittelst der Substitution

$$\frac{v + u^5}{vu^4 - u} = \frac{2\vartheta}{l\sqrt{-BD}}$$

welche hier, indem ϑ und l einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, eine lineare wird, geht $f = 0$ in die Modulargleichung

$$v^6 - 4u^5 v^5 + 5u^2 v^4 - 5u^4 v^2 + 4uv - u^6 = 0$$

über.

Die Gleichung für den Multiplicator M der Transformation hat in Bd. I. Ser. I. der Annali di Matematica Hr. Brioschi in einer Form gegeben, welche, wenn man

$$z = \frac{1-M}{M}$$

setzt, diese wird:

$$6 \ldots \quad z^6 - 4z^5 + 256k^2k'^2(z+1) = 0.$$

Diese Gleichung hat die charakteristischen Invariantenrelationen

$$7 \ldots \quad B = \tfrac{7}{50}A^2, \quad C = -\tfrac{9}{500}A^3.$$

Bestehen diese für irgend eine Form f, so wird dieselbe in folgender Weise auf die Form 6. zurückgeführt: Man setze

$$\alpha = \frac{A}{10}, \quad \gamma = \frac{R}{4\left(D - \frac{A^5}{3.5^5}\right)},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{A^5}{3.10^5} - \frac{D}{32}}.$$

Durch die in den Formeln

$$\gamma\xi^2 = \alpha\frac{l}{4} + \frac{\gamma-\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+\alpha m - 2\alpha^2 l}{8\beta}$$

$$\gamma\eta^2 = \alpha\frac{l}{4} + \frac{\gamma+\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+\alpha m - 2\alpha^2 l}{8\beta}$$

$$-8\beta\xi\eta = m - \alpha l$$

enthaltene lineare Substitution geht dann $f = 0$ in die Gleichung

$$0 = (\beta+\gamma)(-\xi^6+2\xi^5\eta)+(\beta-\gamma)(2\xi\eta^5+\eta^6)$$

über; und diese verwandelt sich in 6., indem man

$$z = \frac{2\xi}{\eta}, \quad k^2 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma+\beta}}\right),$$

$$k'^2 = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma+\beta}}\right),$$

setzt.

Ich gedenke bei dieser Gelegenheit noch einer andern Classe von Gleichungen 6. Grades, deren Auflösung sich algebraisch in eleganter Weise gestalten lässt. Wenn nämlich die Wurzel von $f = 0$ drei Paare bilden, die zu zweien immer harmonisch sind, so hat f den Character der Covariante 6. Ordnung, welche in der Theorie der biquadratischen Formen auftritt, und zwar ist das System der biquadratischen Formen, deren Covariante 6. Ordnung f ist, in dem Ausdrucke

$$\psi(x) = \frac{4(x\eta)\,ax^3\,a_\eta^3}{\sqrt[3]{-2f(\eta)^2}}$$

enthalten, wo symbolisch $f = a_x^6$ und wo η_1, η_2 willkürliche Constante bezeichnen. Von allen Formen, die aus einer Form 6. Ordnung entspringen, bleiben hier nur H, A, T übrig, und zwischen diesen besteht die identische Gleichung

$$T^2 + \frac{H^3}{2} + \frac{Af^4}{36} = 0$$

In Folge dessen lässt sich f bis auf einen constanten Factor als das Product der drei quadratischen Factoren

$$\sqrt[3]{T+\frac{f^2}{6}\sqrt{-A}}-\varepsilon\sqrt[3]{T-\frac{f^2}{6}\sqrt{-A}}$$

darstellen, in welchen ε eine dritte Wurzel der Einheit bedeutet, und die Lösung von $f=0$ ist hiedurch ganz in derselben Weise auf die Lösung quadratischer Gleichungen reducirt, in welcher nach Hrn. Cayley die Zerfällung der cubischen und biquadratischen Formen vorgegenommen werden kann.

Das Verhalten der Phosphorsäure im Erdboden.

Versuche von Dr. P. Wagner,
Assist. am agriculturchemischen Laboratorium.
Mitgetheilt von Wilh. Wicke.

Zu wissen, in welcher Form die Pflanzennährstoffe im Boden vorkommen, und wie sich ihre Verbindungen gegen Lösungsmittel verhalten, hat ein chemisch-physiologisches und auch praktisches Interesse. Während über die hierher gehörigen basischen Oxyde mehrere gediegene Arbeiten vorliegen, hat man sich mit den betreffenden Säuren viel weniger beschäftigt. Es ist namentlich auffallend, dass die Phosphorsäure, die doch unter den Pflanzennährstoffen eine so wichtige Rolle spielt, nicht häufiger bearbeitet worden ist. Wir besitzen nur eine in der angeführten Richtung unternommene grössere Untersuchung von Dr. E. Peters aus dem Jahre 1867, die, so sorgfältig sie ausgeführt worden ist, doch

gewichtige Zweifel in Betreff der aus ihr gezogenen Folgerungen zulässt.

Peters hatte sich die Aufgabe gestellt zu constatiren, ob in zwei von ihm in Untersuchung genommenen fruchtbaren Bodenarten, die Phosphorsäure an Kalk oder an Eisenoxyd und Thonerde gebunden sei. Er glaubte dadurch, dass er die betreffenden Bodenarten mit verschiedenen Lösungsmitteln: destilirtem Wasser, kohlensaurem Wasser, verdünnter Essigsäure und concentrirter Salzsäure successive behandle, zum Ziele kommen zu können; ausgehend von der Voraussetzung:

Die phosphorsauren Alkalien würden sich in Wasser lösen;

die Verbindungen der Phosphorsäure mit Kalk und Magnesia, wenn auch schwierig in kohlensaurem Wasser, doch leicht in Essigsäure;

endlich die Verbindungen von Eisenoxyd und Thonerde, wenn auch kaum in verdünnter Essigsäure, doch leicht in concentrirter Salzsäure.

Um hier kurz das Resultat, zu welchem Peters kam, anzuführen, so glaubte er sich durch die Ergebnisse seiner Untersuchungen zu dem Schlusse berechtigt, dass, da die salzsaure Lösung am meisten Eisenoxyd, Thonerde und Phosphorsäure enthalte, die grösste Menge der Säure mit diesen Oxyden verbunden im Boden vorkomme. Denn in den mit destillirtem und kohlensaurem Wasser erhaltenen Lösungen war weniger Phosphorsäure enthalten, als der Löslichkeit des phosphorsauren Kalkes entsprach und die essigsaure Lösung enthielt nach Abzug der, dem Eisenoxyd und der Thonerde zukommenden

Menge Phosphorsäure, nur noch wenig phosphorsauren Kalk.

Dr. Wagner hatte sich nun die Aufgabe gestellt, die von Peters in Anwendung gebrachte Untersuchungs-Methode einer genauen Prüfung zu unterziehen. Er wollte sich insbesondere Gewissheit darüber verschaffen, ob die aus dem Verhalten des Bodens gegen gedachte Lösungsmittel gezogenen Schlussfolgerungen, als sicher begründet angesehen werden könnten. Möglich erschien namentlich der Fall, dass zwischen dem ursprünglich gegebenen phosphorsauren Salze und dem übrigen Bodenmaterial, in Folge der chemischen Behandlung, wechselseitige Umsetzungen stattgefunden. Das schliessliche Ergebniss der Untersuchung konnte recht wohl erst während der dreitägigen Behandlung des Bodens entstanden und somit ein Produkt der analytischen Behandlung sein.

Zunächst stellte Wagner die Löslichkeit des durch Fällung einer Chlorcalcium-Lösung mit phosphorsaurem Natron erhaltenen phosphorsauren Kalks fest.

150 Grm. des feuchten Niederschlages, entsprechend 15 Grm. trockner Substanz, wurden in 2 Liter destillirtem Wasser vertheilt und eine halbe Stunde lang ein ununterbrochener Strom Kohlensäure hindurchgeleitet. Diese Behandlung wurde am 2. und 3. Tage wiederholt. Das Gefäss wurde nach jedesmaligem Einleiten fest verschlossen. Nach 6 Tagen wurde die gelöste Phosphorsäure bestimmt. Sie betrug im Liter 0.352 Grm.

I.

Andere 150 Grm. des Niederschlages wurden, nachdem sie vorher mit 15 Grm. reinem präci-

pitirten kohlensauren Kalk versetzt worden waren, ebenso behandelt.

Jetzt enthielt das Filtrat im Liter

nach 2tägiger Behandl.	nur 0.085	Grm. Phosphors.
„ 5 „ „	„ 0.050	„ „
„ 21 „ „	„ 0.017	„ „
„ 37 „ „	„ 0.014	„ „

Der Versuch wurde in der Art abgeändert, dass nach der Behandlung mit Kohlensäure der trockne kohlensaure Kalk, und zwar 10 Grm., zugesetzt wurde. Der Effekt war der, dass das Filtrat im Liter

nach 2täg. Behandl. enthielt:	0.240	Grm. Phosphors.
„ 5 „ „ „	0.115	„ „
„ 21 „ „ „	0.058	„ „
„ 37 „ „ „	0.052	„ „

Diese Versuche zeigen, dass nach der Menge der in kohlensaurem Wasser gelösten Phosphorsäure nicht mit Sicherheit auf die Menge des etwa im Boden vorhandenen phosphorsauren Kalks geschlossen werden kann, wenn mit diesem Salze zugleich kohlensaurer Kalk vorkommt. Dies wird aber sehr oft der Fall sein da beide Kalksalze in der Natur fast immer mit einander vergesellschaftet sind.

Die Zersetzung des phosphorsauren Kalks durch Kohlensäure beruht auf Entstehung von saurem phosphorsaurem Kalk unter Bildung von zweifach kohlensaurem Kalk. Sie erreicht ihre Grenze, wenn eine gewisse Menge dieses letztern Salzes in der Lösung enthalten ist. Entsteht der zweifach kohlensaure Kalk noch ausserdem aus vorhandenem kohlensaurem Kalk, so

wird relativ weniger phosphorsaurer Kalk zersetzt werden.

Der abgeänderte zweite Versuch zeigt auch, dass aus einem zersetzten Kalkphosphat durch kohlensauren Kalk wiederum die frei gewordene Phosphorsäure absorbirt werden kann.

II.

Von der nach I. erhaltenen kohlensauren Lösung von phosphorsaurem Kalk wurden 1000 CC. mit 30 Grm. frisch gefällten Eisenoxydhydrats versetzt. Letzteres betrug in wasserfreiem Zustande 2 Grm. Da das Eisenoxyd eine grosse Menge Kohlensäure absorbirte, so wurde diese durch Einleiten wieder ersetzt. Im Uebrigen wurde von dem bei I. beobachteten Verfahren nicht abgewichen. Mit dem durch das Eisenoxydhydrat hinzugebrachten Wasser enthielt jetzt der Liter 0.345 Grm. Phosphorsäure.

Die Phosphorsäure im Filtrat betrug

nach	2	Tagen	0.080	Grm. im	Liter
„	6	„	0.040	„ „	„
„	22	„	0.028	„ „	„
„	37	„	0.021	„ „	„

Der Versuch wurde in der Art modificirt, dass ein Mal getrocknetes feingeriebenes und ein anderes Mal gefrorenes Eisenoxydhydrat zugesetzt wurde. In den ersten Tagen geschah die Absorption der Phosphorsäure langsamer, nach Verlauf von 37 Tagen war indess in beiden Fällen nur noch 0.026 Grm. im Liter gelöst.

Wir haben durch diesen Versuch den direkten Beweis, dass das phosphorsaure Eisenoxyd erst aus dem phosphorsauren Kalk entstanden

und somit ein Produkt der analytischen Behandlung des Bodens sein kann.

III.

Phosphorsaurer Kalk wurde in Essigsäure (1 Thl. Eisessig, 10 Thle Wasser) gelöst. 1000 CC. der Lösung wurden mit 60 Grm. frisch gefällten Eisenoxydhydrats versetzt (s. Versuch II.). Mit Berechnung des in diesem zugesetzten Wassers, enthielt jetzt das Liter 1.478 Grm. Phosphorsäure.

Das Filtrat enthielt

nach 15 Min. noch 0.079 Grm. Phosphors. im Liter
„ 2 Stund. „ 0.061 „ „ „ „
„ 24 „ „ 0.043 „ „ „ „
„ 3 Tagen „ 0.040 „ „ „ „
„ 6 „ „ 0.016 „ „ „ „

Es fand sich also nach 15 Minuten nur noch der 20. Theil der ursprünglichen Menge an Phosphorsäure in Lösung.

Es macht dieser Versuch sehr wahrscheinlich, dass das Resultat der von Peters ausgeführten Bodenuntersuchung von dem vorhanden gewesenen Eisenoxyd beeinflusst worden ist. Je nach der Beschaffenheit des Eisenoxyds und der Thonerde wird eine ungleiche Menge von Phosphorsäure absorbirt werden. Es ist wohl anzunehmen, dass auch Eisenverbindungen, wie z. B. das kieselsaure Eisenoxyd, eine im Boden sehr verbreitete Substanz, absorbirend wirken.

IV.

Bei diesem von den Peter'schen Versuchen unabhängigen Versuche wurde zuerst die lösende

Wirkung gewisser Salze auf phosphorsauren Kalk festgestellt.

1600 CC. einer Lösung von
10 Grm. schwefelsaurer Magnesia
4 „ Salmiak
6 „ salpetersaurem Kali

blieben mit 150 Grm. feuchtem phosphorsauren Kalk (s. Versuch I.) 14 Tage stehen.

Die Bestimmung der nach dieser Zeit gelösten Phosphorsäure ergab: 0.265 Grm. im Liter.

500 CC. des Filtrats wurden mit 10 Grm. gefälltem kohlensauren Kalk versetzt.

500 CC. mit 15 Grm. feuchtem Eisenoxydhydrat.

Die nach 10 Tagen angestellte Untersuchung der Lösung ergab in beiden Fällen nur noch Spuren von Phosphorsäure.

Man sieht aus diesem Versuch, dass aus dem phosphorsauren Kalk durch neutrale Salze Phosphorsäure in Lösung gebracht wird, dass aus der letztern aber durch kohlensauren Kalk die Phosphorsäure fast vollständig wieder ausgeschieden wird. Der erste wie der zweite Process hat für das Verhalten der Phosphorsäure im Boden um deswillen Werth, weil die oben erwähnten Salze Düngmittel sind und der kohlensaure Kalk ein allgemein verbreiteter Bestandtheil der Ackererde ist.

Es ergiebt sich aus den mitgetheilten Versuchen für die Aufgabe, welche sich Dr. Peters gestellt hatte, dass dieselbe zur Zeit noch nicht gelöst werden kann, weil es uns bisjetzt noch an Untersuchungsmethoden fehlt, mit deren Hülfe wir die verschiedenen im Boden vorkommenden

phosphorsauren Verbindungen zu bestimmen im Stande sind.

Wagner hat dazu noch einen weiteren Beweis durch die Untersuchung einer fruchtbaren Gartenerde geliefert. Sie zeigt namentlich auch, wie sehr das Resultat von der, für das Filtriren der Lösung beobachteten Zeitdauer abhängt.

Ausser andern Bestandtheilen, die nicht bestimmt wurden, enthielt diese Erde

3.82	Proc.	kohlensauren Kalk.
2.63	„	Eisenoxyd und Thonerde.
0.35	„	Magnesia.
0.28	„	Phosphorsäure.

4000 Grm. der lufttrocknen Erde wurden mit 9 Liter destillirten, mit Kohlensäure gesättigten Wasser übergossen. Unter häufigem Umschütteln wurde noch 3 Stunden lang das Einleiten von Kohlensäure fortgesetzt; darauf wurden zwei Liter abfiltrirt und es wurde darin die Phosphorsäure bestimmt.

24 Stunden nach Beginn des Versuchs wurde wieder 3 Stunden lang Kohlensäure eingeleitet, 2 Liter abfiltrirt und wieder die Phosphorsäure bestimmt.

Desgleichen am 4. und 21. Tage.

Andere 2000 Grm. der nämlichen lufttrocknen Erde wurden mit 3 Liter Essigsäure (150 CC. Eisessig, 2350 CC. Wasser) übergossen. Nach $1^1/_2$ Stunden, während welcher Zeit fleissig geschüttelt worden war, wurden 500 CC. abfiltrirt; desgleichen nach 24 Stunden, 3 und 21 Tagen und in den Filtraten jedesmal die Phosphorsäure bestimmt.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Untersuchungen.

Dauer der Einwirkung.	Die in den Filtraten gefundene Menge Phosphorsäure auf 1000 Grm. Erde berechnet: Kohlensaures Wasser.	Essigsäure.
1½ Stunde	— — —	0.524 Grm.
3 „	0.0821 Grm.	— — —
24 „	0.0814 „	0.443 „
3 Tage	— — —	0.361 „
4 „	0.0650 „	— — —
21 „	— — —	0.340 „

Dadurch ist bewiesen, dass auf die gelöst gewesene Phosphorsäure andere Bodenbestandtheile absorbirend gewirkt haben. Würde jetzt als letztes Lösungsmittel Salzsäure angewendet, so würde die absorbirte Phosphorsäure dem vorhandenen Eisenoxyd und der Thonerde zu Gute kommen.

Die Untersuchungen über das Verhalten der Phosphorsäure im Boden erfordern, dass namentlich auch über die Zersetzung des phosphorsauren Eisenoxyds und Oxyduls Versuche angestellt werden. Diese Verbindungen kommen erfahrungsmässig in verschiedenen Culturböden häufig genug vor. Das phosphorsaure Eisenoxyd-Oxydul (Blaueisenerde) unter andern sehr häufig in den tieferen Schichten des Marschbodens und im Moorboden. In beiden Fällen dürfte es durch die Wirkung organischer, reducirend wirkender Substanzen aus dem phosphorsauren Eisenoxyd entstanden sein.

Zu wissen, welche Agentien die Verbindungen der Eisenoxyde mit Phosphorsäure zersetzen und die Phosphorsäure für die Vegetation nutzbar

machen, hat also ein besonderes Interesse. Was wir bis jetzt über die Zersetzung wissen, genügt nicht für eine befriedigende Erkenntniss.

Wir wissen durch Liebig, dass neutrale Salze auf das phosphorsaure Eisenoxyd lösend einwirken; durch Peters, dass der Verbindung durch Wasser Phosphorsäure entzogen wird und ein stark basisches Salz zurückbleibt; und endlich durch Heiden, dass kohlensaure Alkalien eine Zersetzung herbeiführen. Wagner hat gefunden, dass dies auch durch kohlensaures Ammoniak geschieht.

Nach Peters wirken auf das phosphorsaure Eisenoxyd-Oxydul auch Humussubstanzen lösend ein.

Alle diese Vorgänge machen die mit den Eisenoxyden verbunden gewesene Phosphorsäure fähig, wiederum andere Phosphate, vielleicht Kalk- oder Magnesia-Phosphate, zu bilden, so dass mit jeder neuen Düngung des Bodens, oder auch schon mit jeder Bearbeitung desselben Veranlassung zur Zersetzung der vorhandenen phosphorsauren Verbindungen, so wie zur Entstehung neuer derartiger Verbindungen gegeben wird.

Ich will noch anführen, dass Dr. Wagner auch gefunden hat, dass Kohlensäure auf das phosphorsaure Oxyd-Oxydul lösend einwirkt — die nach 12 Tagen in 1 Liter kohlensauren Wassers aufgelöste Menge betrug 0.0074 Grm. — und dass von ihm namentlich auch die durch Kalk und kohlensauren Kalk entstehenden Zersetzungsprocesse weiter werden verfolgt werden.

Malden-Phosphorit (sog. Malden-Guano).

Von

Wilhelm Wicke.

Est ist die im stillen Ocean gelegene Malden-Insel, von welcher dieser Phosphorit bezogen wird. Er ist erst in der letzten Zeit durch das bekannte Handlungshaus Emil Güssefeld in Hamburg der deutschen Landwirthschaft zugänglich gemacht. Der Import hat im vorigen Jahre mit zwei Ladungen begonnen, wird aber für die folgenden Jahre mit grösseren Quantitäten fortgesetzt werden. Durch Aufschliessen mit Schwefelsäure wird daraus ein Superphosphat mit 16 Proc. löslicher Phosphorsäure erhalten.

Der Malden-Phosphorit hat grosse Aehnlichkeit mit dem schon länger bekannten und zur Superphosphat-Fabrikation benutzten sog. Baker-Guano. Auch lässt das ganz gleiche Vorkommen beider Phosphorite auf gleiche Entstehungsweise schliessen. Es ist, was diese anbetrifft, sehr wahrscheinlich, dass das ursprüngliche Material Guano-Lager gewesen sind. Der Guano ist durch Witterungseinflüsse seiner in Wasser löslichen Substanzen fast gänzlich verlustig gegangen, so dass hauptsächlich nur phosphorsaurer und kohlensaurer Kalk zurückgeblieben ist. Eine ganz bedeutende Verminderung haben ferner auch die organischen Substanzen und besonders die stickstoffhaltigen erfahren, so dass der

gesammte Stickstoffgehalt nur noch 0.5 Proc. beträgt.

Da eine Analyse des Malden-Phosphorit bisher noch nicht bekannt gemacht ist, so theile ich eine solche, die vom Herrn Frhr. Grote in meinem Laboratorium ausgefüht ist, hier mit.

Wasser	4.44	Proc.
Organische Substanzen	9.23	„
Kalk	41.90	„
Magnesia	0.84	„
Kali	0.20	„
Natron	1.13	„
Eisenoxyd	1.70	„
Phosphorsäure	32.90	„
Kohlensäure	6.46	„
Schwefelsäure	0.30	„
Fluor, Chlor	0.90	„
	100.00	

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hiermit wiederholt die Aufgaben bekannt, welche für den dritten Verwaltungszeitraum, d. h. für die Zeit vom 14. März 1866 bis zum 14. März 1876, von ihm ingemäss der Ordnungen der Stiftung gestellt worden sind.

Für den ersten Preis.

Der Verwaltungsrath verlangt

eine Ausgabe der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik des Hermann Korner.

Für den letzten Verwaltungszeitraum war eine Ausgabe der verschiedenen Texte und Bearbeitungen der Chronik des Hermann Korner verlangt und dabei sowohl an die handschriftlich vorhandenen deutschen wie die lateinischen Texte gedacht. Seit dem ersten Ausschreiben dieser Preisaufgabe hat sich aber die Kenntnis des zu benutzenden Materials in überraschender Weise vermehrt: zu der von der bisherigen Ausgabe der Chronica novella stark abweichenden Wolfenbütteler Handschrift sind zwei andere in Danzig und Linköping gekommen, die jenes Werk in wieder anderer Gestalt darbieten

(vgl. Waitz, Ueber Hermann Korner und die Lübecker Chroniken, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. V, und einzeln Göttingen 1851 4., Nachrichten 1859 Nr. 5 S. 57 ff. und 1867 Nr. 8 S. 113); ausserdem ist in Wien ein Codex der deutschen Bearbeitung gefunden, der den Korner auch als Verfasser dieser bestimmt erkennen lässt (Pfeiffer, Germania IX, S. 257 ff.).

Auch jetzt noch würde eine zusammenfassende Bearbeitung aller dieser Texte das Wünschenswertheste sein. Da aber eine solche nicht geringe Schwierigkeiten darbietet, so hat der Verwaltungsrath geglaubt, bei der für den neuen Verwaltungszeitraum beschlossenen Wiederholung die Aufgabe theilen und zunächst eine kritische Edition der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik fordern zu sollen.

Hier wird es darauf ankommen zu geben:

1) den in der Wolfenbütteler Handschrift, Helmstad. Nr. 408, enthaltenen Text einer ohne Zweifel dem Korner angehörigen Chronik, als die älteste bekannte Form seiner Arbeit;

2) alles was die Danziger und Linköpinger Handschrift Eigenthümliches darbieten und ausserdem eine Nachweisung ihrer Abweichungen von den andern Texten und unter einander, so dass die allmähliche Entstehung und Bearbeitung des Werkes erhellt;

3) aus der letzten und vollständigsten Bearbeitung der Chronica novella, die bei Eccard (Corpus historicum medii aevi II) gedruckt ist, wenigstens von der Zeit Karl des Grossen an, alles das was nicht aus Heinrich von Herford entlehnt und in der Ausgabe desselben von Potthast bezeichnet ist, unter Benutzung der

vorhandenen Handschriften, namentlich der Lübecker und Lüneburger.

Es wird bemerkt, dass von dem Wolfenbütteler, Danziger und Linköpinger Codex sich genaue Abschriften auf der Göttinger Universitäts-Bibliothek befinden, die von den Bearbeitern werden benutzt werden können, jedoch so dass wenigstens bei der Wolfenbütteler Handschrift auch auf das Original selbst zurückzugehen ist.

In allen Theilen ist besonders auf die von Korner benutzten Quellen Rücksicht zu nehmen, ein genauer Nachweis derselben und der von dem Verfasser vorgenommenen Veränderungen sowohl in der Bezeichnung derselben wie in den Auszügen selbst zu geben. Den Abschnitten von selbständigem Werth sind die nöthigen erläuternden Bemerkungen und ein Hinweis auf andere Darstellungen, namentlich in den verschiedenen Lübecker Chroniken, beizufügen.

Eine Einleitung hat sich näher über die Person des Korner, seine Leistungen als Historiker, seine eigenthümliche Art der Benutzung und Anführung älterer Quellen, den Werth der ihm selbständig angehörigen Nachrichten, sodann über die verschiedenen Bearbeitungen der Chronik, die Handschriften und die bei der Ausgabe befolgten Grundsätze zu verbreiten.

Ein Glossar wird die ungewöhnlichen, dem Verfasser oder seiner Zeit eigenthümlichen Ausdrücke zusammenstellen und erläutern, ein Sachregister später beim Druck hinzuzufügen sein.

Für den zweiten Preis.

Wie viel auch in älterer und neuerer Zeit für die Geschichte der Welfen und namentlich des mächtigsten und bedeutendsten aus dem

jüngeren Hause, Heinrich des Löwen, gethan ist, doch fehlt es an einer vollständigen, kritischen, das Einzelne genau feststellenden und zugleich die allgemeine Bedeutung ihrer Wirksamkeit für Deutschland überhaupt und die Gebiete auf welche sich ihre Herrschaft zunächst bezog insbesondere in Zusammenhang darlegenden Bearbeitung.

Indem der Verwaltungsrath

eine Geschichte des jüngern Hauses der Welfen von 1055–1235 (von dem ersten Auftreten Welf IV. in Deutschland bis zur Errichtung des Herzogthums Braunschweig-Lüneburg)

ausschreibt, verlangt er sowohl eine ausführliche aus den Quellen geschöpfte Lebensgeschichte der einzelnen Mitglieder der Familie, namentlich der Herzoge, als auch eine genaue Darstellung der Verfassung und der sonstigen Zustände in den Herzogthümern Baiern und Sachsen unter denselben, eine möglichst vollständige Angabe der Besitzungen des Hauses im südlichen wie im nördlichen Deutschland und der Zeit und Weise ihrer Erwerbung, eine Entwicklung aller Verhältnisse, welche zur Vereinigung des zuletzt zum Herzogthum erhobenen Welfischen Territoriums in Niedersachsen geführt haben. Beizugeben sind Regesten der erhaltenen Urkunden, jedenfalls aller durch den Druck bekannt gemachten, so viel es möglich auch solcher die noch nicht veröffentlicht worden sind.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden ist zugleich Folgendes aus den Ordnungen der Stiftung hier zu wiederholen.

1. Ueber die zwei ersten Preise. Die Arbeiten können in deutscher und lateinischer Sprache abgefasst sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold, und muss jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. Ueber den dritten Preis. Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Massgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloss eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der grösseren (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung dieses Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten, und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des zehnten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmässig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, dass die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Golde, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die

Hälfte des Preises mit 500 Thalern Golde empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmässige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, dass der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller. Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. Form der Preisschriften und ihrer Einsendung. Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise

bewerben, müssen alle äussern Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiss sein kann, das seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohl thun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Aussenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres vor dem 14. März, mit welchem das zehnte beginnt (also diesmal bis zum 14. März 1875), dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. Ueber Zulässigkeit zur Preissbewerbung. Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich, wie jeder Andere, um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. Verkündigung der Preise. An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der

Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingenschen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letztern gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Preisschriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen, oder wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letztern Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschliesslich der Freiexemplare höchstens 1000

Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich gross ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine ausserordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen anderen dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu ausserordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. Bemerkung auf dem Titel derselben. Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. Freiexemplare. Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je 10 Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1871.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

3. Mai. № 5. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Abbildung algebraischer Flächen

von Prof. L. **Cremona** in Mailand, corresp. Mitgliede.

Unter den verschiedenen Hülfsmitteln, deren man sich bedienen kann, um zur geometrischen Abbildung algebraischer Flächen auf einer Ebene zu gelangen (falls sie möglich ist), scheinen mir die rationalen Transformationen des Raumes eines der einfachsten und schnellsten. Rationale Transformationen nenne ich solche, welche einen (dreifach ausgedehnten) Raum auf einem anderen Raume eindeutig abbilden (gleichgültig ob man auch die zwei Räume als sich deckende fasst), so dass den Ebenen des ersten Raumes rationale Flächen $n$ter Ordnung entsprechen, die ein lineares dreifach unendliches System bilden. Natürlich, um eine eindeutige Abbildung zu erreichen, müssen jene Flächen eine solche Zahl von gemeinschaftlichen Fundamental-Puncten und Curven haben, dass je drei von ihnen in einem einzigen veränderlichen Puncte sich schneiden. Einige solcher Transformationen sind sehr bekannt; namentlich der Fall $n=2$, wenn die

Flächen 2ter Ordnung des linearen Systems einen Fundamental-Kegelschnitt und einen, nicht auf dem Kegelschnitte gelegenen, Fundamental-Punct haben; und der Fall $n = 3$, wenn eine Fundamental-Raumcurve sechster Ordnung vorhanden ist. Der erste Fall stimmt mit der Methode der reciproken Radien überein; der zweite führt zur bekannten Abbildung einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf einer Ebene. Für diese letzte Transformation hat man nur vorausgesetzt, dass die Fund.-Curve nicht in Theile, oder sofort in zwei zusammenfallende Raumcurven dritter Ordnung oder in sechs Gerade zerfalle [1]). Fügen wir diesem noch hinzu, dass Herr Cayley [2]) eine besondere merkwürdige Transformation gefunden hat, wobei den Ebenen des ersten Raumes ein System von windschiefen cubischen Flächen entspricht, welche die doppelte Gerade und drei Erzeugende gemein haben, indem die den Ebenen des zweiten Raumes entsprechenden Flächen nur zweiter Ordnung sind und in einer Geraden und drei festen Puncten sich durchschneiden.

Schon die Transformation zweiten Grades bietet einen Fall dar, welcher, so weit mir bekannt, unbemerkt geblieben ist: nämlich den Fall, dass der Fund.-Punct auf dem Fund.-Kegelschnitte liegt. Dann entsprechen den Ebenen jedes Raumes Flächen zweiter Ordnung, welche durch einen festen Kegelschnitt gehen und in einem Puncte dieser Curve eine feste Ebene berühren. Wenn man diese Transformation auf

1) Geiser, Borchardts Journal B. 69., Sturm, ebenda B. 70.

2) On the rational Transformation between two spaces (Proceedings of the London Mathematical Society, v. III, 1870, p. 171).

eine allgemeine Fläche dritter Ordnung[1]) anwendet, erhält man auf eine ungemein einfache Weise alle die Eigenschaften der, mit einem Doppelkegelschnitte behafteten, Fläche vierter Ordnung, deren Kenntniss man Herrn Clebsch verdankt[2]).

Setzt man aber im Falle $n = 3$ voraus, dass die Fund.-Raumcurve sechster Ordnung in Theile zerfällt (was auf sehr viele verschiedene Weisen geschehen kann), so gelangt man zur Abbildung einer sehr ausgedehnten Reihe von algebraischen Flächen auf der Ebene. Ich erlaube mir, hier einige Beispiele mitzutheilen.

Sei K die Fund.-Curve des ersten Raumes, sodass eine cubische Raumcurve, welche K in 8 Puncten begegnet, K zur vollen Durchschnittscurve zweier cubischen Flächen ergänzt; und sei K' die analoge Fund.-Curve für den zweiten Raum. Dann entsprechen den Puncten von K die Geraden, welche K' dreimal schneiden, und deren Ort eine Fläche k' achter Ordnung ist, auf welcher K' eine dreifache Curve ist. Analogerweise, entsprechen den Puncten von K' die Erzeugenden einer Fläche k' achter Ordnung, auf welcher K eine dreifache Curve ist. Zerfällt K in Theile, so geschieht eine ähnliche Zerlegung für K', k, k'.

Geht man nun von einer Fläche F aus, welche einen Theil von K einfach oder mehrfach enthält, so gelangt man zu einer auf F eindeu-

1) Ich habe schon anderswo diese Anwendung ausausgeführt (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 u. 23 marzo 1871). Herr Geiser hatte bereits (Journal für Math. Bd. 70) die eindeutige Anziehung zwischen denselben Flächen aus der gewöhnlichen Transformation zweiten Grades abgeleitet.

2) Borchardts Journal Bd. 69.

tig abbildbaren Fläche F', deren Ordnung der Anzahl der Puncte gleich ist, in denen eine beliebige von K achtmal geschnittene cubische Raumcurve der Fläche F ausserhalb K noch begegnet. Eine Curve, welche ein Bestandtheil von K' ist, wird so oft von F' enthalten, als eine beliebige Erzeugende des entsprechenden Bestandtheils von k und die Fläche F nicht auf K gelegene Puncte gemein haben. Nach dieser Methode, ergeben sich auch Flächen mit Rückkehrcurven; denn man braueht nur eine Fläche F anzunehmen, welche in einen Theil von k eingeschrieben ist.

Erstes Beispiel. — K besteht aus einer Geraden C_1 und einer Raumcurve C_5 fünfter Ordnung vom Geschlechte 1, welche C_1 in drei Puncten schneidet. Dann zerfällt K' in eine Curve C_4' vierter Ordnung und erster Species, und in einen Kegelschnitt C_2', der sich auf C_4' in drei Puncten stützt. Betrachtet man nun eine Fläche F_2 zweiter Ordnung, die durch C_1 geht, so wird ihr im andern Raume eine Fläche F_5' fünfter Ordnung entsprechen, die C_4' als Doppelcurve besitzt und C_2' einfach enthält. Hieraus entspringt die ganze Theorie dieser letztern Fläche, welche Herr Clebsch zuerst dargelegt hat[1]). Die 7 Puncte a, in denen C_5' der Fläche F_2 ausserhalb C_1 noch begegnet, und die 7 Geraden von F_2, welche von C_1 und C_5 geschnitten werden, bilden sich auf F_5' als Gerade ab; und man hat somit die 7 Paare von Geraden dieser Fläche. Das System der Erzeugenden von F_2, welche C_1 treffen, entspricht der Schaar von Kegelschnitten, die entstehen, wenn man F_5' mit dem Büschel zweiter Ordnung schneidet, dessen Grundcurve C_4' ist. Die 7 Puncte a werden von

1) Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Bd. 15.

einem achten Puncte von F_2 zu einem Schnittpunctsysteme von drei Flächen 2ten Grades ergänzt; dieser achte Punkt entspricht der Spitze des Kegels 2ter Ordnung, welcher F_5' umschrieben ist. Die einzige Raumcurve 4ter Ordnung und 2ter Species, welche durch die 7 Puncte a und dreimal durch C_1 gelegt werden kann; die 21 cubischen Raumcurven, welche durch fünf Puncte a und zweimal durch C_1 gehen; die 35 Kegelschnitte welche auf F_5 liegen und durch je drei Puncte a gehen; endlich die 7 Geraden von F_2, die durch je einen Punct a gehen, ohne C_1 zu schneiden, bilden sich auf F_5 als die 64 Kegelschnitte ab, welche der oben angeführten Schaar nicht angehören. Analogerweise, bestimmen auch die 7 Puncte a die 64 Schaaren von cubischen Raumcurven, welche auf F_5' liegen. Jedem Puncte von C_4' entsprechen die zwei Puncte gleichzeitig, in denen F_2 von einer sich auf C_5 dreimal stützenden Geraden geschnitten wird; die ganze Doppelcurve von F_5' entspricht also einer Raumcurve 9ter Ordnung, welche durch C_1 fünfmal und durch jeden Punct a zweimal geht. — Projicirt man F_2 von einem auf ihr beliebig gewählten Puncte auf eine Ebene, und wendet man auf das so entstehende ebene Gebilde eine Transformation 2ten Grades an, so werden wir die niedrigste Abbildung der Fläche F'_5 erreichen, wobei die ebenen Schnitte durch Curven 4ter Ordnung mit einem doppelten und sieben einfachen Fund.-Puncten dargestellt werden.

Durch die umgekehrte Transformation, erhält man auf einer cubischen Fläche F'_3, welche die Raumcurve C'_4 enthält eine Fläche F_4 4ter Ordnung mit der Doppelgeraden C_1. Die 3 Schnittspuncte a von F_3' mit C_2'(ausserhalb C_4'); die 10 Geraden b von F_3', welche C_4' zweimal

schneiden, und die 3 Kegelschnitte von F_3', welche durch je einen Punct a gehen und mit C_4' auf je einer Fläche 2ten Grades liegen, sind die Bilder der 16 Geraden von F_4. Der Doppelgeraden entspricht die Durchschnittscurve von F_3' mit der Ebene von C_2'; und den ebenen Schnitten von F_4 entsprechen Raumcurven 5ter Ordnung (vom Geschlechte 2), welche von den durch C_4' und die Puncte a gehenden cubischen Flächen ausgeschnitten werden. Bildet man demnach F_3' auf einer Ebene so ab, dass fünf Gerade b durch fünf Fund.-Puncte 1, 2, 3, 4, 5 dargestellt werden, so wird sich sofort die niedrigste Abbildung von F_4' ergeben. Ist, in der Darstellung 'von F_3', 0 der sechste Fund.-Punct, und 6, 7, 8 die Bilder der Puncte a, so werden die ebenen Schnitte von F_4 durch Curven 4ter Ordnung, $0^2.1.2.3.4.5.6.7.8$, abgebildet [1].

Benutzt man dieselbe Transformation, um eine durch den Kegelschnitt C_2' gehende cubische Fläche F_3' umzugestalten, so wird sich eine Fläche F_6 6ter Ordnung ergeben, welche die Doppelcurve C_5 (vom Geschlechte 1) besitzt. Auf dieser Fläche liegen 10 Gerade, welche die Doppelcurve dreimal treffen; und 16 Kegelschnitte, welche sich auf C_5 in fünf Puncten stützen. Um zur niedrigsten ebenen Abbildung von F_6 zu gelangen, reicht es hin die Fläche F_3' so abzubilden, dass ein Fund.-Punct der Geraden entspricht, die mit C_2' zu einem ebenen Gesammtschnitte von F_3' ergänzt: dann werden die ebenen Schnitte von F_6 durch Curven 6ter Ordnung dargestellt, welche 5 zweifache und 10 einfache feste Puncte haben. Das Bild der Doppelcurve wird eine Curve 15ter Ordnung mit 5 fünffachen und 10 dreifachen Puncten sein.

1) Mathematische Annalen, Bd. 1, S. 261.

Geht man von einer Fläche F_3 3ter Ordnung aus, welche die Gerade C_1 enthält, so führt dieselbe Transformation zu einer Fläche 8ter Ordnung F_8' mit der dreifachen Curve C_4' und dem doppelten Kegelschnitte C_2'. Die Flächen 2ten Grades, welche durch C_4' gehen, schneiden noch aus F_8' Curven 4ter Ordnung und 2ter Species aus: unter diesen giebt es 5, die in zwei Kegelschnitte, und 12 andere, die in eine Gerade und eine cubische Raumcurve zerfallen. Jeder der 10 Kegelschnitte bildet, zusammen mit C_4' und C_2', die Grundcurve eines Büschels von cubischen Flächen, welche ausserdem aus F_8' rationale Raumcurven 6ter Ordnung ausschneiden, von denen 4 aus zwei cubischen Raumcurven bestehen: somit hat man 16 Raumcurven 3ter Ordnung, ausser den oben erwähnten 12. — In der niedrigsten ebenen Abbildung, entsprechen den ebenen Schnitten von F_8' Curven 9ter Ordnung, welche einen dreifachen (1), fünf zweifache (2, 3, 4, 5, 6) und zwölf einfache (7, 8, 9, ... 18) feste Puncte besitzen. Die dreifache Curve bildet sich als eine Curve 13ter Ordnung $1^5 . 2^4 . 3^4 .... 6^4 . 7^2 . 8^2 ... 18^2$ ab, und der doppelte Kegelschnitt als eine Curve 5ter Ordnung $1^3 . 2 . 3 ...... 18$.

Zweites Beispiel. — Die Bestandtheile der Fund.-Curve K seien eine Raumcurve C_5 5ter Ordnung vom Geschlechte 2 und eine Gerade C_1, die C_5 zweimal trifft; dann wird auch K' sich in zwei Linien C_5', C_1' derselben Art zerlegen. Wendet man diese Transformation auf einer Fläche F_2 2ten Grades an, die durch C' geht, so wird eine Fläche F_4' 4ter Ordnung entstehen, welche die doppelte Gerade C_1' besitzt. Die 8 Paare von Geraden, welche auf dieser Fläche vorhanden sind, entsprechen

den 8 Puncten, in welchen C_5 der Fläche F_2 ausserhalb C_1 noch begegnet, und den 8 Geraden von F_2, die durch diese Puncte und durch C_1 gehen.

Unterwirft man dieser Transformation eine cubische windschiefe Fläche F_3, deren Doppelgerade C_1 sei, so werden wir eine Fläche F_5' 5ter Ordnung mit der dreifachen Geraden C_1' finden. Die 11 Puncte, in denen F_3 von C_5 ausserhalb C_1 noch getroffen wird, und die aus diesen Puncten ausgehenden Erzeugenden von F_3 liefern sofort die 11 Paare von Geraden a, b, die auf F_5' existiren. Der dreifachen Geraden C_1' wird die Durchschnittscurve von F_3 mit der Fläche 2ten Grades entsprechen, welche der Ort der die Curve C_5' dreimal schneidenden Geraden ist [1]).

Mittelst derselben Transformation, führt eine allgemeine, durch C_1 gelegte, cubische Fläche F_3 zu einer Fläche F_7 7ter Ordnung mit der dreifachen Geraden C_1' und der Doppelcurve C_5'. Diese Fläche enthält 13 Gerade, die von C_1' geschnittene Sehnen von C_5' sind. Richtet man die ebene Abbildung von F_3 so ein, dass die Gerade C_1 von einem Kegelschnitte dargestellt wird, so ergibt sich die niedrigste Abbildung von F_7', wobei den ebenen Schnitten dieser Fläche Curven 7ter Ordnung mit einem dreifachen (1), fünf zweifachen (2, 3, 4, 5, 6) und dreizehn einfachen (7, 8, ... 19) festen Puncten entsprechen. Die dreifache Gerade wird durch eine Curve 6ter Ordnung $1^2. 2^2 \ldots 6^2. 7. 8 \ldots 19$, und die Doppelcurve durch eine Curve 12ter Ordnung $1^6. 2^3. 3^3. \ldots 6^3. 7^2. 8^2 \ldots 19^2$ dargestellt.

Drittes Beispiel. — K besteht aus zwei cubischen Raumcurven C_3, K_3, die vier gemeinsame Puncte haben: dann ist auch K' ein ähnliches

1) Math. Annalen, Bd. 3, S. 185.

System von zwei Raumcurven C_3', K_3'. Stellt man sich nun eine durch C_3 gehende allgemeine cubische Fläche F_3 vor, so wird das entsprechende Gebilde im zweiten Raume eine Fläche F_5' 5ter Ordnung mit einer unebenen Doppelcurve C_3' 3ter Ordnung sein. Den 5 Puncten a, in welchen K_3 die Fläche F_3 ausserhalb C_3 noch trifft, und den 6 Geraden b von F_3, welche die Curve C_3 zweimal schneiden, entsprechen die 11 Geraden von F_5'; und die Doppelcurve C_3' entspricht einer Curve 9ter Ordnung, welche der Ort der Begegnungspuncte von F_3 mit den Geraden ist, die K_3 zweimal und C_3 einmal treffen. Ordnet man die ebene Abbildung von F_3 so an, dass die Geraden b durch sechs Puncte 1, 2, ... 6 dargestellt werden, und sind 7, 8, .. 11 die Bilder der fünf Puncte a, so wird man ohne weiteres die niedrigste Abbildung von F_5' erhalten, wobei die ebenen Schnitte sich als Curven vierter Ordnung 1. 2. 3. .... 11 abbilden, und die Doppelcurve durch eine hyperelliptische Curve 7ter Ordnung mit eilf Doppelpuncten dargestellt wird [1]).

Viertes Beispiel. — K besteht aus einer Curve C_4 4ter Ordnung und erster Species, und aus zwei windschief liegenden Sehnen A, B derselben. Durchaus ähnlich wird dann die Zerlegung von K' sein. Wenn man durch A und B eine allgemeine cubische Fläche F_3 hindurchlegt, so wird ihr im andern Raume eine Fläche fünfter Ordnung, F_5', entsprechen, die zwei sich nicht schneidende Doppelgerade A', B' besitzt. Diese Fläche enthält 13 Gerade: sie entstehen aus den 8 Puncten, in welchen C_4 die Fläche F_3 ausserhalb A und B noch trifft, und aus den 5 Ge-

1) Math. Annalen, Bd. 1, S. 284.

raden von F_3, die A und B schneiden. Den zwei Doppelgeraden von F_5' entsprechen zwei Raumcurven 5ter Ordnung (vom Geschlechte 2), die bezüglich mit A, B den Gesammtdurchschnitt von F_3 mit zwei durch C_4 gehenden Flächen 2ten Grades bilden. Nimmt man nun die Fund.-Puncte 1, 2,... 6 der ebenen Abbildung von F_3 so an, dass den Geraden A, B, die Kegelschnitte 1.3.4.5.6, 2.3.4.5.6 entsprechen, so wird sich auch die niedrigste Abbildung von F_5' ergeben: die Bilder der ebenen Schnitte dieser Fläche werden Curven 5ter Ordnung sein, die zwei Doppelpuncte 1, 2 und zwölf einfache feste Puncte 3, 4,..... 14 haben: wo die Puncte 7, 8,... 14 den Durchschnittspuncten von F_2 und C_4 entsprechen [1]).

Legt man F_3 nicht durch A und B, aber durch C_4 hindurch, so erhalten wir wieder eine Fläche F_5' 5ter Ordnung, mit der Doppelcurve C_4' (1ter Species). Die 14 Geraden dieser Fläche entsprechen 1° den 2 Puncten a, in welchen A, B die F_3 ausserhalb C_4 noch treffen; 2° den 10 Geraden b von F_3, welche Sehnen von C_4 sind; 3° den 2 Kegelschnitten, die durch einen Punct a gehen und C_4 viermal begegnen. Um zur niedrigsten Abbildung von F_5' zu gelangen, wird man fünf Fund.-Puncte 1, 2,... 5 der Abbildung von F_3 so annehmen, dass sie fünf Geraden b darstellen. Ist 0 der sechste Fund.-Punct dieser letzten Abbildung, und sind 6, 7 die Bilder der zwei Puncte a, so werden die Curven 4er Ordnung 0^2.1.2.3... 7 den ebenen Schnitten von F_5' entsprechen.

Dieselbe Transformation bietet eine unmittelbare und ungemein leichte Behandlung einer

1) Math. Annalen, Bd. 1, S. 306.

Aufgabe dar, die von Herrn Clebsch vorgelegt und von Herrn Lüroth gelöst wurde[1]). Die Aufgabe lautet: »Die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, welche eine Curve 4ter Ordnung, 1ter Species, in drei und fünf ihrer Sehnen in je einem Puncte treffen«. Sei C_4 die Raumcurve; A, B, C, D, E, ihre gegebenen Sehnen. Ich nehme das System (C_4, A, B) als Fund.-Curve eines durch eine cubische Transformation umzuformenden Raumes an; so wird der zweite Raum ein ähnliches Fund.-System (C_4', A', B') besitzen. Dann entsprechen den Sehnen C, D, E drei Gerade C', D', E', welche ebenso Sehnen von C_4' sind, und es entspricht irgend einem Kegelschnitte, welcher C_4 dreimal, A und B je einmal trifft, eine Gerade, welche C_4' nur einmal begegnet. Die vorgelegte Aufgabe gestaltet sich also in die folgende um: »Die Anzahl der Geraden zu bestimmen welche eine Curve C'_4 (4ter Ordnung und 1ter Species) und drei ihrer Sehnen C', D', E' in je einem Puncte treffen«. Der Durchschnitt des Hyperboloïds $(C' \; D' \; E')$ mit der Curve C_4' giebt dann ohne weiteres die zwei Lösungen der Frage.

Es versteht sich von selbst, dass man viele andere, die Kegelschnitte und die unebenen cubischen Curven im Raume betreffenden Aufgaben in ähnlicher Weise vereinfachen und auflösen kann.

Fünftes Beispiel. — Die Bestandtheile von K sind eine Curve 4ter Ordnung und 2ter Species, C_4, und ein Kegelschnitt C_2, der sich auf C_4 in vier Puncten stützt; dann wird K' ein ähnliches System (C_4', C_2') sein.

Ist eine durch C_2 gehende cubische Fläche

1) Math. Annalen, Bd. 3, S. 124.

F_3 gegeben, so liefert die Transformation eine Fläche 7er Ordnung F_7' mit dem dreifachen Kegelschnitte C_2' und der Doppelcurve C_4'. Diese Fläche enthält 9 Gerade und 16 (einfache) Kegelschnitte: eine Gerade ist eine Sehne von C_2'; die anderen 8 Geraden sind Sehnen von C_4', welche noch C_2' treffen. In der niedrigsten Abbildung werden die ebenen Schnitte durch Curven 6ter Ordnung dargestellt, die fünf feste Doppelpuncte 1, 2, 3, 4, 5 und neun einfache gleichfalls feste Puncte 6, 7, 8 ... 14 haben. Der dreifache Kegelschnitt bildet sich auf einer Curve 6ter Ordnung $1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2 . 5^2 . 6^2 . 7 . 8 \ldots 14$, ab, und die Doppelcurve C_4 auf einer hyperelliptischen Curve 9ter Ordnung $1^3 . 2^3 . 3^3 . 4^3 . 5^3 . 7^2 . 8^2 \ldots 14^2$.

Legen wir durch C_2 eine Fläche 2ten Grades, so werden wir eine Fläche 4ter Ordnung mit dem Doppelkegelschnitte C'_2 erhalten.

Einer durch C_4 gelegten Fläche F_4 4ter Ordnung, welche eine von C_4 dreimal geschnittene Doppelgerade besitzt, entspricht eine Fläche 6ter Ordnung F_6', welche C_2' einfach, C_4' zweifach enthält und einen auf C_2' gelegenen dreifachen Punct o hat. Dieser Fläche gehören die drei von o ausgehenden Sehnen von C_4' an, und ausserdem vier andere Gerade, welche C_4' dreimal schneiden. In der niedrigsten Abbildung von F_6', werden die ebenen Schnitte durch Curven 7ter Ordnung abgebildet, die neun Doppelpuncte und sieben einfache Puncte gemein haben. Das Bild des dreifachen Punctes o ist eine Curve 3ter Ordnung, welche die neun doppelten und drei einfachen Fund.-Puncte enthält. Der Doppelcurve C_4' entspricht eine hyperelliptische Curve 14ter Ordnung, welche viermal durch jeden doppelten, zweimal durch die oben erwähnten

drei einfachen, und dreimal durch die übrigen einfachen Fund.-Puncte geht.

Sechstes Beispiel. — Drei Kegelschnitte A, B, C, machen die Fund.-Curve K aus: A hat zwei Puncte gemein mit jeder der beiden anderen, und diese schneiden sich nur in einem Puncte. Die Fund.-Curve im anderen Raume wird dann aus einer Raumcurve C_4' 4ter Ordnung und 2ter Species, und aus zwei sich kreuzenden Sehnen derselben R', S' zusammengesetzt. Ist im ersten Raume eine cubische Fläche F_3 gegeben, welche durch den Kegelschnitt C geht, so wird ihr eine Fläche 6ter Ordnung F_6' entsprechen, welche eine Doppelcurve C_4' und eine Doppelgerade R' besitzt. Diese Fläche enthält 10 Gerade, von denen 4 die Doppelcurve dreimal schneiden: dagegen schneiden die übrigen C_4' zweimal und R' einmal. — In der niedrigsten Abbildung von F_6', werden die ebenen Schnitte durch Curven 6ter Ordnung mit 5 zweifachen und $6 + 4$ einfachen festen Puncten dargestellt. Der Doppelgeraden entspricht eine cubische Curve welche die 5 zweifachen und 6 einfachen Fund.-Puncte enthält; und der Doppelcurve C_4' entspricht eine Curve 12ter Ordnung, welche durch die $5 + 6 + 4$ Fund.-Puncte bezüglich 4, 2, 3mal geht. Uebrigens ist diese Fläche ein besonderer Fall der oben im 1ten Beispiele betrachteten Fläche 6ter Ordnung, welche eine Doppelcurve 5ter Ordnung vom Geschlechte 1 besitzt.

Die vorliegende Transformation führt wieder zu einer Fläche 4ter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte, wenn man von einer durch die Geraden R', S' gelegten Fläche 2ten Grades ausgeht.

Siebentes Beispiel. — K besteht aus vier windschief liegenden Geraden C, D, E, F und aus ihren

Transversalen A, B; im zweiten Raume werden wir ein ähnliches System ($C' D'$, E', F', A', F',) haben. Wendet man diese Transformation auf eine durch A, B, C gehende cubische Fläche F_3 an, so wird man eine mit drei dreifachen A', B', C' und drei zweifachen Geraden D', E', F' behaftete Fläche 7ter Ordnung F_7' ableiten. Diese Fläche enthält noch 9 einfache Gerade. In der niedrigsten Abbildung haben die ebenen Schnitte zu Bildern Curven 4ter Ordnung, die neun einfache feste Puncte 1, 2, ... 9 haben. Den vielfachen Geraden A', B', C', D' E', F' entsprechen die Kegelschnitte 1.2.3.4.5, 1.2.3.4.6, 5.6.7.8.9 und die Ge- Geraden 8.9, 9.7, 7.8.

Achtes Beispiel. — Setzen wir nun voraus dass K aus einer ebenen cubischen Curve K_3 und aus einer cubischen Raumcurve C_3 bestehe, wobei C_3 und K_3 drei Puncte gemein haben; dann wird K' eine mit einem dreifachen Puncte o behaftete Raumcurve K_6' 6ter Ordnung, vom Geschlechte 1. Legt man durch K_3 eine Fläche F_3 3ter Ordnung, so wird der umgeformte Ort eine Fläche F_6' 6ter Ordnung sein, welche K_6' zur Doppelcurve und o zum dreifachen Puncte hat. Diese Fläche enthält 6 sich nicht schneidende Gerade, welche den 6 ausserhalb K_3 fallenden Durchschnittspuncten a von F_3 mit C_3; und 27 Kegelschnitte, welche den 27 Geraden von F_3 entsprechen. Die ebenen Schnitte von F_6' werden auf F_3' durch Curven 6ter Ordnung dargestellt, welche von den die sechs Puncte a enthaltenden Flächen 2ten Grades ausgeschnitten werden. Handelt es sich also darum, die cubische Fläche F_3 in die Fläche 6ter Ordnung F_6' überzuführen, so kann man statt der cubischen Transformation, deren Grund-

curve aus K_3 und C_3 besteht, eine quadratische Transformation anwenden: das heisst, ein dreimal unendliches lineares System von Flächen 2ten Grades als den Ebenen des anderen Raumes entsprechend annehmen. Alle diese Flächen gehen durch die sechs festen Puncte a; folglich ist diese Transformation nur unter der Bedingung umkehrbar, dass man sie mit der Gleichung der Fläche verknüpft, die transformirt werden soll. In der That schneiden sich je drei jener Flächen 2ten Grades noch in zwei Puncten; und die Fläche F_3 wird nur von einem derselben durchlaufen. — Die gewöhnliche Darstellung von F_3 giebt unmittelbar die niedrigste ebene Abbildung von F_6'; den ebenen Schnitten entsprechen Curven 6ter Ordnung, welche sechs doppelte und sechs einfache feste Puncte haben. Das Bild des dreifachen Punctes o besteht aus drei Puncten, die in der Abbildung von F_3 den drei Begegnungspuncten von C_3 und K_3 entsprechen. Die Doppelcurve K_6' wird durch eine Curve 15ter Ordnung mit sechs fünffachen, sechs dreifachen und drei doppelten Puncten dargestellt.

Geht F_3 durch C_3, nicht durch K_3, so wird eine Fläche F_4' 4ter Ordnung mit dem dreifachen Puncte o entstehen: den 6 auf F_3 liegenden Sehnen von C_3, und den 6 Puncten, in welchen F_3 und K_3 ausserhalb C_3 sich treffen, entsprechen 12 Gerade von F_4', welche durch o gehen. Die niedrigste Abbildung fällt hier mit der Centralprojection aus o zusammen.

Bei dieser Transformation entsprechen den windschiefen Flächen, deren Erzeugende Sehnen von C_3 sind, die Kegel mit der Spitze o. Insbesondere entspricht der von den Tangenten von C_3 gebildeten Fläche der von o an die Fläche gelegte Berührungskegel (2ten Grades), welcher

der Ort der die Curve K_6' dreimal treffenden Geraden ist.

Sei C_3 das System von drei Geraden A, B, C, von denen die beiden ersten windschief liegen, während beide von der dritten geschnitten werden. Nehmen wir nun eine windschiefe Fläche $(m+n)$ter Ordnung an, auf welcher A eine m-fache, B eine n-fache Directrix, und C eine einfache Erzeugende sein möge. Der entsprechende Ort im andren Raume wird dann ein Kegel $(m+n-1)$ter Ordnung mit der Spitze o sein: dieser Kegel besitzt eine $(m-1)$fache und eine $(n-1)$fache Kante, A', B'.

Neuntes Beispiel. — Seien nun die Bestandtheile von K eine cubische Raumcurve C_3, eine Gerade C_1, und ein Kegelschnitt C_2, welcher C_3 dreimal und C_1 zweimal begegnet. Dann besteht K' aus einer rationalen Curve C_5' 5ter Ordnung mit einem dreifachen Puncte o, und aus einer Sehne C', derselben Curve. Mittelst dieser Transformation geht eine durch C_2 gelegte Fläche F_2 2ten Grades in eine Fläche 5ter Ordnung mit dem dreifachen Puncte o und der Doppelcurve C_5' über. Diese Fläche enthält ausser C_1', noch 9 Gerade, welche den drei (nicht auf C_2 liegenden) Begegnungspuncten a von F_2 mit C_3, und den sechs aus den Puncten a ausgehenden Geraden von F_2 entsprechen: und diese 10 Geraden bilden 10 Doppeldreien [1]). Auf F_5' liegen fünf Schaaren von Kegelschnitten: und die Auflösung der Gleichung 5ten Grades, welche diese fünf Schaaren gibt, liefert ohne weiteres die Auflösung der zwei Gleichungen 10ten Grades, von denen die zehn Geraden und die zehn Doppeldreien abhängen. — Den ebenen

1) Mathem. Annalen, 3er Band, S. 75, Anmerkung.

Schnitten von F_5 entsprechen auf F_2 Curven 4ter Ordnung und 1ter Species, so dass eine quadratische Transformation existirt, welche, mit Hülfe der Gleichung von F_2, von dieser Fläche zu F_5 führt. — Aus der Centralprojection von F_2 und einer darauf folgenden quadratischen ebenen Transformation, ergibt sich die niedrigste Abbildung von F_5', wobei die Bilder der ebenen Schnitte Curven 3ter Ordnung sind, die durch vier feste Puncte gehen. Der Doppelcurve entspricht eine hyperelliptische Curve 6ter Ordnung mit 7 Doppelpuncten, welche mit den 4 Fund.-Puncten und 3 anderen, das Bild des dreifachen Punctes o ausmachenden, Puncten zusammenfallen.

Durch die umgekehrte Transformation, führt eine den Punct o und die Gerade C_1' enthaltende cubische Fläche F_3' zu einer Fläche 6ter Ordnung F_6, welche eine doppelte Raumcurve 3ter Ordnung C_3 und eine diese nicht schneidende Doppelgerade C_1 besitzt. Diese Fläche enthält 10 Gerade, welche den Puncten entsprechen, in welchen F_3' und C_5' sich ausserhalb o und C_1' noch treffen; 12 Kegelschnitte, welche den 10 von C_1' geschnittenen Geraden von F_3', dem in der Ebene o C_1' liegenden Kegelschnitte von F_3', und dem Puncte o entsprechen; 32 cubische Raumcurven, welche den 16 von C_1' nicht getroffenen Geraden von F_3', und den 16 durch o gehenden und von C_1' geschnittenen Kegelschnitten von F_3' entsprechen; u. s. w. — Man bilde F_3' auf einer Ebene so ab, dass die Gerade C_1' durch den Kegelschnitt 1. 2. 3. 4. 5 dargestellt werde; sei 0 der sechste Fund.-Punct dieser Abbildung; 6 des Bild des Punctes o (von F_3'); und 7, 8, ... 16 die Bilder der Begegnungspuncte von F_3' mit C_5'. Dann haben wir die niedrigste Abbildung von F_6': die

ebenen Schnitte werden durch Curven 7ter Ordnung $0^8.1^2.2^2\ldots 6^2.7.8\ldots 16$; die Doppelgerade durch eine hyperelliptische Curve 6ter Ordnung $0^2.1^2.2^2\ldots 6^2.7.8\ldots 16$; und die cubische Doppelcurve durch eine ebenfalls hyperelliptische Curve 11ter Ordnung $0^5.1^3.2^3\ldots 6^3.7^2.8^2\ldots 16^2$ dargestellt [1]).

Es schien mir nicht überflüssig, eine grössere Anzahl von Beispielen anzuführen, um die Nützlichkeit dieses Verfahrens möglichst gut zu beweisen; denn es sind, nicht nur alle schon von Herrn Clebsch und Nöther untersuchten Flächen, sondern auch manche andere auf die leichstete Weise entstanden. Die oben angewandten Transformationen sind solcher Art, dass ihnen umgekehrte Transformationen gleicher Ordnung entsprechen; es giebt aber noch andere, welche, bei der Umkehrung, ihre Ordnung ändern. Z. B. gibt es drei cubische Transformationen, denen Transformationen 4ten, 5ten, 6ten Grades bezüglich entsprechen [2]). Die Flächen 3ter Ordnung des ersten Raumes, welche auf den Ebenen des zweiten sich abbilden, haben bei der ersten Transformation eine Curve 5ter Ordnung (vom Geschlechte 1) und einen Punct; bei der zweiten eine cubische Raumcurve, eine diese nicht schneidende Gerade und zwei Puncte; bei der dritten einen Doppelpunct, drei einfache Puncte und einen ebenen Schnitt gemein.

Es liegt keine Schwierigkeit vor, wenn man Transformationen höherer Ordnung betrachten

1) Matth. Annalen, Bd. 3, S. 203.

2) Die beiden erstern sind in der oben citirten Abhandlung von H. Cayley berührt.

will, mögen sie aus Verbindungen und Wiederholungen der bekannten quadratischen und cubischen Transformationen, oder vielmehr aus directen Forschungen hervorgehen. Ich werde hier nur wenige Beispiele angeben.

Es gibt eine Transformation 2ten Grades, deren Umkehrung zum 11ten Grade führt. Den Ebenen des ersten Raumes entsprechen Flächen 2ten Grades, welche vier feste Puncte und in einem derselben eine feste Berührungsebene haben. Den Ebenen des zweiten Raumes entsprechen Steinersche Flächen, welche die drei Doppelgeraden und noch einen Kegelschnitt gemein haben. Geht man von einer beliebig im ersten Raume liegenden Fläche 2ter Ordnung aus, so erhält man eine mit drei konischen und einem uniplanaren Puncte behaftete Fläche 4ter Ordnung, welche vier im letzten Puncte sich kreuzende und auf einer Ebene liegende Gerade besitzt. Es ist dies vielleicht das erste Beispiel einer auf einer Ebene abbildbaren Fläche 4ter Ordnung, welche weder eine doppelte Linie noch einen dreifachen Punct hat.

Wenn man die im 4ten Beispiele betrachtete Transformation zweimal ausführt, so entsteht eine Transformation 5ten Grades, wobei den Ebenen jedes Raumes Flächen 5ter Ordnung entsprechen, welche eine feste Doppelcurve 4ter Ordnung und erster Species besitzen und durch vier feste Sehnen dieser Curve gehen. Mittelst dieser Transformation bewirkt man den Uebergang von einer Fläche 3ter Ordnung zu einer Fläche 7ter Ordnung mit einer dreifachen Curve 4ter Ordnung und erster Species. Die niedrigste ebene Abbildung dieser Fläche ist so beschaffen, dass den ebenen Schnitten Curven 5ter Ordnung mit einem dreifachen (0) und neun

einfachen festen Puncten 1, 2, .. 9, und der dreifachen Curve eine Curve 9ter Ordnung $0^5.1^2.2^2...9^2$ entspricht. Die Puncte dieser Curve bilden solche Tripel, dass, wenn eine von 0 ausgehende Gerade die Curve in vier Puncten schneidet, die vier Paare von zugehörigen Puncten, mit 1, 2, .. 9 zusammen, auf einer Curve 4ter Ordnung liegen, welche in 0 einen Doppelpunct hat.

Es gibt eine Transformation 4ten Grades, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen 4ter Ordnung entsprechen, welche einen doppelten Kegelschnitt, eine Curve 4ter Ordnung und 2ter Species, und einen Punct gemein haben. Die umgekehrte Transformation ist wieder 4ten Grades.

Bei einer anderen Transformation 4ten Grades, entsprechen den Ebenen des ersten Raumes Flächen 4ter Ordnung, welche einen gemeinsamen Doppelkegelschnitt haben und durch eine feste Curve 5ter Ordnung (vom Geschlechte 1) gehen. Die umgekehrte Transformation ist nur 3ten Grades.

Es gibt eine Transformation $n$ter Ordnung, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen $n$ter Ordnung entsprechen, welche eine $(n-2)$fache Gerade und eine Curve $(3n-4)$ter Ordnung (vom Geschlechte $3n-7$) gemein haben. Diese Curve trifft die vielfache Gerade in $3n-7$ Puncten. Die umgekehrte Transformation ist wieder $n$ten Grades.

Schliesslich können wir aussagen: sobald die ebene Abbildung einer Fläche vollzogen ist, ist man im Stande, alle die Transformationen anzugeben, bei welchen den Ebenen eines Raumes Flächen entsprechen, die derselben Art sind, wie die gegebene, und welche dieselben vielfachen Linien und Puncte besitzen.

Untersuchungen über den Bau und die Verwandtschaft der Hyperiden

von Prof. Dr. **C. Claus.**

Seitdem die auffallenden Geschlechtsunterschiede der männlichen und weiblichen *Phronimella elongata* [1]) bekannt geworden und das Vorkommen eines unteren Antennenpaares bei der männlichen Form nachgewiesen worden war, lag die Vermuthung nahe, einen ähnlichen ausgeprägten Dimorphismus auch bei andern Hyperiden verbreitet zu finden, zumal mehrere Gattungen ausschliesslich nach dem einen oder andern Geschlecht aufgestellt waren. In der That wurde ziemlich gleichzeitig von Spence Bate [2]) und Fr. Müller [3]) dargethan, das die *Edwardsche* Gattung *Lestrigonus* die Männchen von *Hyperia* enthält. Fr. Müller fand ein ähnliches Verhältniss als das von mir bei *Phronimella* nachgewiesene bei *Brachyscelus* vor, dessen Weibchen nach Sp. Bate der hintern Fühler entbehren. Auch hier besitzt die männliche Form hintere Antennen und zwar mit der eigenthümlich zickzackförmigen Aneinanderlagerung der Glieder, welche M. Edwards zur Aufstellung seiner Unterfamilie der »Hyperines anormales« veranlasst hatte. Solche auf einen offenbar noch unvollständig erkannten Geschlechtsdimorphismus hinweisende Beobachtungen, sowie die von Sp. Bate für *Vibilia*, *Brachyscelus*, *Platyscelus* beschriebene Metamorphose forderten längst zu erneueten Untersuchungen über den Bau und die Organi-

1) C. Claus, über Phronima elongata. Würzb. naturw. Zeitschr. Tom. III. 1862.
2) Spence Bate, Catalogue of Amphipoda of the British Museum. 1862.
3) Fr. Müller, Für Darwin. 1863.

sation der Hyperiden auf und gaben mir Veranlassung zu einer ausführlichen Arbeit [1]), aus der ich mir erlaube, im Nachfolgenden einige Resultate mitzutheilen.

1. *Oxycephaliden.*

Ich beginne mit dem Nachweise eines bei den Amphipoden bislang noch nicht bekannt gewordenen Gehörorganes. Dasselbe findet sich bei allen Oxycephaliden, die ich bislang untersuchen konnte, oberhalb des Gehirnes zwischen den grossen Nerven, welche zu dem vordern die Riechfäden tragenden Fühlerpaare treten. Ueberall trifft man in dem mittleren Kopfabschnitt zwei grosse, der Mittellinie mehr oder minder genäherte Gehörblasen, zu denen von den Hirnhälften je ein längerer oder kürzerer Nerv herantritt. Die Wandung des grossen mit Otolithen gefüllten Säckchens besteht aus doppelten Membranen, einer äussern Bindegewebshülle und einer inneren reich mit Kernen erfüllten Hülle. Die erstere geht als Fortsetzung aus der Scheide des Gehirnes hervor und wird durch einen langen fadenförmigen Ausläufer, eine Art Aufhängeband, getragen. Die innere scheint mit ihren zahlreichen Zellresten und Kernen nervöser Natur zu sein; in dieselbe tritt der bei *Oxycephalus* circa 20 Nervenfasern enthaltende kurze Gehörnerv, ohne dass es möglich war, an den Weingeistpräparaten über das Ende derselben ins Klare zu kommen. Hörstäbe

1) Dieselbe ist wesentlich gefördert worden durch die Liberalität des Hamburger Museums, dessen prachtvoll erhaltenes noch nicht näher bestimmes meist von Capit. Schnehagen gesammeltes Hyperidenmaterial mir von Herrn Dr. Bolau zur Bestimmung und zum freien wissenschaftlichen Gebrauche übersandt wurde.

und Haare (vom Nerven zum Otolithen) wurden nicht beobachtet. Denkt man sich den Hörnerven zwischen den grossen Fühlernerven continuirlich verlängert, so wird die Gehörblase zuletzt in die Basis des inneren Antennen zu liegen kommen, eine Lage, wie sie bekanntlich für das Gehörorgan der Decapoden zutrifft. Ueber den feineren Bau des grossen mächtig entwickelten Auges, zu dessen Studium die Hyperiden ausserordentlich günstig sind, mag hier nur kurz bemerkt werden, dass ich mit Max Schultze in der scharfen Abgrenzung der Krystallkegel von den Nervenstäben vollkommen übereinstimme. Gewöhnlich setzen vier Nevenelemente einen Stab zusammen, während sich der lange Krystallkegel stets aus nur 2 Längssegmenten zusammensetzt, und demgemäss auch nur 2 Sempersche Kerne vorhanden sind. Auch das Geruchsorgan erscheint von bedeutender Entwicklung vornehmlich beim Männchen, dessen Vorderfühler eine gewaltige Auftreibung seines Schaftes zur Aufnahme des Ganglions zeigt und an dem gewölbten Theile der Oberfläche Tausende von langen und zarten in Querreihen angeordneten Riechhaaren trägt.

Das Nervensystem bietet uns ein Beispiel einer grösseren Concentration seiner Ganglien, als sie seither für Amphipoden bekannt geworden war. Die ansehnliche untere Schlundganglienmasse vereinigt in sich auch die Ganglien der beiden vorderen Brustsegmente (mit den 2 Gnathopodenpaaren). Dann folgen in dem 3ten bis 6ten Brustsegmente 4 Ganglien, von denen das letzte als Doppelganglion zugleich die Elemente des letzten Brustganglions in sich einschliesst und demgemäss auch die Nerven zum 7ten Beinpaare entsendet. Möglicherweise steht mit diesem Verhalten die Reduktion des letzten Beinpaares

der *Oxycephaliden* (und auch *Typhiden*) im Zusammenhang. Im Abdomen finden sich nur 3 Ganglien und zwar in den 3 vorderen Segmenten, sodass die ganze Bauchkette nicht mehr als 8 Anschwellungen darbietet. Was die Seitennerven anbetrifft, so treten dieselben keineswegs, wie Leydig[1]) bemerkt nur aus den Ganglien, sondern überall ganz constant auch aus den Längscommissuren zwischen den Ganglien hervor.

Der Darmcanal trägt zwei lange, bei *Simorhynchus* und *Schnehagenia* vielfach ausgebuchtete und in kurze Nebenanhänge auslaufende Leberschläuche. Das Herz erstreckt sich vom 2ten bis zur Mitte des 6ten Brustsegmentes, besitzt 2 Paare von Spaltöffnungen im 3ten und 4ten Segmente und setzt sich an beiden Enden in enge Arterien fort. Kiemenanhänge erheben sich in der Regel, wie bei den Hyperiden überhaupt, an allen Beinen mit Ausnahme des vordern und hintern Paares, sind jedoch bei *Oxycephalus* auf das 5te und 6te Beinpaar reducirt.

Die beiden Geschlechter unterscheidet man mit Sicherheit an der Form des vordern Fühlerpaares, dessen Schaft beim Weibchen schmal bleibt und nur wenige Riechhaare trägt. Dazu kommt, dass wenigstens bei *Oxycephalus* und *Rhabdosoma*, wahrscheinlich aber auch bei den übrigen Gattungen, von denen nur die Männchen bekannt geworden sind, dem Weibchen sowohl die hintern Fühler als die Mandibulartaster fehlen. Im männlichen Geschlecht bestehen die langen Hinterfühler aus vier dünnen stabförmig gestreckten Gliedern und einem kurzen Endgliede. Alle sind am Innenrand mit zahlreichen feinen Tasthaaren besetzt.

1) Leydig, Handbuch der vergleichenden Anatomie. 1. Band. Tübingen 1864.

Dem äussern Baue nach charakterisiren sich die Oxycephaliden durch die Verlängerung des vordern Kopfabschnittes in Gestalt eines mehr oder minder entwickelten Schnabels, an dessen ausgehölter Unterseite dicht vor dem Auge die vordern Fühler versteckt liegen. Auch die hintern Fühler des Männchens sowie dessen Mandibulartaster werden in der untern concav eingebogenen Kopffläche eingeschlagen. Die Mundwerkzeuge sind zum Einschneiden, Stechen und Saugen eingerichtet. Die Mandibeln bleiben kurz und finden sich an dem Rande der Oberlippe eingelenkt, mit der sie zusammen die Mundöffnung umgrenzen. Beide Paare der Unterkiefer sind so rudimentär, dass es kaum gelingt, Spuren derselben aufzufinden. Die grosse Unterlippe endet mit 2 grossen Seitenlappen und einer kleinen medianen Zunge. Von den Beinen der Brust enden die beiden vordern Paare in der Regel mit zusammengesetzten Scheeren. Das 5te und 6te Beinpaar sind am stärksten entwickelt, ihre Femoralglieder mit Ausnahme von Oxycephalus zu grossen Lamellen verbreitert, unter denen das 7te kleine Beinpaar mit ebenfalls lamellösem Femoralgliede theilweise versteckt getragen wird. Ueberall ist das 5te und 6te [1]) Abdominalsegment zu einem gemeinsamen Abschnitte verschmolzen. An diesem entspringen, fast durch den ganzen Seitenrand getrennt, das 2te und 3 Paar der Caudalgriffel.

1) Dieser Charakter ist ebenso für sämmtliche Typhiden durchgreifend, trotzdem aber bislang theilweise übersehen, theilweise missverstanden worden. So hat Spence Bate für Rhabdosoma sowohl als für Brachyscelus irrthümlich die Verschmelzung auf das 4te und 5te Glied bezogen (Catal. p. 329) und demgemäss den Ursprung der entsprechen Caudalgriffel falsch gedeutet.

Oxycephalus Edw. Körper gestreckt, im weiblichen Geschlecht mit erweiterter Brustregion, Schnabel triangulär, vorn zugespitzt, von ansehnlicher Grösse. Geissel der vordern Antennen 3gliedrig. Basalglied des Mandibulartaster stabförmig bis in die Nähe der vordern Antennen verlängert. Die beiden kurzen vordern Beinpaare enden mit zusammengesetzter Scheere. Caudalgriffel mit 2 lanzetförmigen Aesten. Schwanzplatte triangulär.

O. piscator Edw. Schnabel beträchtlich kürzer als der Kopf. Die Brustsegmente auf dem Rücken je in 2 warzenförmige Erhebungen ausgezogen, an den Seiten mit 2 Paaren von Tuberkeln. Die 3 vordern Abdominalsegmente laufen in der Mitte des Seitenrandes in eine hakenförmige Spitze aus. Endäste der 2 hintern Caudalgriffelpaare nur wenig kürzer als das Basalglied. Circa 20 (♂) bis 30 (♀) mm. lang.

Findet sich weit verbreitet im Indischen Meere und im Atlantischen Ocean.

Die von *Guérin* als *O. oceanicus* beschriebene Form ist nichts als das nur unausgebildete Männchen von *O. piscator*, dessen Hinterantennen [1]) noch relativ kurz sind und aus 4 schlauchförmigen mit Bildungszellen erfüllten Gliedern bestehen, übrigens noch der Sonderung des Endgliedes entbehren. Ebenso sind die Mandibulartaster noch ganz kurz und in der Bildung be-

1) Ohne allen Zweifel werden sich die jungen Männchen von Brachyscelus ebenso verhalten, da ein so hoch ausgebildetes Organ wie die hintern Antennen derselben unmöglich plötzlich im letzten Entwickelungsstadium erscheinen kann. Demgemäss dürfte die Fr. Müller entlehnte Bemerkung in Darwin's Werke (die Abstammung des Menschen und die geschlechtliche Zuchtwahl 1871. pag. 302) zu berichtigen sein.

griffen. Junge Weibchen bis zu einer Grösse von 10 mm. herab entbehren sowohl der hintern Antennen als der Mandibnlartaster.

O. tenuirostris n. sp. Schnabel überaus dünn und gestreckt ungefähr so lang als der Kopf. Nackengegend desselben verengert und tief eingebogen. Körper schlank und gracil, mit sehr dünnen Beinen. Das verschmolzene Caudalsegment stabförmig verlängert, ebenso die Basalglieder der beiden vordern Caudalgriffelpaare, welche mindestens 4 bis 5mal so lang sind als ihre lanzetförmigen Endäste (Annäherung an Rhabdosoma) circa 10 mm. lang. Gefangen von Capit. Schnehagen in der Gilolo Passage.

Rhabdosoma White. Körper stabförmig, mit sehr langem stilförmig verlängerten Schnabel und langer sehr stark verengter Nackengegend des Kopfes. Geissel der vordern Antennen einfach, nicht deutlich gegliedert. Basalgglied der Mandibulartaster stabförmig. Die hinteren Segmente des Abdomens und die Stile der Caudalgriffel ausserordentlich lang. Die 2 vordern Beinpaare kurz mit zusammengesetzten Scheeren. 5tes und 6tes Beinpaar den beiden vorausgehenden Paaren ähnlich, ihre Femoralglieder nicht verbreitert. Kiemen auf das 5te und 6te Segment beschränkt, sehr gross. Letztes Brustsegment ganz kurz, Beinpaar desselben auf die lamellöse Femoralplatte reducirt.

Rh. armatum[1]) Edw. Kopf und Schnabel ungefähr solang als der nachfolgende Körper.

1) Die von Sp. Bate als Rh. Whitii unterschiedene Art ist offenbar das Männchen von Rh. armatum Edw, während sich die als Rh. armatum dargestellte Form auf ein Weibchen mit etwas abweichenden Längenverhältnissen der Caudalgriffel bezieht, dessen specifische Verschiedenheit mir nicht erwiesen zu sein scheint.

Das verschmolzene Abdominalsegment etwas länger als das voraus gehende 4te Segment. 2tes Caudalgriffelpaar mit den lanzetförmigen Aesten über den Rand des verschmolzenen Schwanzsegmentes hinausragend. Schwanzplatte linear, ungefähr so lang als die vorausgehenden Schwanzsegmente. Ungefähr 2 Zoll lang. Südsee und süd. atl. Ocean.

Simorhynchus n. g. Kopf breit und gedrungen, mit kurzem schräg abfallenden vorn abgestutzten Stirntheil (Schnabel), in seiner Form einem Nagethierkopfe ähnlich. Untere Seitenränder des Kopfes weit abstehend. Körper gedrungen. Ganglien der Bauchkette sehr dicht gedrängt, mit ganz kurzen Längscommissuren Vordere Antennen mit 3gliedriger Geissel. Stilglied der hinteren Antennen stark gekrümmt und viel kürzer als die nachfolgenden Glieder. Leberschläuche breit mit secundären Ausstülpungen. Mandibulartaster kurz, Basalglied nur wenig länger als die nachfolgenden Glieder. Vorderes Beinpaar ohne Scheere. 2tes Beinpaar endet subcheliform. 5tes und 6tes Beinpaar mit breiten mächtigen Femoralplatten. 7tes Beinpaar klein mit Femoralplatte und schmächtigem aber vollkommen gegliederten Bein. Hinterer Abschnitt des Abdomens kurz und gedrungen. Letzter Caudalgriffel zangenförmig nur mit beweglichem fingerförmigen Aussenaste.

S. antennarius n. sp. Stil der männlichen Vorderfühler mit vorspringendem conischen Fortsatz, die Antennen ausserordentlich lang, zusammengelegt bis zum Abdomen reichend. Augenpigment gelb. 5tes Beinpaar länger und schlanker als das 6te. Stilglied der Caudalgriffel kaum länger als die ziemlich breiten lanzetförmigen

Aeste. Schwanzplatte triangulär. Nur 7 mm. lang. Grosser Ocean.

Schnehagenia n. g. Körper mässig gestreckt und Simorhynchus ähnlich. Ganglienkette weit gestreckter, Ganglien des 7ten Brustsegmentes fast gesondert. Die beiden vordern Beinpaare enden mit mächtig entwickelter Scheere. 7tes Beinpaar ziemlich dick und verhältnissmässig gross. Letztes Caudalgriffelpaar mit beweglichem lamellösen Innen- und Aussenaste. Im Uebrigen wie Simorhynchus.

S. rapax n. sp. Körper fleischfarbig mit braunen Pigmentflecken. Augenpigment braunroth. Erstes Geisselglied der Vorderfühler ungewöhnlich lang. Ein vorspringender Fortsatz am Ende des Stils nicht entwickelt. Stilglied der hintern männlichen Antennen nicht viel kürzer als das 2te Glied. Scheere des vordern Beinpaares an der Rückenseite mit schlauchförmigem Fortsatz, am Innenrand der Hand wie die des 2ten Beinpaares mit starken Zahnfortsätzen. Lamellen der 2 vordern Caudalgriffel länger als das Stilglied. Stilglied des hintern Caudalgriffels sehr kurz, die Lamellen desselben wohl 3 mal so lang. Circa 10 mm. lang. Vom Capit. Schnehagen am Cap gefangen.

Die Gattung *Synopia* Dana, die Dana und Sp. Bate irrthümlich mit den Oxycephaliden vereinigt haben, gehört zu den Gammariden.

Universität.

Vierter Bericht über die geognostisch-palaeontologische Sammlung der Universität Göttingen.

In dem verflossenen Jahre hat die geognostisch-paläontologische Sammlung in ihrer paläontologischen Abtheilung eine so wesentliche Bereicherung erfahren, dass sie ihrem Inhalte nach ein ganz verändertes Aussehen erhalten hat. Auf den von Königlichem Universitäts-Curatorium befürworteten gemeinsamen Antrag des Herrn Professors Sartorius von Waltershausen und des Unterzeichneten bewilligte Se. Excellenz der Herr Minister einen nicht unbeträchtlichen ausserordentlichen Zuschuss, durch welchen es möglich wurde für einen verhältnissmässig nur geringen Kaufschilling die Sammlung des Hern Dr. W. Waagen früher in München jetzt in Calcutta zu erwerben. Der hohe wissenschaftliche Werth dieser Sammlung ist durch die Arbeiten Waagens selbst so wie durch die Mitbenutzung durch Oppel und Zittel allen Fachgenossen bekannt. Während bisher in der paläontologischen Sammlung in Folge der geologischen Umgebung Göttingens und den früheren Arbeiten des Unterzeichneten die in grosser Reichhaltigkeit zusammengebrachte Fauna und Flora der Triasformation unverhältnissmässig hervortrat ist dieselbe jetzt auf einen Schlag durch die zu früheren ansehnlichen Serien neu hinzugetretene Masse von Juraversteinerungen aus der Waagenschen Sammlung (über 36 Ctr) in das Maas ihrer verhältnissmässigen Armuth zurückgedrängt worden. Dies lässt sich schon heute mit Bestimmtheit erkennen, obgleich es

bei dem grossen Zeitaufwand, den diese Arbeit verlangt, der andauernden Bemühung des Unterzeichneten bis jetzt nicht gelungen ist mehr als ein Drittel der ganzen Sammlung aufzustellen. Ein beträchtlich grösserer Theil wird aber leider vor der Hand überhaupt nicht aufgestellt werden können. Der gesammte Aufstellungsraum für die geologische und paläontologische Sammlung bedeckt eine Fläche von nur 1636 Quadratfuss und dieser ist bereits gegenwärtig so mit Schränken bestellt dass zur Stunde wenigstens nur noch die Aufstellung eines kleineren Schrankes (für vulkanische Gesteine) möglich erscheint. Diese Schränke sind aber zum grössten Theil ebenfalls von Material vollkommen angefüllt, insbesondere ist in den für die Versteinerungen der Juraformation bestimmten Schränken nur noch für einzelne Abtheilungen und überall nur noch so wenig Raum übrig, dass nicht selten schon einzelne leere Schubladen aus anderweiten Schränken zur Aufstellung der Waagenschen Sammlung haben mit benutzt werden müssen. Obgleich bei diesem Verfahren schliesslich Niemand ausser dem Unterzeichneten durch die Sammlung sich wird hindurchfinden können, so soll doch hierin fortgefahren werden um die Waagensche Sammlung wenigstens so weit als dies irgend möglich ist für die hiesigen Studirenden und für auswärtige Fachgenossen nutzbar zu machen. Vollständig dies zu erreichen wird aber, so lange die geologischen Sammlungen in ihrem heutigen Local verbleiben müssen, kaum möglich sein. Doch hat man Grund zu hoffen, dass dieser traurige Zustand des Instituts nicht all zu lange andauern wird und dass der Neubau eines naturhistorischen Museums für Göttingen, welcher von Se. Excellenz dem Herrn Minister seit 1867

in Aussicht gestellt worden ist, sich seitdem aber immer verzögert hat, nach der glorreichen Beendigung des letzten staunenswerthen Krieges und Wiederkehr eines segensreichen Friedens endlich wirklich in Angriff genommen werden wird.

Erst wenn dieses neue Museumsgebäude, für welches der Universitäts-Baumeister Herr Landbau-Inspector Döltz einen vortrefflichen Plan entworfen hat, vollendet ist, wird es möglich werden die hiesige geologische Sammlung, welche in Folge der in dem letzten Jahrzehnt gemachten Neuerwerbungen in manchen Abtheilungen wie besonders in den vulkanischen Gesteinen, der Jura u. Triasformation, den Silurischen Korallen und Brachiopoden, sowie den Pleistocaenen Säugethieren sich schon neben die älteren Sammlungen unserer Schwesteranstalten stellen kann, in einer wahrhaft nutzenbringenden und würdigen Weise aufzustellen.

Im Jahre 1870 hat das geologische Institut auch neben der Waagenschen Sammlung, obgleich deren Transport allein ein Viertheil des ganzen jährlichen Ordinariums in Anspruch nahm, einen reichhaltigen Zuwachs erfahren. In der Provinzialsammlung ist die geologische Abtheilung um eine gute Reihe Handstücke von Diabas-Gabbro und anderen Gesteinen aus dem Harze, die der Unterzeichnete sammelte, vermehrt worden und aus dem Nachlass des Herrn Dr. O. Schilling schenkte Herr Jewett zwei schöne Serien von Harzer Granit und Hornfels.

Die paläontologische Abtheilung erhielt von Herrn Oekonom Kehr zwei Saurierwirbel aus dem Kohlenkeuper des Hainberg. Sie wurde durch ein ungewöhnlich grosses Exemplar des Ammonites Bucklandi Sow. von Ohrsleben eine kleine Serie von Versteinerungen aus dem

mittlerem Lias von Hedeper und aus demjenigen von Rottorf am Kley bereichert, welche Herr Ottmer in Braunschweig schenkte. Einige Petrefacten ans dem Amaltheen-Thon von Bruchholz bei Braunschweig gab Herr Dr. Brauns daselbst. Eine werthvolle Suite von Versteinerungen aus dem Kimmeridge von Ahlem verehrte uns Herr Amtsrath Struckmann in Hannover und einige Formen des Hilses von Kirchwehren am Deister verdanken wir unserem langjährigen Gönner Herrn Obergerichtsdirector Witte daselbst. Käuflich wurde durch die gütige Vermittelung unseres ausgezeichneten Kreidekenners des Herrn Dr. Cl. Schlüter eine sehr schöne Sammlung Lüneburger Kreidepetrefacten erworben. Endlich haben auch die von dem Unterzeichneten unternommenen Excursionen der Sammlung manche neue werthvolle Stücke zugeführt; zu erwähnen ist besonders ein prachtvoller 15,6 Mm. grosser Peltastes clathratus aus dem untern Plänes von Rethen bei Hannover.

Die allgemeine geognostische Sammlung ist ausser vielen Einzelheiten, die zum guten Theil der Güte des Herrn Dr. F. Fischer damals hier verdankt werden, nur um eine gute Reihe der krystallinischen Gesteine aus dem Odenwalde und um eine kleine Suite von Gebirgsarten aus Aegypten die Herr Senator Römer in Hildesheim sammelte und schenkte, vermehrt worden. Eine beträchtlichere Vergrösserung ist, soweit der vorhandene Raum dies gestattet, für das Jahr 1871 in Aussicht genommen worden.

Unter den Erwerbungen der allgemeinen paläontologischen Sammlung ist zunächst eine ausgezeichnet reichhaltige Reihe von Versteinerungen des oberen Silur von der Insel Gotland zu

erwähnen, die wir Herrn Dr. G. Lindström zu Wisby verdanken. Dieselbe umfasst 138 Arten in meist vortrefflicher Erhaltung. Aus dem Buntsandstein von Bernburg wurde eine Anzahl interessanter Exemplare der Pleuromeya Sternbergi Münster sp. und des Trematosaurus Brauni Burm. angekauft. Unter den Schädelchen des letzteren befand sich ein bis auf das Schnautzenende vollständiges Exemplar, welches vollkommen präparirt und gereinigt werden konnte und jetzt wohl eins der schönsten Stücke sein dürfte, welches bisher bekannt geworden. Einen Schädel von Archegosaurus Decheni Meyer aus dem Kohlenrothliegenden von Saarbrücken mit trefflich erhaltenem Zungenbeinkörper schenkte Herr Dr. E. Weiss zu Bonn. Demselben gütigen Geber verdankt die Sammlung noch mehrere Koprolithen und Leaia Bäntschiana Beyr., eine Auswahl von Muscheln aus dem Voltziensandstein und Muschelsandstein der Gegend von Saarbrück sowie ein Exemplar der Anomopteris Mougeoti Brongn. und durch seine gefällige Vermittlung erhielten wir von der kgl. Bergschule zu Saarbrück ein Aststück und ein Zapfenstück von Voltzia heterophylla Brongn. Herr Ob.-Ger.-Director Witte in Hannover schenkte Chemnitzia undosa und Turrilitis Bergeri Brongn. aus der Kreideformation Ostindiens, Herr Dr. Lossen in Berlin Pterinea Bilsteinensis F. Röm. und eine Grammysia-Art aus dem Unterdevon von Bilstein, Herr O. Popp z. z. hier einen schönen Fucoiden aus Toskana. Angekauft wurden gute Exemplare von Asterias asperula F. Röm. und A. spinosissima F. Röm. und Aspidosoma Tischbeinianum F. Röm. aus dem unterdevonischen Dachschiefer

von Bundenbach bei Birkenfeld. Von Herrn Professor Benecke in Heidelberg erhielt die Sammlung eine kleine Sendung interessanter Triasvorkommen. Zwei sehr werthvolle Gaben verdankt endlich die Sammlung noch den Herren Senator H. Römer in Hildesheim und Dr. Bölsche in Braunschweig. Herr Römer übergab der Sammlung eine Auswahl aus den Doubletten der Petrefacten, welche er auf seiner Reise nach Aegypten im verflossenen Frühjahre sammelte. Es befinden sich darunter auch herrliche Exemplare des Clypeaster Aegyptiacus Coq. von Gizeh und des Lobocarcinus Paulino-Würtembergensis Meyer sp. vom Mokattam. Herr Bölsche aber schenkte eine schöne Sendung von Skelletttheilen fossilen Marsupiaten aus den Wellington-Knochen-Höhlen und den Darling-Downs in Australien.

Eine unerwartete, bedeutende Bereicherung hat auch die erst im Entstehen begriffene Vergleichungssammlung erfahren, indem Herr Professor Hübner hierselbst seine viele interessante Formen enthaltende Sammlung lebender Conchylien dem geologischen Institut schenkte.

Auch das Inventar ist wiederum thunlichst vermehrt worden. Aus dem Universitätsbaufonds ist ein halber Glastischschrank von 32 Schubladen hergestellt worden. Die kleine Handbibliothek ist wieder um einige der unentbehrlichsten Werke vermehrt worden. Einige interessante Abhandlungen schenkte Herr Professor Pauli hierselbst. Vor allem sind die neuerschienenen schönen geologischen Karten von Mittel-Europa und von Deutschland, welche Herr von Dechen herausgegeben, zur Decoration des Auditoriums verwendet worden, um den Studirenden durch tägliche Betrachtung die Grund-

züge des geologischen Baus dieser Gegend einzuprägen. Als eine Zierde des Zimmers für vulkanische Gesteine schenkte Herr Prof. Sartorius von Waltershausen seine grosse schöne Carta topographica dell' Etna.

Einen schweren Verlust hat im verflossenem Jahr die geologische Sammlung durch den Tod des Herrn Dr. Schilling erlitten. Oskar Schilling, Sohn des Hrn Bergmeister Schilling in Zorge im Harz empfing seine Schulbildung auf dem Gymnasium zu Blankenburg und bezog dann um sich für den echt harzerischen Beruf seines Vaters vorzubereiten die Bergacademie zu Clausthal, welcher er bis Ende 1863 angehörte. Unterstützt durch die eingehendste Localkenntniss hat Schilling schon damals mit grossem Eifer und Erfolg dem geognostischen Studium des Harzgebirges sich zugewendet, denn ihm verdankte F. A. Römer die Petrefaeten aus den Kalken von Wieda und unweit Zorge, welche er in seinem fünften Beitrag zur geologischen Kenntniss des Harzgebirges 1866 beschrieb. Im Januar 1864 ging dann Schilling an das Polytechnicum in Carlsruhe und wurde hier bald Assistent bei Professor Zittel unter dessen Leitung er sich auch bei den Aufnahmen für die geologische Karte des Grossherzogthums Baden betheiligte. Diese vorherschende Beschäftigung mit Geologie und der stete Umgang mit einem so kenntnissreichen und liebenswürdigen Forscher scheinen damals zuerst Schilling bestimmt zu haben die Praxis zu verlassen und sich der Wissenschaft zuzuwenden. Michaelis 1865 siedelte er dann als Assistent bei Professor Sartorius von Waltershausen hierher, nach Göttingen über. Er wandte sich jetzt mit aller Kraft der Erforschung des ihm wieder so nahe lie-

genden heimathlichen Harzes zu und fand zunächst während der Ferien daselbst auch eine commissarische Verwendung bei der geologischen Landesuntersuchung. Von den Resultaten seiner Untersuchungen hat er aber nur wenig veröffentlicht. Im Sommer 1869 erschien seine Doctordissertation: Die chemisch-mineralogische Constitution der Grünstein genannten Gesteine des Südharzes, durch welche die Kenntniss der Harzer Diabase ansehnlich vertieft worden ist. Zwei kleinere Entdeckungen, nämlich das Vorkommen von Anataskrystallen bei Zorge und bei Harzgerode sowie von Graptolithen am Mollnberge bei Zorge ist in der Zeitschrift der Deutschen geologischen Gesellschaft 1869, Bd. 21 p. 703 und p. 832 publicirt worden. Ein anderer von Dr. Schilling gemachter Fund: eine interessante Association von Mineralien, darunter besonders schöne Krystalle von Stilbit und Heulandit, auf einem Diabascontactgestein von Hasselhof bei Braunlage ist bis jetzt wenigstens ungedruckt geblieben. Der Wunsch sich auch einmal in einer paläontologischen Arbeit zu versuchen, veranlasste die in den Paläontographica 1870 Bd. 17 p. 233 t. 43 erschienene Arbeit: Ueber eine Asteride aus dem Coralrag des Lindenerbergs bei Hannover. Gleichzeitig war Dr. Schilling mit Untersuchungen über die durch den Granit bewirkte Metamorphose des Hornfelses und über die Südharzer Erzgänge beschäftigt. Beide Arbeiten waren schon ziemlich weit gefördert und die zweite, die sich nahezu vollendet in seinem Nachlass gefunden haben muss, hatte er gerade als Habilitations der hiesigen philosophischen Facultät eingeben wollen, als der Krieg ausbrach. Dr. Schilling hatte als einjähriger Freiwilliger erst in Braunschweig und dann hier bei

dem 7. Westphälischen Infanterie No. 56 gedient. Er zog als Gefreiter in der ersten Compagnie mit ins Feld wurde aber bald Unterofficier. In der Schlacht bei Mars la Tour ward er während er tapfer seinen Mann stand durch einen Schuss in den Kopf niedergeworfen und kam darauf nach Gorze ins Lazareth. Hier erholte er sich allmählig wieder so weit, dass man seine Wiedergenesung hoffen konnte und es möglich war ihn Ende September über Nancy nach Karlsruhe und bald darauf hierher zu evacuiren. Als er hier ankam war aber sein Zustand schon weniger befriedigend und verschlechterte sich, trotz der sorgsamsten Pflege die er hier im Lazareth in der Landes-Irren-Anstalt fand, immer mehr bis er am 20. November nach qualvollen Leiden verschied.

Obgleich Dr. Schillings Verpflichtungen sich auf seine Thätigkeit in der mineralogischen Sammlung beschränkten, so hat er sich doch stets auch warm für die geologische Sammlung und zwar besonders für deren geognostische Abtheilung interessirt und in uneigennützigster Weise zu deren Vermehrung beigetragen, wie dies schon aus den früheren Berichten hervorgeht, ja von der in den letzten zwei Jahren beträchtlich angewachsen Sammlung der Harzgesteine hat er geradezu den grösseren Theil selbst gesammelt und geschenkt.

Von Arbeiten in der Sammlung habe ich besonders hervorzuheben, dass die Silurischen Corallen von Herrn D. Desmaison sämmtlich neu bestimmt und in zweckmässiger und eleganter Weise aufgestellt worden sind. Herr Brackebusch hat einen Theil der Fische neugeordnet während ein anderer Theil von dem Unterzeichneten durchgearbeitet wurde. Die von Demsel-

ben ferner begonnenen Arbeiten wurden jedoch durch die Aufstellung der Waagenschen Sammlung unterbrochen.

Von auswärtigen Fachgenossen ist die Sammlung auch im verflossenen Jahre vielfach besucht oder durch gemachte Zusendungen benutzt worden, so durch die Herrn: Dr. A. Kauth vordem in Berlin, Geh. Rath Römer in Breslau, Dr. E. Weiss in Bonn, Professor Schenk in Leipzig, Dr. Brauns in Braunschweig, Amtsrath Struckmann in Hannover, Senator Römer in Hildesheim, Director v. Groddeck in Clausthal, Professor Benecke in Heidelberg und Professor Beyrich in Berlin.

K. v. Seebach.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

März und April 1871.

(Fortsetzung.)

Catalogue of Scientific Papers. Royal Society of London. Vol. IV. London 1870. 4.

Philosophical Transactions of the R. Society of London 1870. Vol. 160. Part I. 4.

Memoirs of the R. Astronomical Society. London Vol. XXXVII. Part I. 1868–69. Part II. 1869–70. With ten plates. Vol. XXXVIII. 1871. With five plates. 4.

Monthly Notices of the R. Astronomical Society Vol. XXVIII. 1867—68. XXIX. 1868–69. XXX. 1869—70. London. 8.

Index to the first twenty-nine volumes of the R. Astronomical Society. 1827—1869. London 1870. 8.

Results of the Astronomical Observations, Greenwich 1868. 4.

H. Breen. Correction of Bouvard's Elements of Jupiter and Saturn. Appendix I to Greenwich Observations, 1868 4.

New Seven-Year Catalogue of 2760 Stars for 1864. Appendix II to Greenwich Observations, 1868. Greenwich. 4.

Results of the Magnetical and Meteorological Observations. Greenwich 1868. 4.

Proceedings of the Royal Society. Vol. XVIII. Nr. 119 —122. — Vol. XIX. Nr. 123.

G. B. Airy, Astronomical and Magn. and Meteorol. Observations made at the R. Observatory, Greenwich, 1868. London 1870. 4.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève. Tome XX. Seconde Partie. Genève 1870. 4.

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie II. Tomo VIII. Fasc. 1—4. Tomo IX. Fasc. 1—4. Bologna. 4.

Rendiconto delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze. Bologna 1868—69. 8.

Anales del Museo Publico de Buenos Aires. Entrega Septima. Primera del Tomo segundo. Buenos Aires 1870. 4.

Freiburger Diöcesan-Archiv. Organ des kirchlich-historischen Vereins der Erzdiöcese Freiburg für Geschichte etc. Bd. I—V. Freiburg i. Br. 8.

Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark. Heft 18. Graz 1870. 8.

Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft f. vaterl. Cultur. Abth. f. Naturwissenschaften u. Medicin 1869—70. — Philosophisch-historische Abtheilung 1870. — Breslau. 8.

Siebenundvierzigster Jahresbericht der Schlesischen Ges. f. vaterl. Cultur. 1869. Breslau 1870. 8.

H. Krone, der Albert'sche Lichtdruck. Dresden 1871. 4.

Fr. Palacky. Zur Böhmischen Geschichtsschreibung. Prag 1871. 8.

Dr. E. Brücke, die physiologischen Grundlagen der neuhochdeutschen Verskunst. Wien 1871. 8.

v. Haidinger's Bericht über Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich von Dr. C. v. Wurzbach. Wien 1871. 8.

v. Haidinger, Bericht über Fr. v. Hauer's Geologische Uebersichtskarte der österr. ungarischen Monarchie. Wien 1871. 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

10. Mai. | № 6. | 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Mai.

Meissner, über electrische Ozon-Erzeugung und über Influenz-Electricität auf Nichtleitern. (Erscheint in den Abhandlungen.)

v. Willemoes (durch Meissner), über Entwickelung von Polystoma.

Wüstenfeld, die Strasse von Baçra nach Mekka mit der Landschaft Dharijâ. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Lie, (durch Clebsch), eine Ausdehnung der Krümmungstheorie.

v. Seebach, über Pemphix Albertii, Meyer, aus dem unteren Nodosenkalk des Hainbergs.

Enneper, über die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungs-Mittelpuncte entsprechen.

Claus (durch Wöhler), die Metamorphose der Squilliden.

Die Metamorphose der Squilliden

von Prof. Dr. C. Claus.

Die spärlichen Angaben, welche bislang über die Entwicklung der Stomatopoden bekannt geworden sind, verdanken wir den Beobachtungen von Fr. Müller. Dieser Forscher beschrieb zwei kleine glashelle Larven, von denen die grössere, im Allgemeinen vom Baue der Zoëa, in

dem Besitze eines mächtigen Fangfusspaares, die kleinere bereits mit 5 Schwimmfusspaaren ausgestattete Larve in dem inneren Bau und vornehmlich in dem Bau des Herzens die Stomatopoden-merkmale unverkennbar zur Schau trug. Aber weder die Art und Weise, wie die Larven ihre Gestalt gewonnen, noch die weitern Schicksale derselben und ihre Verwandlung in die geschlechtsreife Thierform konnten näher bestimmt und erörtert werden. Fr. Müller[1]) suchte zwar vermuthungsweise beide Larven als in der gleichen Entwicklungsreihe zusammengehörig zu betrachten und die grössere als ein späteres Stadium der kleinern aufzufassen, war aber nicht im Stande eine nur einigermassen zutreffende Erklärung dieses Vorganges zu geben. Die von ihm versuchte Deutung war vielmehr, wie aus den mitzutheilenden Beobachtungen hervorgeht, eine unglückliche.

Erklärt sich nun auch die völlige Unbekanntschaft mit der Embryologie der Squilliden aus der Schwierigkeit, die in den Wohngängen dieser Krebse abgesetzten Eier lebendig zu erhalten, so sieht man doch nicht ein, wesshalb sich die postembryonale Metamorphose der Forschung so lange entzogen hat. Denn wenn es auch nicht gelingt, die Larvenstadien in continuirlicher Reihenfolge lebend aus einander zu züchten, so dürfte doch schon eine sorgfältige auf umfassendes Material Bezug nehmende Vergleichung der glashellen als Alima, Erichthus und Squillerichthus beschriebenen Stomatopoden uns ein annähernd vollständiges Bild von der Metamorphose

1) Fritz Müller, Bruchstück zur Entwicklungsgeschichte der Stomatopoden. Archiv für Naturgesch. 1863. Derselbe, ein zweites Bruchstück aus der Entwicklungsgeschichte der Stomatopoden. Ebendaselbst 1864.

der Squilliden zu liefern im Stande sein. Dass aber die genannten Stomatopoden in Wahrheit nur Larvenformen entsprechen, war mir bereits seit einer Reihe von Jahren bekannt. Das bei denselben allgemein vorhandene unpaare Entomostranenauge[1]), insbesondere aber die unvollkommene Gestaltung der Gliedmassen, die in der Bildung begriffenen Antennen und Kiemenanhänge, endlich der Mangel der Geschlechtsorgane liess über die Natur von Alima, Erichthus und Squillerichthus als Stomatopodenlarven keinen Zweifel zurück. Seit jener Zeit war ich bemüht, ein möglichst reiches Material dieser Formen zur Vergleichung zusammenzubringen. Leider waren alle die Larven, die ich untersuchen konnte, wie die bisher beschriebenen, auf ziemlich dem gleichen, weit vorgeschrittenen Entwicklungsstadium, es fehlten die kleinern und jüngern Stadien, bis es mir endlich vor Kurzem gelang, in dem reichhaltigen mir bereitwilligst übersandten Material des Hamburger Museums die jüngern Zwischenstadien aufzufinden und mit deren Hülfe das Bild der Stomatopoden-Entwicklung wesentlich zu vervollständigen.

Ich knüpfe an die jüngste von Fr. Müller beschriebene Larve an, die mir schon seit langer Zeit von Messina her bekannt ist. In der Seitenansicht erinnert diese Larve mit ihrem breiten mächtig entwickelten Kopfbruststück und kurzem schmalen Schwanz an die Pontellidenform, mit der sie auch in der 5-Zahl der 2-ästigen Schwimmfusspaare übereinstimmt. Die letz-

1) Das Vorkommen dieses Auges für sich allein ist kein hinreichender Beweis für die Larvennatur. Man trifft dasselbe beispielweise auch an jungen Exemplaren von Gonodactylus vollkommen deutlich erhalten an.

teren zeigen freilich mehr den Bau der Zoëabeine, wenn auch in verkürzter und verbreiterter Form, aber ihre Aeste sind ungleichmässig gestaltet. Die Larve besitzt einen mässig langen Schnabel und 2 noch einästige Fühlerpaare. Ihre Mundwerkzeuge sind bereits vollzählig angelegt, auch das zweite Maxillenpaar, von Fr. Müller irrthümlich als untere Lade des obern Maxillenpaares dargestellt, ist bereits als deutlich gesonderte Gliedmasse nachweisbar. Die drei hintern fusslosen (den drei hintern Brustringen entsprechenden) Segmente enden mit einer verbreiterten und langgestreckten Schwanzplatte. Die Art und Weise, wie sich diese Larve zur Stomatopodenform heranbildet, konnte durch eine Reihe älterer Stadien in continuirlicher Folge nachgewiesen [1]) werden.

Eine ältere Larve von etwa drei mm. Länge zeigt im Wesentlichen dieselben Verhältnisse, indessen erscheint der innere Ast des zweiten Schwimmfusspaares stark erweitert, auch bedeutend verlängert und schliesst bereits unter der Hülle die Anlagen des grossen Fangfusses ein. Dazu kommt, dass sich vor der Schwanzplatte ein neues Segment gebildet hat und jederseits einen kleinen zweilappigen Anhang trägt. Die zwei vordern Schwimmfusspaare entsprechen demnach den zwei vordern Kiefer-

1) Die von Fr. Müller aufgestellte Conjectur, nach welcher die drei vordern Schwimmfusspaare die Anlagen der hintern Maxillen, des ersten und zweiten Maxillarfusspaares seien, die 2 nachfolgenden Paare aber die Schwimmfüsse der 2 ersten Abdominalsegmente darstellten, schien mir von vornherein bedenklich, da sie die Annahme voraussetzte, dass sich die 6 fehlenden Thoracalsegmente zwischen den Segmenten mit so gleichartigen Gliedmassen einschieben würden, und hat sich auch in der That nicht bestätigt.

fusspaaren, während die Deutung der lamellösen Anhänge zweifelhaft bleibt. Man könnte dieselben ebenso gut als Anlagen der vordern Abdominalfüsse auffassen wie auf die bei den langschwänzigen Krebsen früher auftretenden Seitenanhänge des Schwanzfächers zurückführen.

Etwas grössere und weiter vorgeschrittene Larven von 4 mm. Länge beweisen, dass die erstere Auffassung die richtige ist und lassen gleichzeitig über die Bedeutung der 3 hintern Schwimmfusspaare sowie der folgenden 3 fusslosen Zwischensegmente keinen Zweifel zurück. In diesem Alter hat sich nämlich die Zahl der Schwanzsegmente vermehrt, indem vor der Schwanzflosse zwei neue Ringe mit entsprechenden Fussanlagen zur Sonderung gelangt sind. Die letztern werden von dem vorausgehenden grössern Paare von Fussplatten mehr oder minder vollständig überdeckt und erweisen sich als die Füsse des zweiten und dritten Hinterleibssegmentes. Die drei vorausgehenden schon im ersten Stadium vorhandenen anhangslosen Segmente entsprechen demnach den drei hintern Thoracalsegmenten des Stomatopodenkörpers, an denen die spaltästigen Ruderbeine noch hervorwachsen müssen; die drei vorausgehenden Schwimmfusspaare aber sind nichts anders als die spätern kleinen Raubbeine (3ter Kieferfuss, 1 und 2tes Beinpaar des Decapodenleibes). Der grosse Raubfuss hat sich bereits aus seiner Hülle befreit, ohne freilich den Nebenast des ursprünglichen Schwimmfusses verloren zu haben, dagegen ist der vorausgehende spätere Tasterfuss (1. Maxillarfuss) noch wie früher ein 2ästiger Schwimmfuss. An dem Endgliede der vordern Antennen finden sich schon die Anlagen zweier Geisselanhänge.

Aeltere Larven von 5 bis 6 mm. Länge be-

sitzen bereits die volle Zahl der Hinterleibssegmente — bis auf das 6te die Seitenplatten des Schwanzfächers tragende Segment — mit sämmtlichen Fussanlagen. Der Grad der Ausbildung der letzern, deren Grösse in continuirlicher Abstufung nach dem Ende des Schwanzes abnimmt, ist je nach der Grösse der Larve verschieden. An den hintern Fühlern hebt sich das Endglied als breitere Lamelle von der stilförmigen Basis ab, in deren Mitte die Geisselanlage als Knospe hervorwächst. Die grösseren etwas weiter vorgeschrittenen Formen von 6 mm. Länge haben den Nebenanhang der schon jetzt langgestreckten und umfangreichen Raubfüsse abgeworfen, dafür jedoch an der Basis derselben die Anlage der scheibenförmigen Platte gewonnen. Ebenso ist der vorausgehende Kieferfuss einfach geworden und besitzt die für den Tasterfuss charakteristische langgestreckte schmale Form. Die 3 nachfolgenden Schwimmfusspaare zeigen in ihrer Gestalt keine Veränderung. Die Vorderfühler bestehen aus einem 3gliedrigen Schaft und zwei gestreckten Geisseln, von denen die längere 2gliedrig ist die kürzere, ihrem Ursprung nach ältere, eine starke Anschwellung bildet und in einen dünner gestreckten Endtheil ausläuft.

Bei Larven von 7 mm, Länge hat die Streckung des Abdomens bedeutend zugenommen, die Schwimmfüsse des Abdomens sind ziemlich gleichmässig ausgebildet, sämmtlich mit zwei borstentragenden lamellösen Aesten versehen. Das hintere kleinste Paar bedeckt die nach aussen vorstehende bereits 2lappige Anlage der seitlichen Schwanzanhänge, deren Entstehungsweise [1]) demnach voll-

1) Mit Rücksicht auf die übereinstimmende Anlage, welche die Füsse des Hinterleibes und die seitlichen Anhänge des Fächers bieten, kann ich die Anschauung Fr. Müllers,. welcher diese Gliedmassen nicht als zu-

kommen mit den Abdominalfüssen übereinstimmt. Das Segment des 6ten Schwanzfusspaares hat sich freilich noch nicht von der grossen Schwanzplatte abgegliedert. Die grössere Geissel der Vorderfühler ist nunmehr 3gliedrig, an der kleineren Geissel erscheint der Endabschnitt (Anlage des 3ten Geisselanhangs) von der verdickten Basis schärfer abgesetzt. Der Geisselanhang der hintern Antennen hat noch keine merkliche Grössenzunahme und Gliederung erfahren. Die drei Schwimmfusspaare der Brust, an Umfang bereits merklich reducirt, erinnern in Form und Haltung an die spaltfüssigen Ruderbeine, welche die spätere Squillide an den 3 nachfolgenden jetzt noch gliedmassenlosen Segmenten trägt.

Soweit war es mir möglich, die Metamorphose an vier verschiedenen Larvenreihen, die sich leicht an der Bewaffnungsweise, an dem grössern oder geringere Umfang des Schildes unterscheiden liessen, zusammenhängend zu verfolgen. Das zunächst folgende Stadium wurde nur für eine dieser Formenreihen mit auffallend breiter und gedrungener Gestalt des Schildes, unter dessen Bauchseite Augen, Antennen, Beine und Schwanz umgeschlagen und versteckt lagen, beobachtet. Die Erichthus ähnliche Larve von 9 mm. Länge besitzt bereits die Anlagen der 3 Antennengeisseln und zeigt eine unverkennbare Rückbildung der 3 Schwimmfusspaare, deren Nebenäste theils völlig abgeworfen, theils nur in einem kleinen Rudiment (3tes Paar) erhalten sind. Am weitesten erscheint die Umbildung des vordern Paares vorgeschritten, indem hier auch bereits die Ruderborsten abgeworfen sind. Die drei Zwischensegmente entbehren noch immer der Beinanlagen,

sammengehörig betrachtet, nicht theilen, sehe vielmehr die Seitenanhänge der Schwanzplatte als 6tes Schwanzfusspaar an.

welche erst im nächstfolgenden Stadium als kleine Knospen sichtbar werden. In diesem Alter bei einer Körperlänge von etwa 12 mm. ist das vordere der drei hinter den grossen Raubfüssen gelegenen Beinpaare bereits ein kleiner Raubfuss mit dicker Greifhand, am zweiten Paare sieht man den gegliederten Raubfuss unter der Hülle versteckt, während das 3te Paar nach Verlust des kleinen Nebenastes zu einer sehr geringen Grösse herabgesunken ist. Bei Larven dieser Erichthusform von 14 mm. (bei einer andern von 9 mm. Länge) hat sich die Umbildung auch für das 2te Paar der kleinen Raubfüsse vollzogen, während die schlauchförmigen Knospen der späteren Spaltfüsse zwar noch sehr klein sind, aber bereits die Anlage des Nebenastes hervorzutreiben beginnen. Die Schwanzflosse erscheint noch sehr klein und 2lappig, und an den Füssen des Hinterleibes werden Spuren von Kiemenanlagen bemerkbar.

Die nun folgenden Stadien sind die bekannten Erichthuslarven von verschiedener Gestalt, Grösse und Stachelbewaffnung des Schildes, mit breiterm oder engerm mehr oder minder weit vorstehendem Hinterleib. Diese Larven sind sämmtlich wie auch die frühern Stadien mit einem sehr langen Schnabelstachel, 2 kleinen seitlichen Stirnstacheln und 2 mehr oder minder langen Seitenstacheln am Hinterrande des Schildes bewaffnet, zu denen noch 2 mittlere Seitenstacheln und ein medianer bis an den Hinterrand herabgerückter Dorsalstachel[1]) wie bei der Zoëa hinzukommen können. Diese Larven besitzen überall hinter dem grossen Raub-

1) Es ist ein arger Missgriff, in diesem Rückenstachel, der auch zahlreichen Decapodenlarven fehlt, einen fundamentalen Charakter der Zoëa zu erkennen und auf denselben weittragende morphologische Schlüsse zu gründen.

fusspaare 3 stufenweise nach hinten kleiner werdende Greiffüsse und hinter denselben an den 3 Mittelringen, den 3 letzten Brustsegmenten, kleine aber bereits spaltästige Fussanhänge. Die drei Geisseln der Vorderfühler sind überall deutlich erkennbar, auch die äussere zuletzt entstandene Geissel beginnt sich zu gliedern und zahlreiche Riechfäden hervorzutreiben. Der Geisselanhang der hintern Antennen ist mindestens 3gliedrig, bei den grössern Formen gliedert sich das Ende des dritten langgestreckten Abschnittes. Mandibulartaster fehlen durchaus. Kleine Kiemenknospen erheben sich an der Aussenlamelle der Hinterleibsfüsse. Zahlreiche Erichthusformen, vornehmlich die breiten und stark bewaffneten Formen mit sehr gedrungenem bauchwärts umgeschlagenen Abdomen bewahren mit dem weitern Wachsthum die Erichthusform und gehen in die als Squillerichthus unterschiedenen Gestalten über, für welche vornehmlich die grössern Kiemenanhänge und längeren Antennengeisseln auch wohl ein etwas gestreckteres nur noch an der Basis vom Schilde überdecktes Abdomen charakteristisch ist. Dagegen treten die kleinern und schlanken (seltener auch breiten) Larven mit verhältnissmässig kurzem Panzerschild (ohne Rückenstachel) durch Streckung des Abdomens in eine neue Form ein, welche ich in zahlreichen Uebergängen bis zu einer Länge von circa 1½ Zoll verfolgen konnte und wegen ihrer grössern Annährung an das Geschlechtsthier die Squilloide Larve nennen will.

Das gestreckte Abdomen tritt, mehr oder minder vollständig — an grössern Formen auch noch das letzte Brustsegment — unter dem hintern Rande des kleinen Schildes hervor. Die seitlichen Schwanzanhänge des 6ten Abdominal-

segmentes erlangen eine bedeutende Grösse und reichen mit ihrem langen Stachelfortsatz der Mittelplatte oft bis über das hintere Ende des Schwanzschildes hinaus. Die Antennengeisseln und Spaltfüsse strecken sich mit dem fortschreitenden Wachsthum, die Kiemenbüschel werden grösser und vollständiger. Die Mandibeln erhalten eine einfache schlauchförmige Tasteranlage, die übrigens auch bei grössern Squillerichthusformen nachweisbar ist. Da die grossen wohl 1½ Zoll langen Exemplare offenbar der Verwandlung in die Form des geschlechtsreifen Thieres nahe stehen, so suchte ich Anhaltspunkte, um die Zugehörigkeit zu einer der Squillidengattungen zu bestimmen und richtete zu diesem Zwecke zunächst mein Augenmerk auf die Gestalt der grossen Raubfüssc. Diese weisen durch den Mangel der für Squilla und Pseudosquilla charakteristischen Hakendornen an der Basis des Griffs auf die Gattung Gonodactylus hin, welche auch durch den gedrungenern Körperbau unsern Squilloidlarven am nächsten steht. Indessen weicht die lange lineare Form der Greifhand auch von Gonodactylus wesentlich ab, so dass eine sichere Entscheidung nicht möglich erscheint. Immerhin ist die Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit der besprochenen Larvenreihe, welche die Erichthus, Squillerichthus und die besprochenen Squilloidformen einschliesst, zu Gonodactylus, eine überaus grosse.

Eine andere Formenreihe, zu welcher die Alimalarven gehören, die aber auch mit Squilloidformen von sehr langgestrecktem und nach hinten verbreiterten Hinterleib abzuschliessen scheint, führt offenbar zur Gattung Squilla hin. In diese gehört die zweite Stomatopo-

denlarve Fr. Müllers, welche durch ihren langgestreckten Körper einen Alima-ähnlichen Habitus bietet. Mir ist eine ganz nahe stehende Larve von 3 mm. Körperlänge bekannt geworden, welche vorläufig als das jüngste Stadium der Reihe dargestellt werden muss, obwohl es möglich ist, dass sie in einer etwas einfachern Form die Eihüllen verlässt. Auffallenderweise sind ausser den Antennen und Kiefern nur die 2 vordern Kieferfusspaare als Brustgliedmassen entwickelt, die nachfolgenden sechs Brustsegmente aber als solche deutlich gesondert, während das Abdomen seine sämmtlichen Segmente mit den 5 Schwimmfusspaaren (nicht 4 wie bei Fr. Müller) und den Anlagen der seitlichen Schwanzanhänge entwickelt hat. Die Ausbildung der Gliedmassen steht etwa auf der Höhe der Erichthus-ähnlichen Larven von fast doppelter Länge, jedoch ist der Schaft der vordern Fühler nur 2gliedrig und die Geisselanlage des hintern Antennenpaares noch nicht zum Durchbruch gelangt. Die grossen Raubfüsse aber zeigen keine Spur eines Nebenastes und weisen durch den Besitz eines langen Hakendorns an der Basis des Griffs schon jetzt auf Squilla hin. Ein späteres Stadium von etwa 8 mm. Länge, das freilich wohl nicht in die Entwickelung derselben Squillaart gehören mag, zeigt bei einer etwas schlankern Körperform die drei kleinen Raubfusspaare als kleine noch ungegliederte Schläuche angelegt, während die 3 nachfolgenden Brustsegmente noch gliedmassenlos sind. Die vordern Antennen enden bereits mit 3 kurzen Geisseln, und auch die Geisselanlage der hintern Fühler ist hervorgebrochen. Das Abdomen ragt mit allen seinen Segmenten frei hinter dem Brustschild hervor und endet mit einer langgestreckten fast rechteckigen Schwanzplatte, de-

ren Seitenanhänge sich durch die Länge des mittleren Dornfortsatzes auszeichnen.

Bei einer Larve von 11 mm. Länge erscheinen die 3 kleinen Raubfusspaare bereits gegliedert und mit dem Scheibenanhang des Basalgliedes ausgestattet, an den drei nachfolgenden Brustsegmenten sind die Anlagen der 3 spaltästigen Ruderbeine als kleine Schläuche hervorgewachsen. Die Füsse des Abdomens beginnen bereits Kiemensprossen zu treiben und der lange Dornausläufer der seitlichen Schwanzanhänge reicht bis an das Ende der Schwanzplatte. Mit dem fortschreitenden Wachsthum gewinnen die Brustbeine die für die Alimalarven bekannte Gestaltung, die Kiemenanhänge der Schwanzfüsse werden büschelförmig, die Antennengeisseln erlangen eine grössere Gliederzahl. In diesen Stadien sind mir eine grosse Zahl verschieden gestreckter, offenbar verschiedenen Arten zugehörigen Alimalarven bekannt geworden, von denen die ältern und grössern Formen schon 4 bis 5 Büschel von Kiemenfäden an jedem Schwanzfusse trugen. Ueberall fand ich die für Squilla charakteristischen Hakendornen des grossen Raubfusspaares, dessen Endklauen freilich in der Regel noch keine Hakenfortsätze am Innenrande besassen.

Wahrscheinlich verwandlen sich die Alimalarven nicht direkt in die Squilla, sondern gehen zuvor in eine sehr langgestreckte Squilloidform über, an welcher auch die 2 bis 3 hintern Thoracalsegmente mit den kleinen Spaltfüssen über den Brustschilde hervortreten. Solche in dem Grade der Ausbildung mit den Squilloidlarven der Erichthusgruppe übereinstimmenden Larven, welche ich auf die Gattung Squilla beziehe, habe ich ebenfalls in ausreichender Zahl untersuchen können.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

17. Mai. №. 7. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Vorläufiges über die Entwicklung des Polystoma integerrimum Rud.

Von Dr. R. v. Willemoes-Suhm.

Seit zwei Jahren habe ich mich mit dem in der Harnblase des braunen Frosches nicht seltenen Polystoma integerrimum beschäftigt, in der Absicht über die immer noch unbekannte Entwicklung dieses Schmarotzers einiges Licht zu verbreiten. Als ich die Untersuchung begann, musste ich zunächst mir über die anatomischen Verhältnisse Klarheit zu verschaffen suchen, da diese nur sehr ungenügend bekannt waren. Dies gelang mir zwar nur zum Theil und es fiel mir dabei sehr auf, dass keins der zahlreichen Thiere, welche ich im Sommer und Winter Gelegenheit hatte zu untersuchen, reife Eier bei sich hatte. Endlich fand ich solche im Frühjahr des vorigen Jahres in Kiel in geringer Zahl vor und ich schliesse daraus, dass Polystoma nur ein Mal im Jahre Eier abzulegen pflegt. Meine Versuche, jene Eier zum Ausschlüpfen zu bringen, waren damals vergeblich und ich musste mich wieder bis zu diesem Frühjahr gedulden. Inzwischen

erschienen indessen Arbeiten, welche über die einschlägigen Verhältnisse einige Klarheit verschafften. Van Beneden iun. gab in seiner ausgezeichneten grossen Arbeit [1]) zum ersten Male eine Beschreibung der Bildung sowie der Form und der Bestandtheile der Eier unseres Saugwurms. Stieda [2]) veröffentlichte ferner eine Arbeit, welche über die anatomischen Verhältnisse und ebenfalls über die Gestalt des Eies des Schmarotzers sehr schätzenswerthe Aufschlüsse gab. Auf beide Arbeiten werde ich an einem andern Orte näher eingehen. Hier sei nur bemerkt, dass van Beneden schon im Winter Eier bei Polystoma antraf und dass Stieda nur einmal das Ei dieses Wurms beobachtete. Ich selbst nahm nun im März d. J. hier in Cassel meine Beobachtungen wieder auf. Aus Göttingen erhielt ich braune Frösche und in diesen fand ich meist in einem unter zwölf Individuen das Polystom im gewünschten Zustande des Eierlegens. Ich sammelte auf das Sorgfältigste die schon in die Harnblase abgelegten Eier und setzte sie in Schälchen mit Wasser. Diejenigen Schälchen nun, welche nur wenige Eier enthielten, zeigten bald Fortschritte an denselben, dasjenige hingegen, welches viele enthielt, musste bald geleert werden, da die Eier darin zu Grunde gingen. In ersteren entwickelten sich dann in 20 Tagen die Embryonen.

Das sehr voluminöse Ei (0,20 mm. lang) des Polystoms besteht, wie van Beneden gezeigt hat, aus einer Eizelle, welche Bildungsdotter, Keimbläschen und Keimfleck mit Kernkörperchen

1) Recherches sur la composition et la signification de l'oeuf pg. 33 u. ff.

2) In Reicherts Archiv f. Anatomie und Medicin. 1871. 1. Heft.

erkennen lässt, sodann aus den mit lichtbrechenden Elementen versehenen, »deutoplasmatischen«, Zellen und einer braunen das Ei umgebenden Schale. Diese Schale zeigt an dem einen Ende eine Verdickung oder einen kleinen stumpfen Fortsatz, ein Rudiment des bei den übrigen ectoparasitischen Trematoden vorhandenen langen Filaments, an dem andern, wie ich hinzusetzen kann, einen Deckelapparat.

Zu einer Zeit, wo die Zellen des Nahrungsdotters noch scharf von einander geschieden sind (unmittelbar nach der Eiablage) liegt die Eizelle mit dem Keimbläschen an dem Pol, wo sich der Deckel befindet. Dann rückt sie, wie van Beneden gesehen und abgebildet hat, tief in das Ei hinein und die Nahrungsdotterzellen (die deutoplasmatischen van Benedens) vermengen sich mit einander. Der Embryo entwickelt sich nun in derselben Weise, wie van Beneden es so schön bei Amphistoma beobachtet hat. Leider ist unser Object aber für eine genaue Beobachtung des Vorgangs nicht so günstig wie jenes. Man sieht nur, dass sich im Ei ein Körper bildet, der auf Kosten des Nahrungsdotters immer mehr wächst, endlich diesen fast ganz resorbirt und als fertiger Embryo neben einem stark lichtbrechenden Rest des Nährmaterials im Ei liegt und sich kräftig bewegt. Man erkennt nun schon die Organe des gleich näher zu beschreibenden Embryos, sieht ihn dann im Ei, stark flimmernd, heftige Bewegungen machen und, nachdem der Deckel gesprengt ist, munter davonschwimmen.

Die Körperumrisse dieses Embryos sind bereits vollkommen diejenigen des erwachsenen Polystoms. Er ist ausgestreckt etwa 0,30 mm. lang und lässt deutlich zwei Körperabschnitte

erkennen: den Vorderleib und die Saugscheibe. In ersterem erkennt man neben dem Schlundkopf jederseits zwei Augenflecke, von denen namentlich die grösseren unteren aus einer lichtbrechenden schwach röthlich pigmentirten Substanz bestehen. Vom Verdauungsapparat sieht man die Mundöffnung und den Schlundkopf. Ob der Darm schon angelegt ist, kann ich nicht erkennen, denn der protoplasmatische Körper ist noch sehr zart und dazu mit vielen lichtbrechenden Körnchen angefüllt. Am bemerkenswerthesten ist die Saugscheibe: auf dem Rande dieser stehen nämlich, im Kreise angeordnet, sechszehn Häkchen, welche in ihrer Gestalt den späteren Haken des erwachsenen Polystoms keineswegs ähneln, also Larvenhäkchen sind. Von grösseren Haken ist noch nichts zu sehen und ebenso ist es mir zweifelhaft, ob die sechs Saugnäpfe, wovon ich allerdings Spuren zu erkennen glaubte, schon angelegt sind oder nicht. Der ganze Körper des Thiers, Leib wie Saugscheibe, ist mit einem dichten und starken Flimmerpelz bedeckt, welcher es befähigt, sich mit derselben Geschwindigkeit zu bewegen, wie etwa ein schwimmender Rotifer, und wie dieser sich mit seinem Fuss anheftet, so setzt sich das junge Polystom mit seiner Saugscheibe an Gegenstände an, die es im Wasser antrifft, dabei mit seinem Vorderleib stets hin und her tastend und sich bald streckend bald zusammenziehend. Träfe nun Jemand, der es nicht aus den Eiern des Polystoms hätte ausschlüpfen sehen, dieses Thier im Wasser an, so würde er sofort die grosse Aehnlichkeit desselben mit dem Genus Gyrodactylus bemerken. Denn wie bei G. elegans Nordm. finden wir sechszehn kleine Häkchen am Rande der Bauchscheibe und wie bei G. auricu-

latus Nordm. vier Augenflecke. Natürlich ist diese Aehnlichkeit nur eine scheinbare, doch aber berechtigen uns diese Beziehungen zu jenem Ectoparasiten der Fische von einer gyrodactylusartigen Larve des Polystoma zu sprechen, denn so wird ein Jeder am Besten sich ihre Gestalt vergegenwärtigen können.

Was nun aus dieser Larve wird, darüber giebt vielleicht eine Beobachtung von Pagenstecher Aufschluss, der in der Harnblase eines braunen Frosches ein junges Polystoma antraf, welches im Uebrigen den älteren gleichend noch genau in derselben Lage, wie wir es bei der Larve sahen, vier Augenpunkte trug. Diese Beobachtung sowie die Grösse unseres Thiers, das in seiner äusseren Gestalt die grösste Aehnlichkeit mit den älteren zeigt, führen zu der Vermuthung, dass die Polystomlarve direct in die Frösche einwandre. Ich werde versuchen, wenn ich in diesem Frühjahr noch genügendes Material erhalte, dies experimentell nachzuweisen und in einer ausführlicheren, mit Abbildungen versehenen Arbeit, an einem anderen Orte darauf zurückkommen.

Cassel, 14. April 1871.

Pemphix Albertii Meyer

aus dem unteren Nodosenkalk des Hainbergs.

Decapode Krebse waren meines Wissens in dem ganzen mittleren und nördlichen Deutschland mit Ausnahme von Oberschlesien bisher nicht gefunden worden. Ich war daher nicht wenig überrascht als ich im verflossenen März in dem

unteren Nodosenkalk des Hainbergs einen schön erhaltenen Cephalothorax eines Decapoden auffand. Dass derselbe der Gattung Pemphix angehörte war sofort zu erkennen, eine genauere Betrachtung lehrte aber, dass nicht, wie die Lagerstätte erwarten liess, der gewöhnlich Pemphix Sueurii Desm. sp. vorliege sondern der seltene Pemphix Albertii Meyer.

Von diesem Krebse sind bisher wie bekannt nur 2 Exemplare bekannt geworden: Ein von oben entblösster Cephalothorax aus dem Wellenkalk von Horgen an der Eschach (Oberamts Rottweil), das Original zu H. v. Meyer in Jahrb. für Mineralogie 1835 p. 328 und 1836 p. 56; Derselbe, Neue Gattungen foss. Krebse 1840 p. 9 t. IV. fig. 37; so wie Alberti Ueberbl. über die Trias 1864 p. 194 t. VII fig. 6, und ein von der linken Seite sichtbarer Cephalothorax aus dem Schachte am Stallberge bei Rottweil in Schichten die Alberti jetzt seinen »unteren dolomitischen Kalken« der Lettenkohlengruppe zurechnet. Es ist dies das Original von H. v. Meyer in den Palaeontographica 1854 Bd. IV, p. 53, Taf. X, fig. 5

Unser Exemplar aus der Unterregion des Nodosenkalks würde daher das dritte sein und seinem geologischen Alter nach sich zwischen die beiden bisher bekannten stellen. Obgleich von demselben ebenfalls nur der Cephalothorax überliefert ist, dessen etwas verdrückte rechte Seite allein sichtbar ist, scheint dasselbe, wie an Grösse, so auch durch die treffliche Erhaltungsart die bisher bekannt gewordenen Exemplare zu überbieten.

Dasselbe erreicht von der Spitze des Stirnfortsatzes bis zur Mitte des Abdominalausschnittes 52 mm. Bei Vergleichung unseres Exem-

plares mit der Abbildung von Herm. v. Meyer in den Palaeontographica Bd. IV T. X Fig. 5 fällt zunächst die weniger rectanguläre und cylindrische Gestalt der Schale desselben auf; indem in der Abbildung von Herm. v. Meyer der hintere Rand des Cephalothorax unterhalb des Abdominalausschnittes noch hinter diesen zurückreicht und in kurzer Rundung in den Unterrand umwendet, während in dem vorliegenden Exemplare von dem untern Ende des Abdominalausschnittes der Schalenrand sich unmittelbar in nur geringer Ausbiegung nach vorn zu wenden scheint. Diese Verschiedenheit dürfte nur eine scheinbare, durch den Erhaltungszustand bedingte sein, indem die sichtbare Begrenzung der Schale in dieser Gegend nicht dem ursprünglichen Schalenrande zu entsprechen scheint. Sehr in die Augen springt alsdann ein hervorragender Kiel, der in der Mitte des Cephalothorax und in der Symmetrieebene des Thiers von der Spitze des Stirnfortsatzes bis an den Abdominalausschnitt sich erstreckt. Hinten ist er breiter durch viele Knoten gekerbt und bindfadenähnlich erscheinend nach vorn hin und in dem Stirnfortsatz wird er schmaler und höher und die Knoten wandeln sich in kleine nach vorn gerichtete Stacheln um. Dieser Kiel wird von Herm. v. Meyer beide Male nur in einer kleinen Erstreckung über der Magenregion gezeichnet und in dem Text nicht erwähnt. An dem Exemplar von Horgen lässt Alberti's neue Abbildung in der Mittellinie über der Magenregion eine Bruchlinie erkennen die sicher von dem abgebrochenen Kiel herrührt, über der Genital- und Branchialregion ist aber nur eine eingesenkte Linie gezeichnet, ähnlich derjenigen welche die Abbildungen von Pemphix Sueurii zeigen. In der That könnte

man nach den mir vorliegenden Originalexemplaren dieser letzteren Species argwöhnen, dass der Längskiel nicht auf den Pemphix Albertii beschränkt ist, sondern auch dem Pemphix Sueurii zukommt. Die in den Abbildungen verzeichnete Längslinie wäre dann entweder nur die Bruchlinie in welcher dieser Kiel abgebrochen oder der innere Abdruck der Schalenverdickung welche denselben bildet. Der Stirnfortsatz ist von mittlerer Länge — 8 mm. — und fast geradlinig ausgezogen.

Die zwei Hauptfurchen, welche den ganzen Cephalothorax in drei hintereinander liegende Regionen theilen, verlaufen ganz so, wie sie H. v. Meyer in den Palaeontographica darstellt; nur dass sie etwas weniger schräg nach vorn gewendet sind. Die hintere oder Kiemengegend ist durch die zarten nur nach vorn an Grösse zunehmenden Warzen und durch den Mangel eines aufgetriebenen Wulstringes vor dem Abdominalausschnitt ausgezeichnet und dadurch sehr leicht und bestimmt von P. Sueurii zu unterscheiden. Die zwischen der Kiemengegend und der mittleren oder Genitalgegend gelegene gabelförmige Leiste ist schmal, vorn scharf abgestutzt, nicht nach unten geschwungen wie bei P. Sueurii, beiderseits von der Mittellinie nur wenig verbreitert und durch die hier sanft auslaufende vordere Furche nur schwach von der vorliegenden Genitalregion geschieden.

Die Mittelregion besteht aus einem oberen herzförmigen Theil der ausser kleineren Warzen auch mit einer Anzahl grösserer besetzt ist die sich gleichzeitig in Längs- und Querreihen ordnen. Durch eine flache Einsenkung getrennt folgt nach aussen und unten eine etwas nierenförmige blasenartige Auftreibung die nach unten steil abfällt ähnlich wie bei P. Sueurii und

unter welcher ebenfalls, nur durch einen schmalen Streifen getrennt, eine Längsfurche verläuft, welche die erste vordere Querfurche nach unten und aussen begrenzt, sich nach vorn und oben wendet und endlich in einer ausspringenden Ecke den vorderen Schalenrand erreicht. Die vordere, der Magengegend entsprechende Region ist nach unten und aussen auch noch ähnlich wie bei P. Sueurii gebildet. Unmittelbar über der oben erwähnten Längsfurche und vor der vorderen Hauptquerfurche liegt eine stark blasenförmig aufgetriebene Partie die wie die hinter ihr in der Mittelregion gelegene etwas nierenförmig gestaltet ist. Sie mag den Kaumuskeln entsprechen. Vor ihr liegt noch eine kleine durch zwei kleine hintereinander gelegene Höckerchen gebildete Auftreibung. Ueber ihr folgt erst eine kleine Längsleiste und darüber eine sehr flache rundlich dreiseitige Erhebung die nicht bis an den Kiel heranreicht. Neben diesem findet man vielmehr in der ganzen vorderen Region eine von sechs Knötchen (die in Wahrheit wohl abgebrochene Stacheln gewesen sind) gebildete Kante die in den Aussenrand des ähnlich verzierten Stirnfortsatzes verläuft. Unter ihr bilden drei andere Knöchelchen eine ähnliche Kante, die aber weit kürzer ist und den vorderen Rand nicht erreicht sondern in einer kleinen Anschwellung sich nach oben wendet und an der Basis des Stirnfortsatzes sich mit der oberen Kante vereinigt. Sowohl H. v. Meyer's Abbildung in den Palaeontographicis als Alberti's in dem Ueberblick über die Trias lassen diese Verhältnisse der vorderen Region nur theilweise und nicht völlig richtig erkennen. Das Exemplar vom Stallberge ist vorn an der Längsfurche abgebrochen und beiden fehlt der vordere Rand und

der Stirnfortsatz. Dieser Letztere ist dreischneidig, die Seitenkanten sind mit gröberen, die obere, mittlere mit feinen nach vorn gewendeten Dornen versehen.

Wäre dieser vordere Theil der Schale besser an den zwei Süddeutschen Exemplaren erhalten gewesen, so würde vermuthlich H. v. Meyer diesen Krebs gar nicht zu Pemphix gebracht oder doch wenigstens ihn nicht dauernd bei dieser Gattung gelassen haben, denn derselbe steht offenbar seinen Gattungen Lithogaster und Lissocardia mindestens ebenso nahe als dem echten Pemphix Sueurii. Zu Lissocardia hat Eck bekanntlich auch die beiden Gattungen und Species Aphtharthus ornatus Meyer und Myrtonius serratus Meyer gebracht die er für nur eine Species hält (Eck Muschelkalk in Oberschlesien p. 108). Völlige Sicherheit über die Beziehungen unserer Form zu diesen beiden Gattungen wird natürlich nur durch Vergleichung mit den Originalexemplaren zu erlangen sein. Nach den vorhandenen Beschreibungen und Abbildungen vermuthe ich jedoch, dass die Lithogaster, Lissocardia, Pemphix Albertii Meyer und Pemphix Meyeri Alb. eine eng verknüpfte und eventuell als eine Gattung unter der Bezeichnung Lithogaster zu vereinigende Formreihe darstellen. Jedenfalls stehen aber die beiden letzten als Pemphix bezeichneten Arten den von Oppel als Pseudoglyphaea ausgeschiedenen Formen, wie eine Vergleichung mit seiner P. grandis Meyer sp. (Meyer N. Gatt. Krebse p. 17 T. IV fig. 27 a, b und Oppel. Pal. Mittheil. I p. 52 T. XIII fig. 1 a und b) zeigt, mindestens ebenso nahe als dem typischen Pemphix Sueurii. Sobald es mir möglich gewesen sein wird Originalexemplare von Lithogaster

und Lissocardia zu vergleichen, werde ich die erkannten Resultate mittheilen und durch gute neue Abbildungen zu erläutern suchen.

K. v. Seebach.

Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes entspricht.

Von

Sophus Lie in Christiania.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Die nachstehenden Betrachtungen, auf welche ich durch eine Note*) von Herrn Klein geführt worden bin, die sich übrigens auch an meine eigenen früheren Arbeiten anschliessen, können theilweise als Verallgemeinerung des Inhaltes der genannten Note auf n Dimensionen betrachtet werden. Unter meinen Resultaten hebe ich sogleich hervor, dass ich aus der bekannten Jacobischen Theorie des Systems:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^2}{a_i+\lambda} = 1$$

die Existenz einer ausgedehnten Familie algebraischer Flächen mit algebraischen Krümmungscurven erschliesse:

1. Seien x_1, x_2, ... x_n absolute (das heisst,

1) Göttinger Nachrichten, März 1871: »Ueber einen Satz aus der Theorie der Linien-Complexe, welcher dem Dupin'schen Theorem analog ist,« von Felix Klein.

nicht homogene) Coordinaten eines Raumes R_n mit n Dimensionen. Es bestimmt alsdann eine Gleichung:

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$$

eine (n—1)fache Mannigfaltigkeit, die ich mit dem Symbole M_{n-1} bezeichne. Die durch eine lineare Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\, x_i = \text{Const.}$$

dargestellte M_{n-1} soll, wie gewöhnlich, eine ebene Mannigfaltigkeit heissen, und insbesondere nenne ich:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{dx_i}(x_i' - x_i) = 0$$

die ebene Tangential-Mannigfaltigkeit von $F = 0$, wobei vorausgesetzt wird, dass die Coordinaten (x_i) ($F = 0$) genügen. Das Wort Configuration brauche ich um eine beliebige, einfach unendliche Mannigfaltigkeit zu bezeichnen. Beispielsweise könnte man eine Curve eine Punkt-Configuration, wie auch eine Linienfläche eine Geraden-Configuration nennen. In dem Raume R_n wird eine Configuration durch (n—1) Gleichungen dargestellt, und wenn dieselben linear sind, geschieht dies am einfachsten folgenderweise:

$$\frac{x_1' - x_1}{a_1} = \ldots \frac{x'_i - x_i}{a_i} = \ldots \frac{x'_n - x_n}{a_n}$$

Die eben geschriebene Configuration nenne ich, wenn die Grössen (x_i) die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\, x_i = \text{Const.}$$

befriedigen, die Normal-Configuration dieser ebenen Mannigfaltigkeit. Ferner soll die Configuration:

$$\frac{x_1'-x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \ldots \frac{x_i'-x_i}{\frac{dF}{dx_i}} = \ldots \frac{x_n'-x_n}{\frac{dF}{dx_n}}$$

die der M_{n-1} $(F=0)$ im Elemente (x_i) zugehörige Normal-Configuration heissen.

Wenn ich über Richtung spreche, so verstehe ich dabei einen Uebergang von einem Element zu einem unendlich benachbarten. Zwei Richtungen $(dx_i^{(a)})$, $(dx_i^{(b)})$ heissen orthogonal, wenn die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} dx_i^{(a)}\, dx_i^{(b)} = 0$$

gilt; ebenso schneiden zwei M_{n-1} $(F=0)$ und $(\Phi=0)$ einander orthogonal, wenn die Relation:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{dx_i}\,\frac{d\Phi}{dx_i} = \lambda F + \mu \Phi$$

stattfindet, das heisst, wenn das linke Glied für gemeinsame Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten gleich Null ist. Es ist zu bemerken,

dass die Orthogonalitäts-Beziehungen für eine jede orthogonale Transformation:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}\, x_i,\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}^2 = 1,\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}\, a_{ki} = 0$$

ungeändert bleiben.

2. Schneiden sich die beiden Normal-Configurationen, welche zwei unendlich benachbarten Elementen einer M_{n-1} entsprechen, so nenne ich die Richtung, die vom ersten Elemente zu dem benachbarten führt, eine Haupt-Richtung, und es lässt sich zeigen, dass von jedem Elemente im Allgemeinen $(n-1)$ Haupt-Richtungen ausgehen. Differentiirt man nehmlich die Gleichung der Normal-Configuration, die ich folgenderweise schreibe:

$$x_1'-x_1 = \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dx_n}}(x_n'-x_n),\quad x_i'-x_i = \frac{\frac{dF}{dx_i}}{\frac{dF}{dx_n}}(x_n'-x_n)$$

hinsichtlich aller (x_i), indem die Grössen (x_i') als constant betrachtet werden, so erhält man $(n-1)$ Gleichungen:

$$f_{1i}\, dx_1 + f_{2i}\, dx_2 + \ldots f_{ni}\, dx_n = 0,$$

die hinsichtlich aller dx linear sind, welche ferner in linearer Weise die Grösse $(x_n'-x_n)$ (in den Coefficienten f) enthalten. Die Elimination von allen dx zwischen diesen Gleichungen und der folgenden:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{dx_i}\, dx_i = 0$$

giebt eine Gleichung $(n-1)$ten Grades zur Bestimmung von $(x_n'-x_n)$, und also ist meine Behauptung bewiesen. Die Coordinaten $(x_1' \, x_2' \ldots x_n')$ bestimmen auf der Normal-Configuration $(n-1)$ Elemente, die ich als Haupt-Elemente derselben oder als Krümmungs-Centra der M_{n-1} bezeichne.

Dass jedem Elemente einer M_{n-1} im Allgemeinen $(n-1)$ Hauptrichtungen entsprechen, lässt sich auch folgenderweise einsehen, und hierbei wird zugleich bewiesen, dass diese Richtungen paarweise orthogonal sind. Man führe eine orthogonale Transformation aus und wähle ein Element unserer M_{n-1} und die zugehörige ebene Tangential-Mannigfaltigkeit bezüglich als Coordinaten-Anfang $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$ und Coordinaten-Mannigfaltigkeit $(x_1 = 0)$. Die Gleichung der betreffenden M_{n-1} schreibt sich alsdann, wenn man sich auf Grössen zweiter Ordnung beschränkt, folgenderweise:

$$x_1 + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \, x_i \, x_k + \ldots . = 0.$$

Es lässt sich bekanntlich diese Gleichung durch eine neue orthogonale Transformation der Grössen $(x_2, x_3 \ldots x_n)$ auf die Form:

$$x_1 + \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} \, x_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} c_{1i} \, x_1 \, x_i + \ldots = 0$$

bringen, und wenn man hier die Haupt-Richtungen im Coordinaten-Anfange sucht, findet man, dass dieselben jedesmal $(n-2)$ der $(n-1)$ Gleichungen:

$$x_2 = 0, \; \ldots . \; x_i = 0, \; \ldots . \; x_n = 0$$

befriedigen [1]).

Eine jede in einer M_{n-1} enthaltene Configuration, deren Richtungen sämmtlich Haupt-Richtungen sind, werde ich eine Haupt-Configuration der Mannigfaltigkeit nennen, und es ist einleuchtend, dass eine M_{n-1} im Allgemeinen $(n-2)$fach unendlich viele Haupt-Configurationen besitzt, dass ferner $(n-1)$ solche durch jedes Element gehen.

3. Das Dupin'sche Theorem lässt sich folgenderweise auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern.

Es seien gegeben n Schaaren M_{n-1}:

$$F_1 = \lambda_1, \; \ldots . \; F_i = \lambda_i, \; \ldots . \; F_n = \lambda_n,$$

deren Constituenten eine jede M_{n-1} der anderen Schaaren orthogonal schneiden, dergestalt dass die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF_a}{dx_i} \frac{dF_b}{dx_i} = \mu (F_a - \lambda_a) + \nu (F_b - \lambda_b)$$

für eine jede Combination (a, b) stattfindet. Wählt man nun aus jeder Schaar eine M_{n-1}:

$$\lambda_1', \; \lambda_2', \; \ldots . \; \lambda_j' \; \ldots . \; \lambda_n'$$

so behaupte ich, dass λ_j' immer $(n-2)$ von diesen Mannigfaltigkeiten nach einer

1) Die bis hier auseinandergesetzte Verallgemeinerung der Theorie der Krümmung der Flächen ist bereits von Herrn Kronecker gegeben worden in dem Aufsatze: »Ueber Systeme von Functionen etc.« Berl. Monatsberichte. Aug. 1869.

Configuration schneidet, die für alle $(n-1)$ M_{n-1}, welche dieselbe enthalten, eine Haupt-Configuration ist.

Nimmt man nehmlich ein gemeinsames Element der n gewählten Mannigfaltigkeiten zum Coordinaten-Anfang und die zugehörigen ebenen Tangential-Mannigfaltigkeiten, welche paarweise orthogonal sind, zu Coordinaten-Mannigfaltigkeiten, so erhalten die Gleichungen unserer n M_{n-1} die folgende Form:

$$x_j + \Sigma \Sigma a_{ik} x_i x_k + .. = 0,$$

und es lässt sich zeigen [1]), dass wenn jedesmal zwei von diesen M_{n-1} sich auch in benachbarten Elementen orthogonal schneiden sollen, so können die Coefficienten a_{ik} nur unter den Voraussetzungen:

$$i = k, \; j = i, \; j = k$$

von Null verschieden sein. Man wird somit auf die Form:

$$x_j + \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} x_i'^2 + \sum_{i=1}^{i=n} b_i x_j x_i + \ldots = 0,$$

oder wenn man bemerkt, dass x_j eine Grösse zweiter Ordnung ist, auf die folgende:

$$x_j + \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} x_i^2 + \ldots = 0$$

geführt, und also ist unser Satz bewiesen.

1) Vergleiche: Salmon's Raumgeometrie (II, p. 51, der Uebersetzung von Fiedler), wie auch Kleins oben cirtirte Note.

Für eine jede Mannigfaltigkeit M_{n-1} die einem Orthogonal-Systeme angehört, ordnen sich nach dem Obenstehenden die Haupt-Configurationen auf eigenthümliche Weise. Es lässt sich nemlich eine solche M_{n-1} auf $(n-1)$ Weisen in einfach unendlich viele M_{n-2} theilen, dergestalt dass jede M_{n-2} $(n-2)$ fach von Haupt-Configurationen der gegebenen Mannigfaltigkeit erzeugt wird. Ebenso theilt sich jede M_{n-2} auf $(n-2)$ Weisen in einfach unendlich viele M_{n-3}, die jede $(n-3)$fach von Haupt-Configurationen erzeugt wird u. s. w.

Es lässt sich dieses folgenderweise aussprechen: Seien

$$(dx_1^{(1)}, dx_2^{(1)}, .. dx_i^{(1)}), (dx_i^{(2)}), ... (dx_i^{(n-1)})$$

die $(n-1)$ Haupt-Richtungen einer M_{n-1}, welche einem Orthogonal-Systeme angehört. Es können alle (dx) als bekannte Funktionen von $(x_1 .. x_{n-1})$ betrachtet werden. Man bestimme $(n-1)$ Grössen (X_i) durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i^{(1)} = 0, \ldots \sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i^{(2)} = 0 \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i^{(n-1)} = 0.$$

Es lässt sich alsdann der Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i \, dx_i = 0$$

in der Form $(\Phi \, (x_1 \, x_2 \ldots x_{n-1}) = \text{Const})$ integriren. Wenn umgekehrt die Haupt-

Richtungen einer M_{n-1} diese Bedingung befriedigen, so kann man beweisen, worauf ich hier nicht eingehe, dass die betreffende M_{n-1} wenigstens einem Orthogonal-Systeme angehört.

4. Die Mannigfaltigkeit:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2 + y_{n+1}^2 = 0$$

besitzt, wie man sich leicht überzeugt, die Eigenschaft, dass alle in derselben enthaltenen Configurationen Haupt-Configurationen sind; es schneiden sich nehmlich alle Normal-Configurationen in dem Elemente $(y_1, y_2 \ldots y_n)$. Ich nenne diese M_{n-1} die Kugel des Raumes R_n und das Element $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ das Centrum derselben. Eine orthogonale Transformation unseres Raumes führt die Kugeln desselben in eben solche über. Wenn zwei Kugeln $(y_1', y_2', \ldots y_n', y_{n+1}')$ und $(y_1'', y_2'' \ldots y_{n+1}'')$ einander in einem gemeinsamen Elemende $(x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n)$ berühren, so finden die Gleichungen statt:

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} (y_i' - y_i'')^2 = 0,$$

$$\frac{y_i' - x_i}{y_i'' - x_i} = \ldots \frac{y_n' - x_n}{y_n'' - x_n} = \frac{y'_{n+1}}{y''_{n+1}}.$$

Wenn eine dritte Kugel $(y_1''' \ldots y_{n+1}''')$ die beiden genannten in dem Elemente $(x_1 \ldots x_n)$ berührt, so gelten die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=(n+1)} (y_i' - y_i''')^2 = 0, \; \sum_{i=1}^{i=n+1} (y_i'' - y_i''')^2 = 0$$

und ohnedies die folgenden:

$$\frac{y_1'-y_1''}{y_1'-y_1'''}=\dots\frac{y_i'-y_i''}{y_i'-y_i'''}=\dots\frac{y_{n+1}'-y_{n+1}''}{y_{n+1}'-y_{n+1}'''}.$$

Unter den einfach unendlich vielen Kugeln, die eine gegebene M_{n-1} in einem gegebenen Elemente derselben berühren, sind $(n-1)$ ausgezeichnet und sollen Haupt-Kugeln heissen. Es sind dies diejenigen Kugeln, deren Centra Haupt-Elemente der betreffenden Normal-Configuration sind. Jede Haupt-Kugel berührt die Mannigfaltigkeit M_{n-1} in zwei unendlich nahen Elementen einer Haupt-Configuration, und also berühren zwei consecutive der einfach unendlich vielen Haupt-Kugeln, die einer Haupt-Configuration entsprechen, immer unsere M_{n-1} in einem gemeinsamen Elemente. Demzufolge kommt die Aufgabe: die Haupt-Configurationen einer M_{n-1} zu bestimmen, darauf hinaus, die Haupt-Kugeln derselben auf alle möglichen Weisen in Configurationen zu ordnen, dergestalt dass zwei consecutive ein gemeinsames Berührungs-Element mit der M_{n-1} haben.

5. Die Kugel des Raumes R_n hängt von $(n+1)$ Parametern $(y_1, y_2 \dots y_{n+1})$ ab; führt man also die Kugel als Element ein, so erhält der Raum, den ich alsdann mit dem Symbole R_{n+1} bezeichnen werde, $(n+1)$ Dimensionen; als Coordinaten wähle ich hierbei die Grössen $(y_1, y_2 \dots y_{n+1})$.

Ich unterwerfe nun R_{n+1} einer durch $(n+1)$ Gleichungen zwischen den Kugel-Coordinaten (y_i) ausgedrückten Transformationen, und indem ich mich zunächst auf orthogonale Transformationen:

$$y_i = \sum_{j=1}^{j=n+1} a_{ij}\eta_j, \quad \sum_{j=1}^{j=n+1} a_{ij}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{j=n+1} a_{ij}a_{kj} = 0,$$

beschränke, behaupte ich, dass dabei alle Kugeln, die einander in einem gemeinsamen Elemente berühren, in ebensolche übergehen. Die Berührungs-Bedingung:

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} (y_i' - y_i'')^2 = 0$$

transformirt sich nehmlich in den entsprechenden Ausdruck:

$$\sum_{j=1}^{j=n+1} (\eta_j' - \eta_j'')^2 = 0;$$

ebenso gehen die Gleichungen:

$$\frac{y_1' - y_1''}{y_1' - y_1'''} = \dots \frac{y_i' - y_i''}{y_i' - y_i'''} = \dots \frac{y_{n+1}' - y_{n+1}''}{y_{n+1}' - y_{n+1}'''}$$

in die folgenden:

$$\frac{\eta_1' - \eta_1''}{\eta_1' - \eta_1'''} = \dots \frac{\eta_i' - \eta_i''}{\eta_i' - \eta_i'''} = \dots \frac{\eta_{n+1}' - \eta_{n+1}''}{\eta_{n+1}' - \eta_{n+1}'''}$$

über, und also ist meine Behauptung bewiesen.

Es lässst sich in Folge dessen die orthogonale Transformation des Raumes R_{n+1} als eine Transformation von R_n auffassen, und zwar haben die betreffenden Transformations-Gleichungen die folgende Form:

$$\xi_i = \Pi_i \left(x_1, x_2 \dots x_n, \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_n}{dx_2} \dots \frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)$$

In dieser Auffassung führt eine orthogonale Transformation des Raumes R_{n+1} eine im Raume R_n gegebene Mannigfaltigkeit:

$$F(x_1\ x_2 \dots x_n) = 0$$

in eine neue über:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = 0,$$

und hierbei entsprechen sich, wie ich sogleich beweisen werde, die Haupt-Configurationen der gegebenen und der transformirten Mannigfaltigkeit. Der Inbegriff der Kugeln, die $(F=0)$ in zwei consecutiven Elementen berühren, das heisst die Haupt-Kugeln von $F=0$, gehen nehmlich in die Haupt-Kugeln von $\Phi=0$ über; es transformirt sich ferner eine jede continuirliche Aufeinanderfolge von Haupt-Kugeln, von denen immer zwei consecutive ein gemeinsames Berührungs-Element mit $(F=0)$ haben, in Kugeln, welche zu $(\Phi=0)$ in demselben Verhältniss stehen.

Man denke sich gegeben $(n-1)$fach unendlich viele Kugeln, die durch zwei Relationen:

$$f_1(y_1, y_2 \dots y_{n+1}) = 0 \quad f_2(y_2, y_2 \dots y_{n+1}) = 0$$

definirt werden. Dieses Kugel-System bestimmt als Envelopp-Gebilde eine Mannigfaltigkeit M_{n-1}, deren Gleichung:

$$F(x_1\ x_2 \dots x_n) = 0$$

man findet, wenn man die Relationen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2 + y_{n+1}{}^2 = 0;\ f_1 = 0;\ f_2 = 0$$

hinsichtlich aller (y_i) differentiirt und darnach diese Grössen eliminirt. Eine orthogonale Transformation von R_{n+1} führt unser Kugel-System

und das zugekörige Enveloppe-Gebilde ($F=0$) in ein neues Kugel-System mit seinem Enveloppe-Gebilde ($\Phi=0$) über, und es ist nach dem Obenstehenden einleuchtend, dass Kugeln des gegebenen Systems, welche ($F=0$) in Elementen einer Haupt-Configuration berühren, sich in Kugeln, die zu ($\Phi=0$) in demselben Verhältnisse stehen, transformiren.

6. Ich betrachte nun im Raume R_{n+1} ein Orthogonal-System:

$$F_1(y_1, y_2 \ldots y_{n+1}) = \lambda_1; \ldots F_i = \lambda_i, \ldots F_{n+1} = \lambda_{n+1}$$

und alle Kugeln, welche zwei bestimmten Mannigfaltigkeiten: (λ_1') und (λ_{n+1}') zugleich angehören. Dieses Kugel-System, welches nach Nummer 3 ($n-1$)fach von gemeinsamen Haupt-Configurationen der Mannigfaltigkeiten (λ_1') und (λ_{n+1}') erzeugt wird, bestimmt ein Enveloppe-Gebilde:

$$F(x_1 \, x_2 \ldots x_n) = 0,$$

und zwar berühren die besprochenen Haupt-Configurationen dieses Gebilde nach seinen Haupt-Configurationen.

Um dieses merkwürdige Theorem zu beweisen, führe man eine orthogonale Transformation von R_{n+1} aus, durch welche ($y_1, y_2 \ldots y_{n+1}$) ebene Tangential-Mannigfaltigkeiten von ($n+1$) bestimmten Mannigfaltigkeiten:

$$\lambda_1', \lambda_2' \ldots \lambda_{n+1}'$$

für ein gemeinsames Element derselben werden. Es lassen sich alsdann die Gleichungen ($F_i = \lambda_i'$)

mit Vernachlässigung von Grössen dritter Ordnung folgenderweise schreiben:

$$F_i = y_i + \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{kk}^{(i)} y_k^2 + \ldots. = 0.$$

Die gemeinsamen Kugeln der beiden Mannigfaltigkeiten (F_1) und (F_{n+1}) werden mit der genannten Genauigkeit durch die Gleichungen:

$$y_1 + \sum_{k=2}^{k=n} a_{kk}^{(1)} y_k^2 + \ldots = 0,$$

$$y_{n+1} + \sum_{k=2}^{k=n} a_{kk}^{(n+1)} y_k^2 + \ldots = 0$$

bestimmt, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass allen diesen Kugeln ein Envelopp-Gebilde entspricht, dessen Gleichung mit derselben Approximation die Form besitzt:

$$F = x_1 + \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} x_i^2 + \ldots = 0.$$

Es zeigt sich also, dass die Haupt-Richtungen von $(F=0)$ im Elemente $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$ mit denjenigen übereinstimmen, die unser Theorem angiebt, und wenn man die früheren Betrachtungen berücksichtigt, sieht man, dass hiermit unser Satz bewiesen ist.

Die Haupt-Configurationen der Mannigfaltigkeit $(F=0)$ haben, wie man leicht sieht, die früher besprochene Gruppirung und also giebt es im Raume R_n wenigstens ein Orthogonal-System, welches $(F=0)$ enthält.

7. An das Vorstehende schliesst sich der allgemeinere Satz an: Wenn man im Raume R_n eine Mannigfaltigkeit M_{n-1} und ihre Haupt-Configuration kennt, so kann man, vorausgesetzt dass diese Configurationen die charakteristische Gruppirung haben, für einen jeden Raum R_{n-p}, dessen Dimension-Zahl kleiner ist, Mannigfaltigkeiten M_{n-p-1} angegeben, deren Haupt-Configurationen bestimmbar sind und die betreffende Gruppirung haben. Die einzigen Operationen, welche hierbei zur Anwendung kommen, sind Differentiation und Elimination.

Der Beweis liegt fast unmittelbar in unseren früheren Betrachtungen; wir haben nehmlich diesen Satz für den Fall ($p = 1$) bewiesen, und der allgemeine Satz ist wesentlich mit diesem Falle, mehreremal angewandt, identisch. Die folgenden Andeutungen können vielleicht dazu dienen, dieses und das bisher Auseinandergesetzte geometrisch zu versinnlichen.

Als Element des Raumes R_n mit drei Dimensionen wähle ich den Punkt und als Coordinaten die Cartesischen x_1, x_2, x_3. Die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=3} (x_i - y_i)^2 + y_4^2 = 0$$

stellt in gewöhnlicher Bedeutung des Wortes eine Kugel dar, für welche y_1, y_2, y_3 Center-Coordinaten, $y_4 i$ Radius sind. Als Element eines Raumes R_4 mit vier Dimensionen wähle ich die Kugel des gewöhnlichen Raumes und als Coordinaten die Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 oder,

wie ich nun schreibe, x_1, x_2, x_3, x_4 [1]). Die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=4} (x_i - y_i)^2 + y_5^2 = 0$$

stellt ein Kugel-System dar und zwar dasjenige welches ich in der eben citirten Abhandlung als einen linearen Kugel-Complex bezeichnet habe. Als Element des Raumes R_5 wähle ich dieses Kugel-System und als Coordinaten die Grössen y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 u. s. w.

Den vier Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 kann man auch, wie dieses aus der von mir untersuchten Abbildung [2]) des linearen Complexes auf den Punctraum hervorgeht, wie dies von einem andern Ausgangspuncte aus auch Herr Klein in der öfter citirten Note gethan hat, die Bedeutung von Linien-Coordinaten geben. Element des Raumes R_n wird dann vermöge der genannten Abbildung der lineare Complex und entspricht dieses der Einführung des linearen Complexes als Raumelement, welche Herr Klein an einem anderen Orte [3]) auseinandergesetzt hat.

8. Jacobi hat bekanntlich gezeigt, dass die einfach unendlich vielen Mannigfaltgkeiten, die durch die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 1$$

1) Vergleiche: »Ueber eine Classe geometrischer Transformationen« von Lie, Akademie zu Christiania, 1870 und 1871.

2) cf. Monatsberichte der Berliner Akademie. Dec. 1870.

3) Math. Ann. t. II. Ueber die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinaten. Vergl. auch: Pluecker, Neue Geomotrie. n. 19.

dargestelt werden, in unserer Terminologie ein Orthogonal-System bilden. Es lassen sich also für jeden Raum R_n algebraische Mannigfaltigkeiten angeben, deren Haupt-Configurationen algebraisch sind und die charakteristische Gruppirung haben. Wenn man auf diese Mannigfaltigkeiten die früher angegebenen Operationen anwendet, erhält man z. B. unbegrenzt viele algebraische Flächen mit algebraischen Krümmungs-Curven oder durch die oben erwähnte Abbildung, unbegrenzt viele albraische Flächen mit algebraischen Haupttangenten-Curven. Man erhält ferner beliebig viele algebraische Linien-Complexe mit algebraischen Haupt-Configurationen, welche die besprochene Gruppirung haben (vergl. die Note des Herrn Klein.) Man sieht in Folge dessen die Möglichkeit ein, unbegrenzt viele algebraische Systeme von Linien-Complexen, die paarweise in Involution liegen, anzugeben u. s. w.

9. Es mögen noch die folgenden Sätze ausgesprochen werden:

a. Die allgemeinste Transformation des Raumes R_n

$$\xi_i = \Pi_i (x_1, x_2 \dots x_n)$$

die den Ausdruck $\sum_{i=1}^{i=n} d\,\xi_i^2$ in ein Multiplum:

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) \sum_{i=1}^{i=n} dx_i^2$$

überführt, ist zugleich die allgemeinste Transformation der angegebenen Form, welche Haupt-Configurationen des Raumes R_n in eben solche

überführt. Hierher gehören die orthogonale Transformation, wie auch eine, die der Transformation durch reciproke Radien entspricht.

b. Die besprochene Transformation lässt sich zugleich als eine Transformation des Raumes R_{n-1} auffassen und zwar erhalten wir in dieser Weise die allgemeinste Umwandlung dieses Raumes, die sich folgenderweise ausdrücken lässt:

$$\xi_i = \Phi_i\left(x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, \frac{dx_{n-1}}{dx_1}, \frac{dx_{n-1}}{dx_2}, \ldots \frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}}\right)$$

und welche die Eigenschaft besitzt, Haupt-Configurationen des Raumes R_{n-1} in eben solche überzuführen.

c. Es lassen sich für den Raum R_n $(n+2)$ homogene Coordinaten, die eine Bedingungs-Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} x_i^2 = 0$$

befriedigen, anwenden. Die Bedingung für Orthogonalität zwischen zwei Mannigfaltigkeiten $(F=0)$ und $(\Phi=0)$ drückt sich hierbei folgenderweise aus:

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} \frac{dF}{dx_i} \frac{d\Phi}{dx_i} = \mu F + \nu \Phi.$$

Wenn n gleich drei ist, trifft man eine Coordinaten-Bestimmung des Punkt-Raums, die darauf zurückkommt, den Punkt durch seine Potenz hinsichtlich fünf paarweise orthogonaler Kugeln zu bestimmen. Wenn n gleich vier ist, so erhält man für die Plückersche Linien-Geometrie die von Herrn Klein eingeführte Coor-

dinaten-Bestimmung[1]) hinsichtlich 6 linearer Complexe, die paarweise in Involution liegen.

d. Die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 0; \quad \sum_{i=1}^{i=n+2} x_i^2 = 0$$

stellen, wenn alle x als homogene Coordinaten und ferner die letzte Relation als eine Bedingungs-Gleichung zwischen diesen Coordinaten aufgefasst werden, ein Orthogonal-System des Raumes R_n dar und zwar eins, welches das Jacobische:

$$\sum_{i=1}^{i+n} \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 1$$

als Grenz-Fall enthält. Wenn n gleich drei ist, erhält man z. B. das Darboux-Moutard'sche Orthogonal-System, welches bekanntlich als eine Verallgemeinerung von confocalen Flächen zweiten Grades aufgefasst werden kann. —

Als nachträgliche Bemerkung muss ich noch hinzufügen, was ich leider erst neuerdings nach Abschluss der vorstehenden Note gesehen habe, dass Herr Darboux bereits in den Comptes Rendus Aug. 1869. eine Methode angegeben hat, nach welcher man aus jedem Orthogonalsysteme des Raumes von n Dimensionen ein solches im Raume von (n—1) Dimensionen erhalten kann. Indess scheint die dabei angewandte Methode von der in n. 6 auseinandergesetzten wesentlich verschieden zu sein.

Christiania, 24 April 1871.

1) Math. Ann. t. II. Zur Theorie der Complexe des ersten und zweiten Grades.

Ueber die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungsmittelpuncte entsprechen.

Von

A. Enneper.

Die Endpuncte der Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche bilden bekanntlich zwei Schalen, deren Bestimmung für eine gegebene Fläche sich auf die Elimination von drei Quantitäten zwischen vier Gleichungen reducirt. Nimmt man umgekehrt eine der Schalen als gegeben an, so hängt die Bestimmung der primitiven Fläche von einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ab. Sind beide Schalen gegeben, so erhält man eine Reihe von Flächen, welche unter einander parallel sind. Von diesem letzteren Falle scheinen sehr wenige Beispiele zu existiren, wenigstens weiss Chasles (Journ. de Math. Année 1860. p. 442) nur eins anzuführen, welches derselbe zuerst im Aperçu historique p. 392 aufgestellt hat und wovon Liouville (Journ. de Math. An. 1851 p. 6) eine kurze analytische Andeutung gegeben hat. Unter diesen Umständen scheint es nicht ohne Interesse zu sein, das von Liouville gefundene Resultat zu verificiren, wobei sich ausser den von Chasles bemerkten confocalen Mittelpunctsflächen zweiten Grades noch ergiebt, dass auch zwei Paraboloide die Flächen der Krümmungsmittelpuncte eines Systems paralleler Flächen sein können.

I.

Berührt die Grade:

$$\frac{X-x}{\cos\alpha} = \frac{Y-y}{\cos\beta} = \frac{Z-z}{\cos\gamma}$$

jede der beiden confocalen Flächen:

$$1) \qquad \frac{X^2}{a^2-p^2} + \frac{Y^2}{b^2-p^2} + \frac{Z^2}{c^2-p^2} = 1,$$

$$\frac{X^2}{a^2-q^2} + \frac{Y^2}{b^2-q^2} + \frac{Z^2}{c^2-q^2} = 1,$$

so finden die beiden Gleichungen statt:

$$\left(\frac{x^2}{a^2-p^2} + \frac{y^2}{b^2-p^2} + \frac{z^2}{c^2-p^2} - 1\right)$$

$$.\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2-p^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2-p^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2-p^2}\right) =$$

$$\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2-p^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2-p^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2-p^2}\right)^2,$$

2)

$$\left(\frac{x^2}{a^2-q^2} + \frac{y^2}{b^2-q^2} + \frac{z^2}{c^2-q^2} - 1\right)$$

$$.\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2-q^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2-q^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2-q^2}\right) =$$

$$\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2-q^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2-q^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2-q^2}\right)^2.$$

Sieht man x, y, z als gegeben an, so ergeben sich die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus den Gleichungen 2) und der folgenden:

$$3) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Der Punct (x, y, z) lässt sich als Durchschnitt dreier Flächen zweiten Grades ansehn, welche unter einander und zu den Flächen 1) confocal sind. Sind λ, μ, ν drei Variabele, so kann man setzen:

$$4) \qquad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= -\frac{(b^2-\lambda^2)(b^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}, \\ z^3 &= \frac{(c^2-\lambda^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}, \end{aligned}$$

wo $a > b > c > \lambda$, $b > \mu > c$, $a > \nu > b$. Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$5) \qquad \frac{x^2}{a^2-p^2} + \frac{y^2}{b^2-p^2} + \frac{z^2}{c^2-p^2} - 1$$

$$= \frac{(p^2-\lambda^2)(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)}{(a^2-p^2)(b^2-p^2)(c^2-p^2)}$$

Zur Bestimmung von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ setze man:

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2-\lambda^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2-\lambda^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2-\lambda^2} = L,$$

$$6) \qquad \frac{x\cos\alpha}{a^2-\mu^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2-\mu^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2-\mu^2} = M,$$

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2 - \nu^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - \nu^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - \nu^2} = N.$$

Für:

7) $$H = (\nu^2 - \mu^2)(\nu^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)$$

geben die Gleichungen 6):

$$Hx \cos \alpha = \frac{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}[L(\nu^2-\mu^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)$$

$$- M(\nu^2 - \lambda^2)(b^2 - \mu^2)(c^2 - \mu^2 + N(\mu^2-\lambda^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)],$$

$$Hy \cos \beta = \frac{(b^2-\lambda^2)(b^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}[-L(\nu^2-\mu^2)(a^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)$$

$$+ M(\nu^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2) - N(\mu^2-\lambda^2)(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)],$$

$$Hz \cos \gamma = \frac{(c^2-\lambda^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}[L(\nu^2-\mu^2)(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)$$

$$- M(\nu^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(b^2-\mu^2) + N(\mu^2-\lambda^2)(a^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)].$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) = l,$$

$$(a^2 - \mu^2)(b^2 - \mu^2)(c^2 - \mu^2) = -m,$$

$$(a^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2) = n,$$

so geben die Gleichungen 8):

$$\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2-p^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2-p^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2-p^2}\right)(a^2-p^2)(b^2-p^2)(c^2-p^2)\, H =$$

$$lL(\nu^2-\mu^2)(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)+mM(\nu^2-\lambda^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\nu^2)$$
$$+nN(\mu^2-\lambda^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\mu^2).$$

Die Gleichung 3) geht mittelst der Gleichungen 8), unter Berücksichtigung der Gleichungen 4) und 7), über in:

$$11)\quad lL^2(\nu^2-\mu^2)+mM^2(\nu^2-\lambda^2)+nN^2(\mu^2-\lambda^2)=H.$$

Um den Ausdruck:

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2-p^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2-p^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2-p^2}\right)H^2$$

mittelst der Gleichungen 4) und 8) auf einfachste Art zu transformiren, nehme man zuerst den Factor von $L^2(\nu^2-\mu^2)^2$. Mit Rücksicht auf den Werth von l lässt sich derselbe schreiben:

$$l^2\left[\frac{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{(a^2-\lambda^2)(a^2-p^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-\lambda^2)(b^2-p^2)(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\right.$$
$$\left.+\frac{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{(c^2-\lambda^2)(c^2-p^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]$$

Durch Zerlegung des ersten Terms in Beziehung auf a^2 in Partialbrüche geht der vorstehende Ausdruck über in:

$$\frac{l^2(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-p^2)(a^2-\lambda^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}+\frac{l^2(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)}{(p^2-\lambda^2)(a^2-p^2)(b^2-p^2)(c^2-p^2)}$$
$$=-l\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{p^2-\lambda^2}+\frac{l^2(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)}{(p^2-\lambda^2)(a^2-p^2)(b^2-p^2)(c^2-p^2)}.$$

Auf ähnliche Art lassen sich die Factoren von $M^2(\nu^2-\lambda^2)^2$ und $N^2(\mu^2-\lambda^2)^2$ darstellen. Mit Rücksicht auf die Werthe von l und m aus 9) ist der Factor von $2LM(\mu^2-\lambda^2)(\nu^2-\lambda^2)$ gleich

$$\frac{lm\,(p^2-\nu^2)}{(a^2-p^2)\,(b^2-p^2)\,(c^2-p^2)}$$

Man findet so mittelst der Gleichungen 7):

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2-p^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2-p^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2-p^2}\right)H^2 =$$

$$-H\left[\frac{lL^2(\nu^2-\mu^2)}{p^2-\lambda^2}+\frac{mM^2(\nu^2-\lambda^2)}{p^2-\mu^2}+\frac{nN^2(\mu^2-\lambda^2)}{p^2-\nu^2}\right]$$

$$+\frac{\begin{array}{c}[lL(\nu^2-\mu^2)(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)+mM(\nu^2-\lambda^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\nu^2)\\ +nN(\mu^2-\lambda^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\mu^2)]^2\end{array}}{(a^2-p^2)(b^2-p^2)(c^2-p^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)}.$$

Durch die vorstehende Gleichung, die Gleichungen 5) und 10) geht die erste Gleichung 2) über in:

$$12)\quad \begin{array}{l} lL^2(\nu^2-\mu^2)(p^2-\mu^2)(p^2-\nu^2)+mM^2(\nu^2-\lambda^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\nu^2)\\ \quad +nN^2(\mu^2-\lambda^2)(p^2-\lambda^2)(p^2-\mu^2)=0. \end{array}$$

Durch Vertauschung von p mit q folgt:

$$\begin{array}{l} lL^2(\nu^2-\mu^2)(q^2-\mu^2)(q^2-\nu^2)+mM^2(\nu^2-\lambda^2)(q^2-\lambda^2)(q^2-\nu^2)\\ \quad +nN^2(\mu^2-\lambda^2)(q^2-\lambda^2)(q^2-\mu^2)=0. \end{array}$$

Aus der vorstehenden Gleichung, den Glei-

chungen 11) und 12) findet man, mit Rücksicht auf den Werth von H aus 7):

$$
\begin{aligned}
& lL^2 = (p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2) \\
13) \quad & -mM^2 = (p^2 - \mu^2)(q^2 - \mu^2) \\
& nN = (p^2 - \nu^2)(q^2 - \nu^2)
\end{aligned}
$$

Die Quantitäten l, m, n sind nach 9) wesentlich positiv. Nimmt man $q > p$, so geben die Gleichungen 13) nur dann für L, M, N reelle Werthe, wenn die Bedingungen stattfinden:

$$\mu > p > \lambda, \quad \nu > q > \lambda.$$

Durch Substitution der Werthe von l, m, n aus 9) in 13) folgt:

$$
\begin{aligned}
& L^2 = \frac{(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)}{(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)}, \\
14) \quad & M^2 = \frac{(\mu^2 - p^2)(q^2 - \mu^2)}{(a^2 - \mu^2)(b^2 - \mu^2)(\mu^2 - c^2)}, \\
& N^2 = \frac{(\nu^2 - p^2)(\nu^2 - q^2)}{(a^2 - \nu^2)(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)},
\end{aligned}
$$

durch welche Gleichungen L, M, N bestimmt sind. Die Gleichung:

$$\cos\alpha dx + \cos\beta dy + \cos\gamma dz = 0$$

geht mittelst der Gleichungen 4) und 8) über in:

$$L\lambda d\lambda + M\mu d\mu + N\nu d\nu = 0.$$

Da die linke Seite der Bedingung der Integrabilität genügt, so können α, β, γ als die Winkel angesehen werden, welche die Normale im Puncte (x, y, z) einer Fläche mit den Coordinatenaxen bildet, d. h. der Fläche, welche die beiden Flächen 1) zu Flächen der Krümmungsmittelpuncte hat.

Man setze zur Abkürzung:

$$\frac{x^2}{a^2-p^2}+\frac{y^2}{b^2-p^2}+\frac{z^2}{c^2-p^2}-=P,$$

$$15)\quad \frac{\cos^2\alpha}{a^2-p^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2-p^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2-p^2}=P_2,$$

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2-p^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2-p^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2-p^2}=P_1.$$

Wird q statt p gesetzt, so mögen P, P_1, P_2 übergehn in Q, Q_1, Q_2. In den Gleichungen:

$$PP_2-P_1^2=0, QQ_2-Q_1^2=0, \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

sehe man $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, x, y, z als Functionen einer Variabeln t an. Die erste Gleichung nach t differentiirt giebt, wegen 15):

$$\frac{P\cos\alpha-P_1x}{a^2-p^2}\frac{d\cos\alpha}{dt}+\frac{P\cos\beta-P_1y}{b^2-{}^2p}\frac{d\cos\beta}{dt}+\frac{P\cos\gamma-P_1z}{c^2-p^2}\frac{d\cos\gamma}{dt}$$

$$=\frac{P_1\cos\alpha-P_2x}{a^2-p^2}\frac{dx}{dt}+\frac{P_1\cos\beta-P_2y}{b^2-p^2}\frac{dy}{dt}+\frac{P_1\cos\gamma-P_2z}{c^2-p^2}\frac{dz}{dt}$$

Setzt man rechts $P_2=\frac{P_1^2}{P}$, so folgt:

$$\frac{P\cos\alpha - P_1 x}{a^2 - p^2}\frac{d\cos\alpha}{dt} + \frac{P\cos\beta - P_1 y}{b^2 - p^2}\frac{d\cos\beta}{dt} + \frac{P\cos\gamma - P_1 z}{c^2 - p^2}\frac{d\cos\gamma}{dt}$$

16)

$$= \frac{P_1}{P}\left[\frac{P\cos\alpha - P_1 x}{a^2 - p^2}\frac{dx}{dt} + \frac{P\cos\beta - P_1 y}{b^2 - p^2}\frac{dy}{dt} + \frac{P\cos\gamma - P_1 z}{c^2 - p^2}\frac{dz}{dt}\right].$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche ist:

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ d\cos\alpha, & d\cos\beta, & d\cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Für die Fläche bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0,$$

multiplicire man die obige Determinante mit:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \frac{P\cos\alpha - P_1 x}{a^2 - p^2}, & \frac{P\cos\beta - P_1 y}{b^2 - p^2}, & \frac{P\cos\gamma - P_1 z}{c^2 - p^2} \\ \frac{Q\cos\alpha - Q_1 x}{a^2 - q^2}, & \frac{Q\cos\beta - Q_1 y}{b^2 - q^2}, & \frac{Q\cos\gamma - Q_1 z}{c^2 - q^2} \end{vmatrix} = \Delta$$

Das Product der beiden Determinanten reducirt sich auf zwei Factoren, welche verschwinden müssen. Wegen der Gleichung 16) und einer analogen Gleichung, erhält man zur Bestimmung der Krümmungslinien die Gleichungen:

$$\frac{P\cos\alpha - P_1 x}{a^2 - p^2}dx + \frac{P\cos\beta - P_1 y}{b^2 - p^2}dy + \frac{P\cos\gamma - P_1 z}{c^2 - p^2}dz = 0,$$

$$\frac{Q\cos\alpha - Q_1 x}{a^2 - q^2}dx + \frac{Q\cos\beta - Q_1 y}{b^2 - q^2}dy + \frac{Q\cos\gamma - Q_1 z}{c^2 - q^2}dz = 0.$$

Führt man λ, μ, ν statt x, y, z mittelst der Gleichungen 4) als Variabele ein, so ist in der ersten Gleichung 17) der Factor von $\lambda d\lambda$ gleich:

$$\frac{P\cos\alpha - P_1 x}{a^2 - p^2}\,\frac{x}{a^2 - \lambda^2} + \frac{P\cos\beta - P_1 y}{b^2 - p^2}\,\frac{y}{b^2 - \lambda^2}$$

$$+ \frac{P\cos\gamma - P_1 z}{c^2 - p^2}\,\frac{z}{c^2 - \lambda^2}$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$\frac{1}{p^2 - \lambda^2}\Big[P\Big(\frac{x\cos\alpha}{a^2 - p^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2 - p^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2 - p^2}\Big)$$

$$- P_1\Big(\frac{x^2}{a^2 - p^2} + \frac{y^2}{b^2 - p^2} + \frac{z^2}{c^2 - {}^2p} - 1\Big)$$

$$- P\Big(\frac{x\cos\alpha}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2 - p^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2 - p^2}\Big)$$

$$+ P_1\Big(\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} - 1\Big]\,.$$

Die Summe der beiden ersten Terme verschwindet nach 15), ebenso verschwindet der vierte Term nach 4), mit Rücksicht auf 6) reducirt sich die obige Summe einfach auf:

$$\frac{-PL}{p^2 - \lambda^2}.$$

Analoge Formen haben die Factoren von $\mu d\mu$ und $\nu d\nu$. Man findet so, dass die Gleichungen 17) übergehn in:

$$\frac{L}{p^2-\lambda^2}\lambda d\lambda+\frac{M}{p^2-\mu^2}\mu d\mu+\frac{N}{p^2-\nu^2}\nu d\nu=0,$$

$$\frac{L}{q^2-\lambda^2}\lambda d\lambda+\frac{M}{q^2-\mu^2}\mu d\mu+\frac{N}{q^2-\nu^2}\nu d\nu=0,$$

durch welche Gleichungen die Krümmungslinien der Fläche:

$$\cos\alpha\,dx+\cos\beta\,dy+\cos\gamma\,dz=0$$

bestimmt sind.

Multiplicirt man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\cos\alpha}{dx}-\frac{1}{R}, & \frac{d\cos\beta}{dx}, & \frac{d\cos\gamma}{dx} \\ \frac{d\cos\alpha}{dy}, & \frac{d\cos\beta}{dy}-\frac{1}{R}, & \frac{d\cos\gamma}{dy} \\ \frac{d\cos\alpha}{dz}, & \frac{d\cos\beta}{dz}, & \frac{d\cos\gamma}{dz}-\frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante Δ, so ist das Product nach 16) gleich:

$$-\frac{\Delta}{R}\left(\frac{P_1}{P}-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{Q_1}{Q}-\frac{1}{R}\right).$$

Hieraus folgt, dass die Hauptkrümmungshalbmesser im Puncte (x, y, z) die Werthe haben:

$$\frac{P}{P_1} \text{ und } \frac{Q}{Q_1}.$$

Eine ganz analoge Rechnung ergiebt sich, wenn man statt der confocalen Flächen 1) zwei Paraboloide nimmt, da die Ausführung nur wenig von der vorhergehenden verschieden ist, so soll dieselbe nur kurz angedeutet werden. Werden die beiden Paraboloide:

$$18)\quad \frac{X^2}{a-p}+\frac{Y^2}{b-p}=2Z-p,\quad \frac{X^2}{a-q}+\frac{Y^2}{b-q}=2Z-q,$$

von der Graden:

$$\frac{X-x}{\cos\alpha}=\frac{Y-y}{\cos\beta}=\frac{Z-z}{\cos\gamma}$$

berührt, so ist:

$$\left(\frac{x^2}{a-p}+\frac{y^2}{b-p}-2z+p\right)\left(\frac{\cos^2\alpha}{a-p}+\frac{\cos^2\beta}{b-p}\right)=$$

$$\left(\frac{x\cos\alpha}{a-p}+\frac{y\cos\beta}{b-p}-\cos\gamma\right)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{a-q}+\frac{y^2}{b-q}-2z+q\right)\left(\frac{\cos^2\alpha}{a-q}+\frac{\cos^2\beta}{b-q}\right)=$$

$$\left(\frac{x\cos\alpha}{a-q}+\frac{y\cos\beta}{b-q}-\cos\gamma\right)^2$$

Man sehe den Punct (x, y, z) als Durchschnitt dreier Paraboloide an und setze:

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=2z-\lambda,\quad a>b>\lambda,$$

$$\frac{x^2}{a-\mu}+\frac{y^2}{b-\mu}=2z-\mu,\quad a>\mu>b.$$

$$\frac{x^2}{a-\nu}+\frac{y^2}{b-\nu}=2z-\nu,\quad \nu>a,$$

oder:

$$x^2=-\frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{a-b}$$

$$20)\qquad y^2=\frac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{a-b}$$

$$2z=\lambda+\mu+\nu-a-b.$$

Es ist dann:

$$\frac{x^2}{a-p}+\frac{y^2}{b-p}-2z+p=\frac{(p-\lambda)(p-\mu)(p-\nu)}{(a-p)\,(b-p)}$$

Nimmt man:

$$\frac{x\cos\alpha}{a-\lambda}+\frac{y\cos\beta}{b-\lambda}-\cos\gamma=L,\quad (a-\lambda)(b-\lambda)=l,$$

$$\frac{x\cos\alpha}{a-\mu}+\frac{y\cos\beta}{b-\mu}-\cos\gamma=M,\quad (a-\mu)(b-\mu)=-m,$$

$$\frac{x\cos\alpha}{a-\nu}+\frac{y\cos\beta}{b-\nu}-\cos\gamma=N,\quad (a-\nu)(b-\nu)=n,$$

und:

$$H = (\mu - \lambda)(\nu - \lambda)(\nu - \mu)$$

entwickelt die Werthe von $x \cos\alpha$, $y \cos\beta$ und $-\cos\gamma$ aus 21), so findet man mittelst derselben:

$$\left(\frac{x\cos\alpha}{a-p} + \frac{y\cos\beta}{b-p} - \cos\gamma\right)(a-p)(b-p)H =$$

$$lL(\nu-\mu)(p-\mu)(p-\nu) + mM(\nu-\lambda)(p-\lambda)(p-\nu)$$

$$+ nN(\mu-\lambda)(p-\lambda)(p-\mu).$$

In:

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a-p} + \frac{\cos^2\beta}{b-p}\right)H^2$$

ist der Factor $L^2(\nu-\mu)^2$ gleich:

$$\left[-\frac{(a-\mu)}{(a-\lambda)}\frac{(a-\nu)}{(a-p)} + \frac{(b-\mu)}{(b-\lambda)}\frac{(b-\nu)}{(b-p)}\right]\frac{l^2}{a-b}.$$

Zerlegt man den ersten Term in Beziehung auf a, den zweiten in Beziehung auf b in Partialbrüche, so geht der obige Ausdruck über in:

$$\frac{l.(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{\lambda-p} + \frac{l^2(p-\mu)(p-\nu)}{(p-\lambda)(a-p)(b-p)}.$$

Mit Hülfe dieser Betrachtungen findet man:

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a-p} + \frac{\cos^2\beta}{b-p}\right)H^2 =$$

$$-H\left[\frac{lL^2(\nu-\mu)}{p-\lambda}+\frac{mM^2(\nu-\lambda)}{p-\mu}+\frac{nN^2(\mu-\lambda)}{p-\nu}\right]$$

$$+\frac{\begin{array}{c}[L(\nu-\mu)(p-\mu)(p-\nu)+M(\nu-\lambda)(p-\lambda)(p-\nu)\\+N(\mu-\lambda)\ (p-\lambda)\ (p-\mu)]^2\end{array}}{(a-p)(b-p)(p-\lambda)(p-\mu)(p-\nu)}.$$

Mittelst der Gleichungen 20) und 21) gehn die Gleichungen 19) und $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$ über in:

$$lL^2(\nu-\mu)(p-\mu)(p-\nu)+mM^2(\nu-\lambda)(p-\lambda)(p-\nu)$$
$$+nN^2(\mu-\lambda)(p-\lambda)(p-\mu)=0,$$
$$lL^2(\nu-\mu)(q-\mu)(q-\nu)+mM^2(\nu-\lambda)(q-\lambda)(q-\nu)$$
$$+nN^2(\mu-\lambda)(q-\lambda)(q-\mu)=0,$$
$$lL^2(\nu-\mu)+mM^2(\nu-\lambda)+nN^2(\mu-\lambda)=$$
$$(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\nu-\mu).$$

Mit Rücksicht auf die Werthe von l, m, n folgt:

$$L^2=\frac{(p-\lambda)(q-\lambda)}{(a-\lambda)(b-\lambda)},$$

$$\text{22)}\qquad M^2=\frac{(p-\mu)(\mu-q)}{(a-\mu)(\mu-b)},$$

$$N^2=\frac{(\nu-p)(\nu-q)}{(\nu-a)(\nu-b)},$$

wenn $q>p$ genommen wird.

Mittelst der Gleichungen 20) und 21) geht die Gleichung:

$$\cos\alpha . dx + \cos\beta . dy + \cos\gamma dz = 0$$

über in:

$$Ld\lambda + Md\mu + Nd\nu = 0,$$

was die totale Differentialgleichung der Fläche und ihre Parallelflächen ist, für welche die Flächen der Krümmungsmittelpuncte zwei Paraboloide sind. Wegen der Werthe von L, M, N enthält die obige Gleichung elliptische Differentiale.

II.

In dem Werke »Application de l'analyse à la géométrie« (V. édit. Paris 1850) hat sich Monge auf p. 246—369 mit den Flächen beschäftigt, deren Normalen eine Kugelfläche berühren, oder auf einer Kegelfläche liegen, oder endlich die Generatricen einer developpabeln Fläche sind. Diese Probleme lassen sich sämmtlich in ein Problem zusammenfassen, nämlich die Bestimmung der Flächen, für welche ein System von Krümmungslinien plan ist und die Ebenen derselben die Normalen zur Fläche enthalten. Zu diesem Resultat gelangt man mittelst der Formeln, welche sich in den Nachrichten v. d. K. G. d. W. v. Jahre 1867 auf pag. 237 u. f. finden. In Folge der dort gebrauchten Bezeichnungen entsprechen dem Puncte (x, y, z) einer Fläche die Puncte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der beiden Schalen der Krümmungsmittelpuncte mittelst der Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x_1 = x + r'\cos a, & x_2 = x + r''\cos a, \\ y_1 = y + r'\cos b, & y_2 = y + r''\cos b, \\ z_1 = z + r'\cos c, & z_2 = z + r''\cos c, \end{cases}$$

wo a, b, c die Winkel sind, welche die Normale des Punctes (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet und r', r'' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser bedeuten. Zu dem obigen Resultate gelangt man durch Aufstellung der Bedingung, dass der Punct (x_1, y_1, z_1) auf einer developpabeln Fläche liegt, oder der Punct (x_2, y_2, z_2) einer Kugelfläche angehört; in beiden Fällen ist die analytische Bedingung dieselbe. Dieser Umstand erklärt sich daraus, dass, wenn eine der Schalen der Krümmungsmittelpuncte eine Kugelfläche ist, die andere eine Kegelfläche ist, deren Spitze (Wendepunct) sich im Mittelpunct der Kugelfläche befindet. Die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelm Radius möge ausgeschlossen bleiben, dann reducirt sich eine der bemerkten Schalen einfach auf die Curve, welche der Mittelpunkt der eingehüllten Kugelfläche beschreibt. Um der vorstehenden Untersuchung keine zu grosse Ausdehnung zu geben, soll ein neues System von Gleichungen für die Flächen mit einem System planer Krümmungsebenen, welche durch die Normalen gehn, hier ohne Beweis mitgetheilt werden.

Seien α, β, γ; λ, μ, ν; l, m, n die Winkel, welche respective die Tangente, die Hauptnormale und die Axe der Krümmungsebene einer Raumcurve in einem Puncte Π mit den Coordinatenaxen bilden, durch ϱ ist der Krümmungsradius, durch r der Torsionsradius im Puncte Π bezeichnet, ds bedeutet das Bogenelement und

endlich S ist eine beliebige Function von s. Für eine beliebige Function V von v sind die successiven Derivirten durch V', V'' u. s. w. bezeichnet. Das erwähnte System von Gleichungen ist dann folgendes:

$$2)\begin{cases} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = S \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \int\frac{S}{\varrho}ds + V'\cos v + V\sin v, \\ x\cos l + y\cos m + z\cos n = \int\frac{S}{r}ds + V'\sin v - V\cos v. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$\pm\cos a = \cos l\cos v - \cos\alpha\sin v,$$

$$\pm\cos b = \cos m\cos v - \cos\beta\sin v,$$

$$\pm\cos c = \cos n\cos v - \cos\gamma\sin v.$$

$$\mp r'\left(\frac{\cos v}{r} - \frac{\sin v}{\varrho}\right) = S' + \frac{1}{\varrho}\int\frac{S}{\varrho}ds$$

$$+\frac{1}{r}\int\frac{S}{r}ds + \frac{V'\cos v + V\sin v}{\varrho} + \frac{V'\sin v - V\cos v}{r}$$

$$\pm r'' = V'' + V.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen und der Gleichungen 2) lassen sich die Werthe von x_1, y_1, z_1 in Function von s und v darstellen. Es genügt nur je eine der Coordinaten zu entwickeln. Man findet so:

$$3)\begin{cases} x_1 = S.\cos\lambda - \varrho\dfrac{dS}{ds}\cos\alpha + \dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{r} - \dfrac{\cos l}{\varrho}}{\dfrac{\cos v}{r} - \dfrac{\sin v}{\varrho}} T, \\ T = V' + \cos v\displaystyle\int\frac{S}{\varrho}ds + \sin v\int\frac{S}{r}ds + \varrho\frac{dS}{ds}\cos v. \end{cases}$$

$$4) \quad x_2 = S\cos\lambda + \cos\alpha\int\frac{S}{\varrho}ds + \cos l\int\frac{S}{r}ds$$

$$-(V''\sin v - V'\cos v)\cos\alpha + (V''\cos v + V'\sin v)\cos l.$$

Die Gleichung 3) zeigt unmittelbar, dass der Punct (x_1, y_1, z_1) auf einer developpabeln Fläche liegt, ist dieselbe eine Kegelfläche, welche zur Spitze den Anfangspunct der Coordinaten hat, so ist $S = 0$, ist die developpabele Fläche cylindrisch, ihre berührenden Ebenen der z-Axe parallel, so hat man:

$$\frac{dx_1}{ds}\frac{dy_1}{dv} - \frac{dy_1}{ds}\frac{dx_1}{dv} = 0$$

d. i. $\cos\nu = 0$. Die Curve, deren Elemente in den Gleichungen 2) zu Grunde gelegt sind, ist dann die Helix einer cylindrischen Fläche oder einfach eine plane Curve. Ist u eine beliebige Function von s, ferner U eine beliebige Function von u, $\dfrac{dU}{du} = U'$, bedeutet g eine Constante, so ist für eine Helix:

$$\cos\alpha = \cos u\sin g,\ \cos l = \cos u\cos g,\ \cos\lambda = -\sin u,$$

$\cos\beta = \sin u \sin g$, $\cos m = \sin u \cos g$, $\cos\mu = \cos u$,

$\cos\gamma = \cos g$, $\cos n = -\sin g$, $\cos\nu = 0$.

$$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du} = \sin g, \quad \frac{1}{r}\frac{ds}{du} = \cos g.$$

Nimmt man in den Gleichungen 2) $S = U'$, so gehen dieselben mittelst der vorstehenden Gleichungen über in:

$$-x \sin u + y \cos u = U'$$

$$x \cos u + y \sin u = U + V' \sin(v + g)$$
$$- V \cos(v + g),$$

$$z = V' \cos(v + g) + V \sin(v + g).$$

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit immer $g = 90^0$ nehmen. Ist also in den Gleichungen 2) $\frac{\varrho}{r}$ constant, so lassen sich diese Gleichungen ersetzen durch:

$$-x \sin u + y \cos u = U'$$

5) $$x \cos u + y \sin u = U + V' \cos v + V \sin v,$$

$$-z = V' \sin v - V \cos v.$$

Da $\varrho \frac{dS}{ds} = \varrho \frac{du}{ds}\frac{dS}{du} = U''$ für $\sin g = 1$, so findet man:

6) $-x_1 = U'' \cos u + U' \sin u$, $-y_1 = U'' \sin u - U' \cos u$.

Soll in den Gleichungen 1) der Punc (x_2, y_2, z_2) auf einer Kugelfläche liegen, so ergeben sich wieder die Gleichungen 2) mit den specielleren Bestimmungen :$S = 0$ und $V'' = 0$, oder V' constant, welcher constante Werth gleich dem Halbmesser der Kugelfläche ist.

Die Gleichungen 5) und 6) geben noch zu folgenden Bemerkungen Veranlassung. Setzt man:

7) $\xi = U\cos u - U'\sin u\,,\ \eta = U'\cos u + U\sin u$

so lassen sich die Gleichungen 5) ersetzen durch:

$$z = F[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\,,$$

$$0 = (x - \xi)\frac{d\xi}{du} + (y - \eta)\frac{d\eta}{du} = 0\,,$$

wo F eine beliebiges Functionszeichen ist. Hieraus folgt, dass die Fläche, bestimmt durch die Gleichungen 5), die Enveloppe einer Rotationsfläche ist, für welche ein fester Punct der Rotationsaxe eine beliebige plane Curve beschreibt, deren Ebene zur Richtung der Axe senkrecht ist. Sieht man in 6) und 7) (x_1, y_1) und (ξ, η) als Coordinaten der entsprechenden Puncte zweier Curven an, so ist die Curve, bestimmt durch die Gleichungen 6) die Evolute der Curve bestimmt durch die Gleichungen 7). Das Problem also zu einer gegebenen cylindrischen Fläche als Fläche der Krümmungsmittelpuncte die primitive Fläche zu finden reducirt sich einfach auf die Bestimmung der orthogonalen Trajectorien der Tangenten einer planen Curve, d. h. der planen Curve in welcher die cylindrische Fläche durch eine Ebene geschnitten wird, welche zu ihren

Generatricen senkrecht ist. Setzt man zur Abkürzung:

$$8) \qquad \frac{\varrho}{r} = p,$$

so erhält man aus 3) und zwei analogen Gleichungen:

$$x_1 = V' \frac{p \cos \alpha - \cos l}{p \cos v - \sin v}, \; y_1 = V' \frac{p \cos \beta - \cos m}{p \cos v - \sin v}$$

$$z_1 = V' \frac{p \cos \gamma - \cos n}{p \cos v - \sin v}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Flächen finden, für welche eine der Schalen der Krümmungsmittelpuncte eine Kegelfläche zweiten Grades ist. Sei:

$$\frac{x_1^2}{f^2} + \frac{y_1^2}{g^2} = \frac{z_1^2}{h^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{(p \cos \alpha - \cos l)^2}{f^2} + \frac{(p \cos \beta - \cos m)^2}{g^2} - \frac{(p \cos \gamma - \cos n)^2}{h^2} = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach s, so erhält man ein Product von zwei Factoren, welches verschwindet. Der eine Factor $\frac{dp}{ds}$ kann nicht verschwinden, sonst wäre nach 8) $\frac{\varrho}{r}$ constant, diesem Falle entspricht eine Cylinderfläche, welche sich einfach auf eine Gerade redu-

cirt. Lässt man also den andern Factor verschwinden so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\frac{(p\cos\alpha - \cos l)\cos\alpha}{f^2} + \frac{(p\cos\beta - \cos m)\cos\beta}{g^2}$$

$$-\frac{(p\cos\gamma - \cos n)\cos\gamma}{h^2} = 0.$$

Bedeutet q eine näher zu bestimmende Function, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen ersetzen durch:

$$\frac{\cos^2\alpha}{f^2} + \frac{\cos^2\beta}{g^2} - \frac{\cos^2\gamma}{h^2} = q.$$

$$9)\quad \frac{\cos\alpha\cos l}{f^2} + \frac{\cos\beta\cos m}{g^2} - \frac{\cos\gamma\cos n}{h^2} = pq,$$

$$\frac{\cos^2 l}{f^2} + \frac{\cos^2 m}{g^2} - \frac{\cos^2 n}{h^2} = p^2 q.$$

Die beiden ersten Gleichungen 9) differentiire man nach s. Führt man statt s eine neue unabhängige Variabele t mittelst der Gleichung:

$$10)\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dt} = 1$$

ein und setzt $\frac{dp}{dt} = p'$ etc., so folgt:

$$11)\quad \frac{\cos\alpha\cos\lambda}{f^2} + \frac{\cos\beta\cos\mu}{g^2} - \frac{\cos\gamma\cos\nu}{h^2} = \tfrac{1}{2}q',$$

$$\frac{\cos l \cos\lambda}{f^2}+\frac{\cos m\cos\mu}{g^2}-\frac{\cos n\cos\nu}{h^2}=qp'+\tfrac{1}{2}pq'.$$

Die dritte Gleichung 9) nach t differentiirt führt auf keine neue Gleichung. Die beiden Gleichungen 11) nach t differentiirt geben, mit Rücksicht auf 8), 9) und 10):

$$12)\ \frac{\cos^2\lambda}{f^2}+\frac{\cos^2\mu}{g^2}-\frac{\cos^2\nu}{h^2}=\tfrac{1}{2}q''+q(1+p^2)$$

$$\frac{\cos^2\lambda}{f^2}+\frac{\cos^2\mu}{g^2}-\frac{\cos^2\nu}{h^2}=q(1+p^2)$$
$$+\frac{1}{p}\frac{d(qp'+\tfrac{1}{2}pq')}{dt}.$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass $q(qp')^2$ constant ist. Zu diesem Resultat nebst der Bestimmung des constanten Werthes gelangt man leicht auf folgende Weise. Das Product der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma\\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu\\ \cos l, & \cos m, & \cos n\end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix}\frac{\cos\alpha}{f^2}, & \frac{\cos\beta}{g^2}, & -\frac{\cos\gamma}{h^2}\\ \frac{\cos\lambda}{f^2}, & \frac{\cos\mu}{g^2}, & -\frac{\cos\nu}{h^2}\\ \frac{\cos l}{f^2}, & \frac{\cos m}{g^2}, & -\frac{\cos n}{h^2}\end{vmatrix}$$

ist gleich dem Quadrat der ersten Determinante multiplicirt mit $-\frac{1}{(fgh)^2}$ d. h. einfach gleich $-\frac{1}{(fgh)^2}$. Dasselbe Product ist aber auch in Folge der Gleichungen 9), 11) und 12) gleich: $-q(qp')^2$. Es ist also:

13) $$q(qp')^2 = \frac{1}{(fgh)^2}.$$

Die erste und dritte Gleichung 9) zur Gleichung 12) addirt geben:

14) $$\frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{h^2} = 2q(1 + p^2) + \tfrac{1}{2}q''.$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der Gleichung 13) lässt sich durch Integration eine neue Relation zwischen p, q, p', q' herleiten, welche man indessen einfacher auf folgende Art erhält. Sieht man in den Gleichungen:

$$\frac{\cos\alpha . \cos\alpha}{f^2} + \frac{\cos\beta\cos\beta}{g^2} - \frac{\cos\gamma\cos\gamma}{h^2} = q,$$

$$\frac{\cos l\cos\alpha}{f^2} + \frac{\cos m\cos\beta}{g^2} - \frac{\cos n\cos\gamma}{h^2} = pq,$$

$$\frac{\cos\lambda\cos\alpha}{f^2} + \frac{\cos\mu\cos\beta}{g^2} - \frac{\cos\nu\cos\gamma}{h^2} = \tfrac{1}{2}q'$$

$\frac{\cos\alpha}{f^2}$, $\frac{\cos\beta}{g^2}$, $-\frac{\cos\gamma}{h^2}$ als Unbekannte an, so folgt:

$$(q - \frac{1}{f^2}) \cos\alpha + pq \cos l + \tfrac{1}{2} q' \cos\lambda = 0.$$

Auf diese Art erhält man aus den Gleichungen 9), 11) und 12) die folgenden:

$$(q - \frac{1}{f^2}) \cos\alpha + pq \cos l + \tfrac{1}{2} q' \cos\lambda = 0,$$

$$pq \cos\alpha + (p^2 q - \frac{1}{f^2}) \cos l + (qp' + \tfrac{1}{2} pq') \cos\lambda = 0,$$

$$\tfrac{1}{2} q' \cos\alpha + (qp' + \tfrac{1}{2} pq') \cos l$$

$$+ [\tfrac{1}{2} q'' + q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}] \cos\lambda = 0$$

Durch Vertauschung von α, l, λ f^2 mit β, m, μ, g^2 und γ, n, ν, $-h^2$ ergeben sich aus 15) nach sechs weitere Gleichungen. Die Gleichungen 15) geben:

$$\frac{1}{f^2}[\tfrac{1}{2} q'' + q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}][q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}]$$

$$+ q(qp')^2 = \frac{1}{f^2}(qp' + \tfrac{1}{2} pq')^2 + \frac{1}{f^2}(\frac{q'}{2})^2.$$

Setzt man links aus 13) für $q(qp')^2$ und aus 14) für q'' den entsprechenden Werth ein, so lässt sich die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

$$-[q(1+p^2) - \frac{1}{f^2}][q(1+p^2) - \frac{1}{g^2}][q(1+p^2) + \frac{1}{h^2}]$$

$$+\frac{1}{(fgh)^2} = q[(1+p^2)\tfrac{1}{2}q' + pqp']^2 + q(qp')^2$$

d. i. nach 13):

$$-[q(1+p^2)-\frac{1}{f^2}][q(1+p^2)-\frac{1}{g^2}][q(1+p^2)+\frac{1}{h^2}]$$

$$= q[\frac{dq(1+p^2)}{2dt}]^2$$

oder:

16) $$q(1+p^2) = \frac{1}{T}$$

gesetzt:

$$\frac{\tfrac{1}{4}T'^2}{-(f^2-T)(g^2-T)(h^2+T)} = \frac{1}{q(fgh)^2}$$

Nun ist aber nach 13) und 16):

$$\frac{1}{q(fgh)^2} = (qp')^2 = (\frac{p'}{1+p^2}\,\frac{1}{T})^2.$$

Nimmt man die Quadratwurzel negativ, so folgt:

$$-\tfrac{1}{2}T'\sqrt{-\frac{T}{(f^2-T)(g^2-T)(h^2+T)}} = \frac{p'}{1+p^2}$$

oder:

17) $$p = \operatorname{tang} w$$

gesetzt:

18) $$-\tfrac{1}{2}\frac{T\frac{dT}{dw}}{\sqrt{-T(f^2-T)(g^2-T)(h^2+T)}} = 1.$$

Sei nun $f > g$. Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$\frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{f^2 - g^2}{h^2 + g^2} = k^2, \quad \frac{f^2 - g^2}{h^2 + g^2} = k^2 \operatorname{tang}^2 \delta,$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

dann ist:

$$19) \quad \left(\frac{f}{h}\right)^2 = \operatorname{tang}^2 \delta, \quad \left(\frac{g}{h}\right)^2 = \frac{k'^2 \sin^2 \delta}{1 - k'^2 \sin^2 \delta}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen und:

$$20) \qquad \frac{T}{h^2} = \frac{\sin^2 \delta . (1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi}$$

geht die Gleichung 18) über in:

$$21) \frac{\sin \delta . \cos \delta . \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dw} = 1,$$

durch welche Gleichung φ in Function von w, oder w in Function von φ bestimmt ist. Aus 16), 17) und 20) folgt:

$$22) \quad q h^2 = \frac{\cos^2 w (\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \delta (1 - k^2 \sin^2 \varphi).}$$

Die Gleichung 17) giebt:

$$\frac{dp}{dw} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dw}$$

d. h.:

$$\frac{1}{\cos^2 w} = p' \frac{dt}{dw}.$$

Mittelst dieser Gleichung geht die Gleichung:

$$\frac{dq}{dw} = q' \frac{dt}{dw}$$

über in:

$$q' = p' \cos^2 w \frac{dq}{dw}.$$

Setzt man in die vorstehende Gleichung und die Gleichung 13) für p, q, f, g ihre Werthe aus 17), 19) und 22), so folgt mit Rücksicht auf 21):

$$h^2 . qp' . k' \sin\delta . \sqrt{H} =$$

$$\frac{\cos\delta}{\cos w} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

$$h^2 \tfrac{1}{2} q' . k' \sin\delta \sqrt{H} = \tfrac{1}{2} \cos w \frac{1}{q} \frac{dq}{dw} \times$$

$$\cos\delta \sqrt{1 - k'^2 \sin\delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} =$$

$$- \sin w \cos\delta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

$$+ \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi} \frac{\cos w}{\sin\delta},$$

$$h^2 (qp' + \tfrac{1}{2} pq') k' \sin\delta . \sqrt{H} =$$

$$\cos w \cos\delta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

$$+ \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi} \frac{\sin w}{\sin\delta}$$

wo:

$$H = \cos^2\delta + k^2 \sin^2\delta \sin^2\varphi.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen, der Gleichungen 15) und einiger analogen Relationen zu denselben lassen sich die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos l$, $\cos\lambda$ etc. berechnen. Das Detail der etwas weitläufigen Rechnung soll hier übergangen und zur vollständigen Lösung des Problems die Werthe der betreffenden Casinus aufgestellt werden.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(1-k^2\sin^2\varphi)(\cos^2\delta+k^2\sin^2\delta\sin^2\varphi)=D^2,$$

so finden folgende Gleichungen statt:

$$D.\cos\alpha=\cos w\cos\varphi\cos\delta$$

$$+\sin w\sin\varphi\sin\delta\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta},$$

$$D.\cos l=\sin w\cos\varphi\cos\delta$$

$$-\cos w\sin\varphi\sin\delta\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta},$$

$$\cos\lambda\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=-k'\sin\varphi\cos\delta.$$

$$D.\cos\beta=k'\cos w\sin\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}$$

$$-k'\sin w\sin\delta\cos\delta\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

$$D.\cos m=k'\sin w\sin\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta}$$

$$+k'\cos w\sin\delta\cos\delta\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

$$\cos\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\cos\varphi\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta},$$

$$D\cos\gamma=k^2\cos w\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta$$

$$-\sin w \cos\delta \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta},$$

$$D\cos n = k^2\sin w \sin\varphi\cos\varphi\sin\delta$$

$$+\cos w\cos\delta\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-k'^2\sin^2\delta},$$

$$\cos\nu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = -k'\sin\delta.$$

Setzt man in der Gleichung 21) $\varphi = amu$, $\sin\delta = \frac{\sin amia}{i}$, wo $i = \sqrt{-1}$, so erhält man eine der bekannten Formen des elliptischen Integrals dritter Gattung mit dessen Hülfe sich $\sin w$ und $\cos w$ als Functionen von u darstellen lassen. Ist $f^2 - g^2 = h^2$, so geben die Gleichungen 19) $k\,\mathrm{tang}^2\delta = 1$, die Gleichung 21) enthält in diesem besondern Falle nur ein elliptisches Integral erster Gattung.

Die allgemeinen Gleichungen erleiden eine Modification für den Fall eines Kreiskegels. Nimmt man $g = f$ und setzt $f = h\,\mathrm{tang}\,\delta$, so geht die Gleichung:

$$(p\cos\alpha-\cos l)^2+(p\cos\beta-\cos m)^2=\mathrm{tang}^2\delta.(p\cos\gamma-\cos n)^2$$

über in:

$$(1+p^2)\cos^2\delta = (p\cos\gamma - \cos n)^2.$$

Durch Differentiation erhält man:

$$p\cos^2\delta = (p\cos\gamma - \cos n)\cos\gamma.$$

Setzt man $p = \mathrm{tang}\,w$, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen, der Gleichung $\cos^2\gamma + \cos^2 n + \cos^2\nu = 1$ die folgenden:

23) $\cos\gamma = \sin w \cos\delta, \cos n = -\cos w \cos\delta, \cos\nu = \sin\delta.$

Die Gleichung:

$$\cos\alpha\cos\gamma + \cos l\cos n + \cos\lambda\cos\nu = 0,$$

wird:

$$(\cos\alpha\sin w - \cos l\cos w)\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta = 0.$$

Diese Gleichung und die Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2 l + \cos^2\lambda = 1$ lassen sich ersetzen durch:

$$\cos\alpha\sin w - \cos l\cos w = \sin\delta\sin\varphi,$$

$$\cos\lambda = -\cos\delta\cos\varphi,$$

$$\cos\alpha\cos w + \cos l\sin w = \cos\varphi,$$

oder:

$$\cos\alpha = \cos w\cos\varphi + \sin w\sin\delta\sin\varphi,$$

24) $$\cos l = \sin w\cos\varphi - \cos w\sin\delta\sin\varphi,$$

$$\cos\lambda = \qquad\qquad -\cos\delta\sin\varphi.$$

Wegen:

$$d\cos\alpha = \varrho\cos\lambda ds, \quad d\cos\gamma = \varrho\cos\nu ds$$

ist:

$$\frac{d\cos\alpha}{d\cos\gamma} = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}.$$

Mittelst der Gleichungen 23) und 24) geht die vorstehende Gleichung über in:

$$dw = \sin\delta \, . \, d\varphi,$$

durch welche Gleichung der Zusammenhang zwischen w und φ bestimmt ist. Man findet endlich noch aus 23) und 24):

$$\cos\beta = \cos w \sin\varphi - \sin w \sin\delta \cos\varphi,$$

$$\cos m = \sin w \sin\varphi + \cos w \sin\delta \cos\varphi,$$

$$\cos\mu = \cos\delta \cos\varphi.$$

Durch die vorstehenden Systeme von Gleichungen sind die Flächen vollständig bestimmt, welche zu einer der Schalen der Krümmungsmittelpuncte die Fläche eines Kreiskegels haben.

Verbesserungen in Nr. 4.

S. 99,	Z. 3 v. o.	statt	— 36.36	lies	— 34.17.
	Z. 14 v. o.	„	68.20	„	66.20.
	Z. 17 v. o.	„	1.080	„	1.044.
S.102,	Z. 11 v. u.	„	36.36	„	34.17.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

März und April 1871.

(Fortsetzung.)

Dr. F. C. Noll. Der zoologische Garten. Zeitschrift für Beobachtung, Pflege und Zucht der Thiere. XI. Jahrgang 1870. Nr. 7—12. Juli bis December. Frankfurt a/M. 8.

Monatsbericht der königl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Januar, Februar, März 1871. 8.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXIV. Heft IV. Leipzig. 1870. 8.

Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft. VI. Jahrgang. Heft I. Januar 1871. Leipzig. 8.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Neue Folge. Jahrgang XVII. Nr. 1—12. 1870. 4.

M. Stransky, Grundzüge zur Analyse der Molecularbewegung. I u. II. Brünn 1867 und 1871. 8.

Dr. theol. W. Haan, Mittheilungen des Geschichts- und Altherthums-Vereins zu Leisnig im Königr. Sachsen. Heft II. Leisnig 1871. 8.

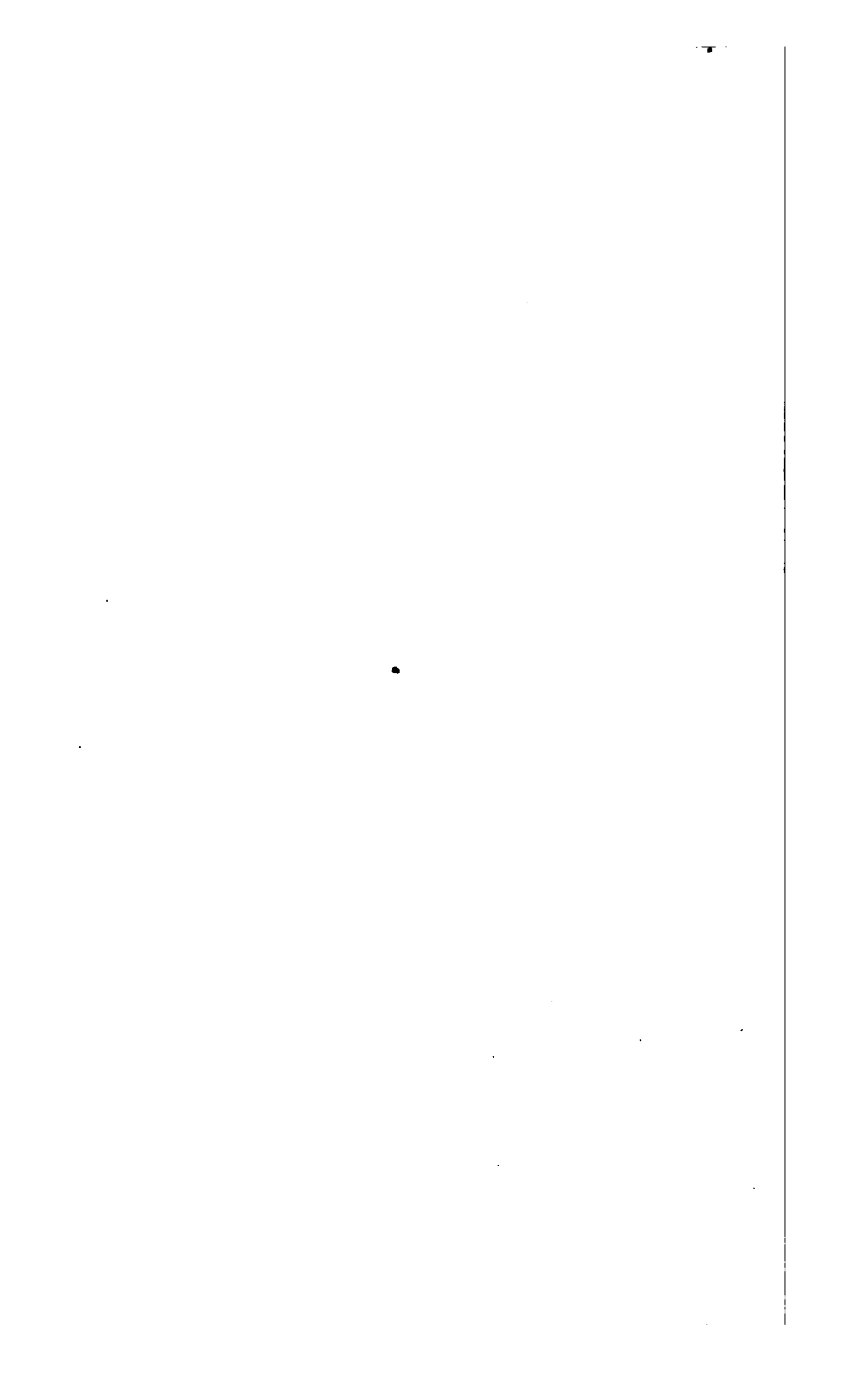
Mittheilungen aus dem Archive des Voigtländischen alterthumsforschenden Vereins in Hohenleben nebst d. 40. Jahresbericht. 8.

Quetelet, Annales Météorologiques de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Cinquième année. Bruxelles 1871. 4.

Nature Nr. 70—78.

Von Maurer, Geschichte der Städteverfassung in Deutschland. Bd. 4. München 1871.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1870. Bd. XX. 8.



Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

24. Mai. №. 8. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punctes um ein festes Anziehungscentrum und zweier materieller Puncte um einander.

Von

R. Clausius.

Ich habe vor Kurzem, bei Untersuchungen über die mechanische Wärmetheorie, eine neue auf stationäre Bewegungen bezügliche Gleichung aufgestellt [1]), welche im Zusammenhange steht mit dem Satze von der kleinsten Wirkung, aber sich auf Fälle erstreckt, auf welche dieser Satz keine Anwendung findet. Ich will die Gleichung hier nur in den Formen anführen, welche für

1) Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien; Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, S. 167 und Poggendorff's Annalen Bd. 142. S. 433.

die hier beabsichtigten Betrachtungen geeignet sind, indem ich in Bezug auf weitere Umgestaltungen auf meine frühere Abhandlung verweise.

Es sei ein materieller Punct gegeben, welcher sich unter dem Einflusse einer gegebenen Kraft stationär in geschlossener Bahn bewegt. Die Masse des beweglichen Punctes sei m, seine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Coordinaten seien x, y, z, die Componenten der auf in wirkenden Kraft X, Y, Z, seine Geschwindigkeit v und die Umlaufszeit i. Alle diese Grössen, mit Ausnahme der ersten und letzten, sind im Verlaufe der Bewegung veränderlich, aber jede hat für den ganzen Umlauf einen gewissen Mittelwerth. Einen solchen Mittelwerth wollen wir dadurch von der veränderlichen Grösse unterscheiden, dass wir über das Zeichen, welches die letztere darstellt, einen waagerechten Strich machen, so dass z. B. $\overline{x}$ den Mittelwerth von x bedeutet.

Nun denken wir uns die ursprüngliche Bewegung durch eine andere, von ihr unendlich wenig verschiedene stationäre Bewegung ersetzt, welche in veränderter, aber ebenfalls geschlossener Bahn, mit veränderter Geschwindigkeit und unter dem Einflusse einer veränderten Kraft stattfinden kann. Indem wir diese beiden Bewegungen unter einander vergleichen, wollen wir den Unterschied zwischen einer auf die ursprüngliche Bewegung bezüglichen Grösse und der auf die veränderte Bewegung bezüglichen entsprechenden Grösse die Variation dieser Grösse nennen, und durch ein vorgesetztes δ bezeichnen, so dass z. B. δi die Variation der Umlaufszeit i ist. Bei denjenigen Grössen, welche im Verlaufe jeder Bewegung veränderlich sind,

kommt es aber noch darauf an, festzustellen, welche Werthe als entsprechende Werthe der Grösse betrachtet werden sollen. Dieses möge in folgender Weise geschehen. Wir nehmen zuerst zwei einander unendlich nahe liegende Stellen der beiden Bahnen als entsprechende Stellen an, und rechnen die Bewegungszeiten von den Momenten ab, wo der bewegliche Punct diese Stellen durchschreitet. Dann setzen wir bei der ursprünglichen Bewegung, indem wir die Bewegungszeit bis zur Erreichung irgend einer anderen Stelle der Bahn mit t bezeichnen:

$$t = i\varphi$$

und bei der veränderten Bewegung setzen wir:

$$t + \delta t = (i + \delta i)\,\varphi,$$

worin φ eine veränderliche Grösse ist, welche ich die Phase der Bewegung genannt habe, und welche in beiden Bewegungen während eines Umlaufes von 0 bis 1 wächst. Wenn nun in diesen beiden Gleichungen die Grösse φ einen und denselben Werth hat, so sind t und $t + \delta t$ entsprechende Werthe der Bewegungszeiten. Aus diesen ergeben sich dann weiter die entsprechenden Stellen der beiden Bahnen und die entsprechenden Werthe aller anderen auf die beiden Bewegungen bezüglichen Grössen.

Nach diesen Erläuterungen wird nun die folgende Gleichung, welche die einfachste Form meiner oben erwähnten Gleichung ist, verständlich sein:

$$(1)\quad -\overline{(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)} = \frac{m}{2}\,\delta\overline{v^2} + m\,\overline{v^2}\,\delta \log i.$$

Wenn die Kraft, welche auf den beweglichen Punct wirkt, ein Ergal hat, d. h. wenn die Kraftcomponenten sich durch die negativ genommenen partiellen Differentialcoëfficienten einer Function der Coordinaten des Punctes darstellen lassen, welche mit U bezeichnet werden möge, so geht die Gleichung über in:

$$(2)\quad \overline{\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z} = \frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i \text{ [1])}$$

Die Summe

$$\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z$$

darf nicht ohne Weiteres als die Variation des Ergals betrachtet werden und darf daher, wenn man U die Bedeutung beilegt, dass es nicht nur für die ursprüngliche, sondern auch für die veränderte Bewegung das Ergal darstelle, nicht ohne Weiteres mit δU bezeichnet werden. Die vorige Gleichung gilt nämlich, wie schon angedeutet, auch für solche Fälle, wo die auf den Punct wirkende Kraft eine Veränderung erlitten hat, welche man sich mathematisch dadurch ausgedrückt denken kann, dass eine oder mehrere

1) In meiner oben citirten früheren Abhandlung habe ich noch untersucht, unter welchen Umständen die linke Seite dieser Gleichung als Ausdruck der mechanischen Arbeit, welche beim Uebergange aus der einen stationären Bewegung in die andere gethan wird, gelten kann. Indessen brauchen wir darauf hier nicht einzugehen, da es sich für die hier beabsichtigten Untersuchungen nicht darum handelt, den Uebergang aus einer stationären Bewegung in eine andere zu verfolgen, sondern nur darum, zwei gegebene, unendlich wenig von einander verschiedene stationäre Bewegungen zu vergleichen.

in dem Ergal enthaltene, während einer stationären Bewegung constante Grössen in den beiden stationären Bewegungen verschiedene Werthe haben. In einem solchen Falle muss natürlich bei der Bestimmung der Variation δU neben der Verschiedenheit der Coordinaten auch die Verschiedenheit der Constanten berücksichtigt werden.

Wir wollen nun aber annehmen, dass bei denjenigen beiden Bewegungen, welche wir gegenwärtig zu vergleichen haben, ein solcher Unterschied nicht vorkomme, sondern dass das Ergal bei beiden durch eine und dieselbe Function der Coordinaten mit unveränderten Constanten dargestellt werde. In diesem Falle ist die obige Summe die vollständige Variation des Ergals und kann mit δU bezeichnet werden, und demgemäss ist die linke Seite der Gleichung (2) der Mittelwerth der Variation des Ergals, oder, was dasselbe ist, die Variation des Mittelwerthes des Ergals, welche durch $\delta \overline{U}$ dargestellt wird. Die Gleichung (2) geht also für diesen Fall über in:

$$(3) \qquad \delta \overline{U} = \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + m \overline{v^2} \delta \log i.$$

Diese Gleichung wollen wir nun der Form nach noch etwas vereinfachen. Wir gestalten sie zunächst folgendermaassen um:

$$\delta \overline{U} = m \overline{v^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\delta \overline{v^2}}{\overline{v^2}} + \delta \log i \right)$$

$$= m \overline{v^2} \left(\frac{1}{2} \delta \log \overline{v^2} + \delta \log i \right)$$

$$\delta\overline{U} = m\overline{v^2}\,\delta \log (i\sqrt{\overline{v^2}}).$$

Hierin wollen wir für das unter dem Logarithmus stehende Product ein einheitliches Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$\lambda = i\sqrt{\overline{v^2}}. \tag{4}$$

Dann geht unsere Gleichung über in

$$\delta\overline{U} = m\,\overline{v^2}\,\delta \log \lambda. \tag{5}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung eine Variation ist, muss auch die rechte Seite eine solche sein. Daraus folgt, dass $m\overline{v^2}$ eine Function von λ ist, und demgemäss muss dann auch $\overline{U}$ eine Function von λ sein. Für die letztere wollen wir zunächst ein beliebiges Functionszeichen einführen, indem wir setzen:

$$\overline{U} = f(\lambda). \tag{6}$$

Dann lässt sich auch die andere Function, welche $m\overline{v^2}$ darstellt, sofort angeben. Es ist nämlich, wenn $f'(\lambda)$ die erste Ableitung von $f(\lambda)$ bedeutet,

$$\delta\overline{U} = f'(\lambda)\cdot\delta\lambda.$$

Wenn wir dieses Product in die Gleichung (5) einführen, und zugleich für die darin angedeutete Variation des Logarithmus ihren Werth setzen, so erhalten wir:

$$f'(\lambda)\,\delta\lambda = m\overline{v^2}\,\frac{\delta\lambda}{\lambda},$$

woraus folgt:

$$m\overline{v^2} = \lambda f'(\lambda)$$

oder, wenn wir noch mit 2 dividiren:

$$(7) \qquad \frac{m}{2}\,\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}\,\lambda f'(\lambda).$$

Ferner wollen wir aus (4) folgende Gleichung bilden:

$$i = \frac{\lambda}{\sqrt{\overline{v^2}}}.$$

Wenn wir hierin für $\overline{v^2}$ den Werth setzen, welcher sich aus der vorigen Gleichung ergiebt, so kommt:

$$(8) \qquad i = \sqrt{\frac{m\lambda}{f'(\lambda)}}.$$

Endlich wollen wir noch eine vierte Grösse durch λ darstellen. Nach dem Satze von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit hat man die Gleichung:

$$U + \frac{m}{2}\,v^2 = E,$$

worin E eine im Verlaufe der Bewegung constante Grösse ist, welche wir die Energie nen-

nen wollen. Wenn die Summe der beiden hier an der linken Seite stehenden veränderlichen Grössen während der ganzen Bewegung einen constanten Werth hat, so hat auch die Summe ihrer Mittelwerthe denselben Werth, und wir können daher schreiben:

$$E = \overline{U} + \frac{m}{2}\overline{v^2}.$$

Indem wir hierin die Ausdrücke aus (6) und (7) einsetzen, erhalten wir:

$$(9) \qquad E = f(\lambda) + \tfrac{1}{2}\lambda f'(\lambda).$$

Wir können somit, sobald die Form der Function $f(\lambda)$ bekannt ist, vermöge der vier Gleichungen (6), (7), (8) und (9) das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft, die Umlaufszeit und die Energie durch eine und dieselbe Grösse λ ausdrücken. Es versteht sich von selbst, dass wir auch aus je zweien dieser Gleichungen λ eliminiren und dadurch Beziehungen zwischen je zweien der vier genannten Grössen erhalten können. Denken wir uns dieses in der Weise ausgeführt, dass jede der drei ersten Gleichungen mit der letzten combinirt wird, so erhalten wir drei Gleichungen, welche das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft und die Umlaufszeit als Functionen der Energie bestimmen. Diese Bestimmungsart ist für die Anwendung insofern besonders bequem, als die Energie für jede Bewegung einen constanten Werth hat, welcher sich sofort angeben lässt, wenn nur für irgend eine Stellung des beweglichen Punctes seine Geschwindigkeit bekannt ist.

Es kommt nun nur noch darauf an, die

Form der Function $f(\lambda)$ zu finden. Diese hängt natürlich von dem Gesetze ab, dem die auf den Punct wirkende Kraft unterworfen ist. Besonders leicht ist die Bestimmung der Function, wenn die Kraft eine von einem festen Centrum ausgehende Anziehungskraft ist, welche durch irgend eine Function der Entfernung dargestellt wird, und diesen Fall wollen wir jetzt betrachten [1]).

Die Entfernung des beweglichen Punctes vom Anziehungscentrum möge mit r und die Function, welche die Grösse der Kraft darstellt, mit $F'(r)$ bezeichnet werden. Wenn wir dann setzen:

$$(10) \qquad \int F'(r)\,dr = F(r),$$

so ist $F(r)$ das Ergal, und durch Einführung dieser Function in die Stelle von U geht die Gleichung (6) über in:

$$(11) \qquad \overline{F(r)} = f(\lambda).$$

Wenn nun für irgend einen speciellen Fall der Bewegung die dieser Gleichung genügende Form der Function $f(\lambda)$ gefunden werden kann, so gilt dieselbe Form auch allgemein. Ein solcher Fall ist der, wenn der Punct sich um das An-

1) Da die Bewegung eines materiellen Punctes unter dem Einflusse einer Centralkraft nicht in geschlossener Bahn stattzufinden braucht, so will ich noch einmal hervorheben, dass die nachfolgenden Formeln sich nur auf solche Bewegungen beziehen sollen, die in geschlossenen Bahnen stattfinden. Für die Anwendung meiner Gleichung auf andere Bewegungen würden noch besondere Auseinandersetzungen nothwendig sein, welche hier zu weit führen würden.

ziehungscentrum in einer **Kreisbahn** bewegt. Dann ist r constant, und wir brauchen daher nicht den Mittelwerth von $F(r)$ zu nehmen, sondern können einfach schreiben:

$$(12) \qquad F(r) = f(\lambda).$$

Ferner ist in diesem Falle auch die Geschwindigkeit constant, und wir können daher auch in der Gleichung (4) an die Stelle des Mittelwerthes $\overline{v^2}$ einfach v^2 setzen, wodurch sie übergeht in

$$\lambda = i \sqrt{v^2} = iv.$$

Nun ist aber bei constanter Geschwindigkeit das Product iv gleich der Bahnlänge, und da die Bahn in unserem Falle ein Kreis mit dem Radius r ist, so erhalten wir:

$$\lambda = 2\pi r$$

oder:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Dieses in die Gleichung (12) für r eingesetzt, giebt:

$$(13) \qquad F\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f(\lambda).$$

Hierdurch ist die Function $f(\lambda)$ bestimmt. Durch Differentiation nach λ erhalten wir ferner:

$$(14) \qquad \frac{1}{2\pi} F'\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f'(\lambda).$$

Der Einfachheit wegen wollen wir nun noch das neue Zeichen ϱ einführen mit der Bedeutung:

(15) $$\varrho = \frac{\lambda}{2\pi}$$

dann erhalten wir:

(16) $$f(\lambda) = F(\varrho).$$

(17) $$f'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} F'(\varrho)$$

(18) $$\lambda f'(\lambda) = \varrho F'(\varrho).$$

Wenden wir dieses auf die Gleichung (11), welche an die Stelle von (6) getreten ist, und auf die Gleichungen (7), (8) und (9) an, so gelangen wir für den Fall, wo die wirksame Kraft eine von einem festen Centrum ausgehende und durch eine Function der Entfernung dargestellte Anziehungskraft ist, zu folgenden Gleichungen:

(19) $$\overline{F(r)} = F(\varrho)$$

(20) $$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}\varrho F'(\varrho)$$

(21) $$i = 2\pi\sqrt{\frac{m\varrho}{F'(\varrho)}}$$

(22) $$E = F(\varrho) + \tfrac{1}{2}\varrho F'(\varrho),$$

worin alle vorkommenden Functionen bekannt sind.

Als noch specielleren Fall wollen wir annehmen, die Anziehungskraft sei irgend einer positiven oder negativen Potenz der Entfernung proportional, wobei wir aber die minus erste Potenz ausnehmen wollen, welche bei der Integration zum Logarithmus führt, und daher besser besonders behandelt wird. Wir setzen also:

$$F'(r) = kr^n, \tag{23}$$

worin k und n Constante sind, deren letztere von -1 verschieden ist. Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$F(r) = \frac{k}{n+1} r^{n+1} \tag{24}$$

und durch Anwendung dieser Functionsformen gehen die obigen vier Gleichungen über in:

$$\frac{k}{n+1} \overline{r^{n+1}} = \frac{k}{n+1} \varrho^{n+1} \tag{25}$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{k}{2} \varrho^{n+1} \tag{26}$$

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \varrho^{\frac{1-n}{2}} \tag{27}$$

$$E = k \frac{n+3}{2(n+1)} \varrho^{n+1}. \tag{28}$$

Wenn man mittelst der letzten Gleichung aus den drei ersten ϱ eliminirt, so erhält man:

$$(29) \qquad \frac{k}{n+1}\overline{r^{n+1}} = \frac{2}{n+3}E$$

$$(30) \qquad \frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{n+1}{n+3}E$$

$$(31) \qquad i = 2\pi\, m^{\frac{1}{2}}\, k^{-\frac{1}{n+1}} \left[\frac{2(n+1)}{n+3}E\right]^{\frac{1-n}{2(n+1)}}.$$

Um endlich noch weiter zu specialisiren, wollen wir für n zwei bestimmte Werthe setzen, welche am häufigsten vorkommen.

Zuerst soll angenommen werden, es sei $n = 1$. Dieser Fall entspricht den einfachsten elastischen Schwingungsbewegungen, bei denen die Kraft, mit welcher ein Punct, der seine Gleichgewichtslage verlassen hat, nach dieser zurückgezogen wird, proportional der Entfernung ist. Für diesen Fall gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$(32) \qquad \frac{k}{2}\overline{r^2} = \frac{k}{2}\varrho^2 = \tfrac{1}{2}E$$

$$(33) \qquad \frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{k}{2}\varrho^2 = \tfrac{1}{2}E$$

$$(34) \qquad i = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Die lezte Gleichung sagt aus, dass die Umlaufszeit von der Elongation der Schwingungen unabhängig ist, dass also die Schwingungen isochron sind.

Zweitens soll angenommen werden, es sei

$n = -2$, was dem Newton'schen Anziehungsgesetze entspricht, welches in der Bewegung der Weltkörper herrscht. Für diesen Fall gehen die obigen Gleichungen über in:

$$(35) \qquad -k\,\overline{\frac{1}{r}} = -k\,\frac{1}{\varrho} = 2E$$

$$(36) \qquad \frac{m}{2}\,\overline{v^2} = \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{\varrho} = -E$$

$$(37) \qquad i = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\varrho^{\frac{3}{2}} = 2\pi k\sqrt{m}\,(-2E)^{-\frac{3}{2}}.$$

Die letzte Gleichung, welche wir auch so schreiben können:

$$i^2 = (2\pi)^2\,\frac{m}{k}\,\varrho^3,$$

entspricht dem dritten Keplerschen Gesetze, welches als sehr specieller Fall in unseren Gleichungen enthalten ist. Es muss aber etwas anders ausgesprochen werden, als es von Kepler geschehen ist, und auch jetzt noch häufig geschieht, dass nämlich *die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Cuben der mittleren Entfernungen verhalten.* Dieses ist nicht streng richtig, denn ϱ ist nicht der Mittelwerth von r, sondern $\frac{1}{\varrho}$ ist der Mittelwerth von $\frac{1}{r}$. Die andere, strengere Form des Satzes, dass *die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Cuben der grossen Axen der Ellipsen verhalten*, stimmt

vollkommen mit unserer Gleichung überein, denn es lässt sich leicht nachweisen, dass ϱ gleich der halben grossen Axe der Ellipse ist, welche bei dieser Art von Centralkraft die Bahn bildet.

Wir wollen uns jetzt zur Bewegung zweier materieller Puncte um einander wenden.

Nehmen wir zunächst an, es sei irgend eine Anzahl materieller Puncte gegeben, welche sich in stationärer Weise in geschlossenen Bahnen bewegen, und diese Bewegungen erleiden eine unendlich kleine Aenderung, so dass wieder stationäre Bewegungen in geschlossenen Bahnen entstehen, so lautet meine Gleichung für diesen Fall:

$$(38) \quad -\Sigma\overline{(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)} = \Sigma\frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + \Sigma m\overline{v^2}\delta \log i.$$

Sind die Kräfte, welche auf die Puncte wirken, der Art, dass sie ein Ergal haben, welches wir mit U bezeichnen wollen, und setzen wir wieder voraus, dass bei der Veränderung der Bewegung das Ergal eine unveränderte Function der Coordinaten sämmtlicher Puncte bleibe, so können wir, entsprechend der Gleichung (3), setzen:

$$(39) \qquad \delta\overline{U} = \Sigma\frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + \Sigma m\overline{v^2}\,\delta \log i.$$

Wenn die in unserem Systeme wirkenden Kräfte nur aus Anziehungen und Abstossungen bestehen, welche die beweglichen Puncte unter einander ausüben, und welche nach irgend einem Gesetze von der Entfernung abhängen, so lässt sich bekanntlich das Ergal sehr einfach

ausdrücken. Sei die Kraft, welche zwei Puncte mit den Massen m und m_1 in der Entfernung r auf einander ausüben, durch $mm_1 \varphi'(r)$ dargestellt, wobei ein positiver Werth der Function einer Anziehung entspricht; sei ferner:

$$\varphi(r) = \int \varphi'(r)\, dr,$$

dann ist das Ergal bestimmt durch die Gleichung:

$$U = \Sigma mm_1 \varphi(r),$$

worin die Summe alle Combinationen der gegebenen Massenpuncte zu je zweien umfasst. Demnach geht die vorige Gleichung für diesen Fall über in:

$$(40) \quad \delta \Sigma mm_1 \overline{\varphi(r)} = \Sigma \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + \Sigma m \overline{v^2} \delta \log i.$$

Wir wollen nun speciell annehmen, dass nur zwei materielle Puncte mit den Massen m und m_1 gegeben seien, welche sich unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Anziehung um einander bewegen. In diesem Falle können wir, wenn wir alle Grössen, die sich auf den zweiten Punct beziehen, durch Buchstaben bezeichnen, die mit einem Index versehen sind, die vorige Gleichung ohne Anwendung von Summenzeichen so schreiben:

$$mm_1 \delta \overline{\varphi(r)} = \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + \frac{m_1}{2} \delta \overline{v_1{}^2} + m \overline{v^2} \delta \log i$$
$$+ m_1 \overline{v_1{}^2} \delta \log i_1.$$

Da nun aber bei solcher Bewegung zweier Puncte um einander beide Puncte gleiche Umlaufszeit haben, so ist $i_1 = i$, und die beiden letzten Glieder lassen sich daher zusammenfassen. Indem wir zugleich die beiden ersten Glieder der rechten Seite unter ein gemeinsames Variationszeichen bringen, können wir schreiben:

$$(41)\qquad mm_1\,\delta\overline{\varphi(r)} = \tfrac{1}{2}\,\delta\,(m\overline{v^2} + m_1\overline{v_1{}^2}) + (m\overline{v^2} + m_1\overline{v_1{}^2})\,\delta\log i.$$

Dieser Gleichung können wir noch eine vereinfachte Gestalt geben. Es möge dazu als neue Grösse die relative Geschwindigkeit u der beiden Puncte eingeführt werden, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(42)\quad u^2 = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2.$$

Nun gilt aber auch, wie man leicht durch Auflösen der Klammern ersehen kann, die Gleichung:

$$mm_1\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 = (m+m_1)\left[m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\right] - \left(m\frac{dx}{dt} + m_1\frac{dx_1}{dt}\right)^2.$$

Unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass beide Puncte sich nur unter ihrer gegenseitigen Einwirkung in geschlossenen Bahnen um einander bewegen, muss ihr gemeinsamer Schwerpunct fest bleiben, und es ist daher:

$$m\frac{dx}{dt}+m_1\frac{dx_1}{dt}=0,$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$mm_1\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)^2=(m+m_1)\left[m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\right].$$

Eben solche Gleichungen gelten für die y- und z-Richtung, und wenn wir uns diese drei Gleichungen addirt denken, so erhalten wir:

$$mm_1\,u^2=(m+m_1)\,(mv^2+m_1v_1{}^2)$$

oder:

$$(43)\qquad mv^2+m_1v_1{}^2=\frac{mm_1}{m+m_1}u^2.$$

Wenn man diesen Werth von $mv^2+m_1v_1{}^2$ in die Gleichung (41) einführt, und dann das Product mm_1 forthebt, so kommt:

$$(44)\qquad \delta\overline{\varphi(r)}=\frac{1}{m+m_1}\left(\tfrac{1}{2}\,\delta\overline{u^2}+\overline{u^2}\,\delta\log i\right).$$

Zur noch weiteren Abkürzung wollen wir diese Gleichung in folgender Form schreiben:

$$(45)\qquad \delta\overline{\varphi(r)}=\frac{\overline{u^2}}{m+m_1}\delta\log\left(i\sqrt{\overline{u^2}}\right),$$

und hierin wollen wir wieder, wie in dem früheren Falle, für das unter dem Logarithmuszeichen stehende Product ein einheitliches Zeichen einführen, indem wir setzen:

(46) $$\lambda = i\sqrt{\overline{u^2}},$$

wodurch wir erhalten:

(47) $$\delta\overline{\varphi(r)} = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1}\,\delta\log\lambda.$$

Diese Gleichung lässt sich nun ganz ebenso behandeln, wie es mit der Gleichung (5) geschehen ist. Da die linke Seite eine Variation ist, muss auch die rechte Seite eine solche sein, und es muss daher $\overline{u^2}$ eine Function von λ sein, und daraus folgt weiter, dass auch $\overline{\varphi(r)}$ eine Function von λ sein muss. Wir setzen daher vorläufig:

(48) $$\overline{\varphi(r)} = f(\lambda)$$

und stellen uns die Frage, ob sich vielleicht für irgend eine specielle Art von Bewegung die Form der Function $f(\lambda)$ finden lässt. Das kann geschehen, wenn die beiden Puncte sich so um einander bewegen, dass ihr gegenseitiger Abstand r constant bleibt. Dann brauchen wir von $\varphi(r)$ nicht den Mittelwerth zu nehmen, sondern können schreiben:

(49) $$\varphi(r) = f(\lambda).$$

Ferner ist für diesen Fall auch u constant, und die Gleichung (46) geht über in:

$$\lambda = i\sqrt{\overline{u^2}} = iu.$$

Das hierin vorkommende Product iu hat eine

einfache Bedeutung. Es ist nämlich die relative Bahnlänge, d. h. die Länge der Bahn, welche wir erhalten, wenn wir uns den einen Punct ruhend denken und dem anderen die Geschwindigkeit u zuschreiben. Diese Bahn ist ein Kreis mit dem Radius r, und wir erhalten daher:

$$\lambda = iu = 2\pi r$$

und somit:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Diesen Werth von r in (49) eingesetzt, giebt:

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f(\lambda), \tag{50}$$

und hierdurch ist die Form der Function $f(\lambda)$ bestimmt. Führen wir noch, wie früher, das Zeichen ϱ ein mit der Bedeutung

$$\varrho = \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{51}$$

so kommt:

$$\varphi(\varrho) = f(\lambda),$$

und durch Anwendung dieser Gleichung geht (48) über in:

$$\overline{\varphi(r)} = \varphi(\varrho). \tag{52}$$

Indem wir nun wieder zu der Gleichung (47)

zurückkehren, können wir sie dem Vorigen nach in folgender Form schreiben:

$$\delta\varphi(\varrho) = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1} \delta \log (2\pi\varrho)$$

oder:

$$\varphi'(\varrho)\, \delta\varrho = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1} \cdot \frac{\delta\varrho}{\varrho},$$

woraus folgt:

$$(53) \qquad \overline{u^2} = (m + m_1)\, \varrho\varphi'(\varrho).$$

Wenn wir ferner in der Gleichung (46) an die Stelle von λ das Product $2\pi\varrho$ setzen, so kommt:

$$2\pi\varrho = i \sqrt{\overline{u^2}}$$

oder:

$$i = 2\pi \frac{\varrho}{\sqrt{\overline{u^2}}}.$$

Hierin für $\overline{u^2}$ seinen Werth aus (53) gesetzt, giebt

$$(54) \qquad i = 2\pi \sqrt{\frac{\varrho}{(m + m_1)\, \varphi'(\varrho)}}.$$

Endlich wollen wir noch die Energie unseres Systems ausdrücken. Es ist nämlich:

$$E = mm_1\varphi(r) + \frac{m}{2} v^2 + \frac{m_1}{2} v_1^2$$

$$E = mm_1 \varphi(r) + \tfrac{1}{2} \frac{mm_1}{m+m_1} u^2$$

und somit auch:

$$E = mm_1 \overline{\varphi(r)} + \tfrac{1}{2} \frac{mm_1}{m+m_1} \overline{u^2}.$$

Hierin die Werthe von (52) und (53) eingesetzt, giebt:

$$(55) \qquad E = mm_1 \left[\varphi(\varrho) + \tfrac{1}{2} \varrho \varphi'(\varrho)\right].$$

Wir sind also wieder zu einem System von vier Gleichungen, (52), (53), (54) und (55) gelangt, vermöge deren wir das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft, die Umlaufszeit und die Energie durch ϱ darstellen, oder auch, nach Elimination von ϱ, die drei zuerst genannten Grössen als Functionen der Energie ausdrücken können, also als Functionen einer Grösse, deren Werth sich angeben lässt, sobald für irgend einen Abstand der beiden Puncte ihre relative Geschwindigkeit bekannt ist.

Die hier gefundenen vier Gleichungen sind von derselben Form, wie die Gleichungen (19) bis (22), was man auch im Voraus erwarten konnte, da die früher behandelte Bewegung nur ein specieller Fall, der zuletzt behandelten ist, nämlich der Grenzfall, zu welchem man gelangt, wenn man die eine Masse gegen die andere als so gross annimmt, dass man sie bei der Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunct als ruhend betrachten kann. Es wird daher auch nicht nöthig sein, für die hier gefundenen Gleichungen wieder die speciellen Formen zu entwickeln, welche sie annehmen, wenn die Kraft einer Potenz der Entfernung proportional ist, da diese Formen ganz den früher entwickelten entsprechen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

7. Juni. №. 9. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln.

Note 2[1]).

Von

Max Noether in Heidelberg.

Mitgetheilt durch A. Clebsch.

I.

Man kann eine allgemeine Methode angeben, um eine gegebene Curve mit beliebigen singulären Punkten rational in eine andere zu transformiren, welche nur gewöhnliche vielfache Punkte enthält. Herr Cayley hat gezeigt[2]), wie man die Puiseux'schen Reihenentwicklungen in einem singulären Punkte einer Curve benutzen kann, um die einem solchen Punkte in Bezug auf die

1) Vgl. Note 1 in diesen »Nachrichten«, vom 14. Juli 1869.

2) Quarterly Journal of Mathematics, 1866, vol. VII, p. 212.

Irrationalität der Curve äquivalente Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten zu erhalten. Diese nämliche Bestimmung kann man mit Hülfe der erwähnten Transformation direct, ohne Voraussetzung der Puiseux'schen Entwicklungen, erreichen.

Dazu genügt es, irgend eine rationale Transformation, bei welcher ein Fundamentalpunkt in den singulären Punkt P der Curve C gelegt wird, auf die Curve anzuwenden. Es wird dabei nur eine so allgemeine Lage der Transformationscurven gegen C vorausgesetzt, dass die Jacobi'sche Curve der Transformation von den Tangenten von C in P nicht berührt wird.

Bei einer solchen Transformation löst sich die von dem vielfachen (νfachen) Punkte P als solchem herrührende Singularität in der transformirten Curve C' auf; und es bleiben demgemäss, dem Punkte P entsprechend, auf C' Punkte von niedrigerer Singularität, die zusammen, verbunden mit einem allgemeinen νfachen Punkte, äquivalent sind dem Punkte P von C. Bei einer fortgesetzten Anwendung von Transformationen auf die singulären Punkte der so entstehenden Curven C', C'', . . . erniedrigt sich somit die Singularität der P entsprechenden Punkte immer mehr, bis endlich dem Punkte P eine Reihe von einfachen Punkten der transformirten Curve entspricht.

Diese Auflösung der Singularität von P in die von mehreren Punkten ist identisch mit der Trennung der Functionswerthe um den singulären Punkt in Klassen. Die Anzahl der getrennten einfachen Punkte, die zuletzt P entsprechen, ist gleich der Anzahl der cyklischen

Systeme der Functionswerthe um den singulären Punkt[1]).

Die Singularität von C in P zählt, in Bezug auf das Geschlecht von C, für $\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}$ Doppelpunkte, plus der Anzahl der Doppelpunkte, welche in den dem Punkte P entsprechenden singulären Punkten von C' enthalten sind; und sie bestimmt sich somit durch eine Fortsetzung dieser Abzählung bei den successiven Transformationen. Auch die Anzahl der darunter enthaltenen Rückkehrpunkte (und zugleich die Anzahl der in einem der cyklischen Systeme enthaltenen Wurzeln) bestimmt sich aus der Art der Berührung von C' mit der P entsprechenden Fundamentalcurve der Transformation; eine Berührung μter Ordnung eines Zweiges von C' mit dieser Curve bedeutet ein cyklisches System von $\mu+1$ Wurzeln oder μ Rückkehrpunkte unter der Zahl der hiervon herrührenden Doppelpunkte.

Die einfachste und bequemste unter den hier anzuwendenden Transformationen ist die ebene quadratische, bei welcher den Geraden der Ebene Kegelschnitte durch 3 feste Punkte entsprechen.

So führt man die hyperelliptische Curve $2n$ter Ordnung mit singulärem $(2n-2)$ fachem Punkte P $(x_1 = x_2 = 0)$

$$C = x_3^2 f_{n-1}(x_1, x_2) + f_{2n}(x_1, x_2) = 0,$$

wo, wie auch im Folgenden, der Index an f die Ordnung der Functionen f anzeigt, durch die quadratische Transformation

1) S. Puiseux, in Liouville's Journal, t. 15 und 16.

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

über in die Curve

$$C' = y_1^2 y_2^2 f_{n-1}^2(y_2, y_1) + f_{2n}(y_2, y_1) \cdot y_3^2 = 0.$$

Dem singulären Punkte von C entsprechen auf C' die $n-1$ gewöhnlichen Doppelpunkte $y_3 = 0$, $f_{n-1}(y_2, y_1) = 0$, und P ist

$$\frac{(2n-2)(2n-3)}{1 \,.\, 2} + (n-1)$$

Doppelpunkten äquivalent, oder das Geschlecht von C ist $n-1$. Es bilden sich hier zuerst $n-1$ Klassen, von denen jede sodann in zwei zerfällt; d. h. C hat einen $(2n-2)$fachen Punkt mit $n-1$ getrennten Tangenten, in deren jeder sie einen Selbstberührungspunkt hat.

II.

Die Methode dieser Transformation lässt sich auf algebraische Functionen zweier Variabeln ausdehnen und führt hier insbesondere zur Untersuchung singulärer Knotenpunkte einer Fläche und zur Bestimmung der Wirkung derselben auf das Flächengeschlecht, das bis jetzt erst bei vielfachen Curven und allgemeinen konischen Knotenpunkten der Fläche festgestellt worden ist[1]).

Wenn man eine Raumtransformation[2]) an-

1) S. meine schon citirte Note vom 14. Juli 1869.

2) Ueber die hierzu geeignetsten Transformationen, die direct umkehrbaren, vgl. Cayley, Proc. of the London Math. Soc., vol. III, 1870.

Cremona, diese »Nachrichten« vom 4. Mai 1871, und Rendiconti del R. Istit. Lombardo, vom 5. Mai 1871, so

wendet, bei welcher ein Fundamentalpunkt in den singulären Punkt P der Fläche F gelegt wird, so entspricht dem Punkte P auf der transformirten Fläche F' eine Curve C', durch welche F' im Allgemeinen vielfach und singulär gehen wird, aber so, dass die Ordnung dieser Singularität niedriger ist, als die von P auf F. Man kann nun entweder dieses Verfahren wiederholen, indem man C' als Fundamentalcurve einer zweiten Transformation annimmt, wodurch man auf Curven von niedrigerer Singularität geführt wird; oder, was im Allgemeinen vortheilhafter ist, man bestimmt direct den Einfluss der vielfachen Curve von F' auf das Flächengeschlecht dieser Fläche. Das Flächengeschlecht ist, wenn F' von der Ordnung m ist, gleich der Anzahl der Flächen $(m-4)$ter Ordnung, welche sich in den vielfachen Curven genau so zu verhalten haben, wie die Curven $(m-3)$ter Ordnung, welche das Geschlecht eines ebenen Querschnitts der Fläche bestimmen, in den Schnittpunkten dieses Querschnitts mit den vielfachen Curven. Man erschliesst daher aus den Reihenentwicklungen in einem ebenen Querschnitt in einem Punkte von C', die denen in einem ebenen Querschnitt durch P bei F entsprechen und nur von niedrigerer Ordnung sind, das Verhalten der Flächen $(m-4)$ter Ordnung, und dadurch das Flächengeschlecht p von F.

Diese Reihenentwicklungen werden, wenn man den ebenen Querschnitt unbestimmt lässt, in einzelnen Punkten der vielfachen Curven ungültig; aber für das Verhalten der Flächen $(m-4)$ter Ordnung ist die Untersuchung dieser Punkte,

wie meine gleichzeitig mit diesen beiden Noten erschienene Abhandlung in Math. Ann., Bd. 3, p. 547.

die übrigens selbst nach der angegebenen Methode geschehen könnte, überflüssig.

Am bequemsten zur Transformation ist die quadratische:

$$1)\begin{cases} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : \varphi_2(y_1, y_2, y_3) \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : \varphi_2(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

bei welcher dem Puncte $P(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ die Ebene $E'(y_4 = 0)$, welche noch den Fundamentalkegelschnitt $K'(y_4 = 0,\ \varphi_2(y) = 0)$ enthält, entspricht, und einer Berührungsebene $A(x_1, x_2, x_3) = 0$ von F im Punkte P eine Gerade $A(y_1, y_2, y_3) = 0,\ y_4 = 0$ von F'.

Ich erlaube mir, durch einige Beispiele die Anwendbarkeit der Methode zu zeigen.

a) Wenn die Singularität eines μfachen Punktes P von F darin besteht, dass der Tangentenkegel μter Ordnung in P eine νfache Kante besitzt, so erhält die nach 1) entsprechende Fläche F' die Singularität, dass sie von der Ebene E' in einem Punkte in der $(\nu-1)$ten Ordnung berührt wird, was auf das Geschlecht von F' ohne Einfluss ist. Daher reducirt auch der specielle μfache Punkt P das Geschlecht p von F nur um $\frac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)$.

b) Sei F wieder eine Fläche mit μfachen singulären Knotenpunkte P:

$$2)\ F = x_4^{n-\mu} f_\mu(x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-\mu-1} f_{\mu+1}(x) + \cdots + f_n(x) = 0,$$

und sei insbesondere $x_1 = x_2 = 0$ eine $(\nu-1)$

fache Kante für $f_{\mu+i}(x_1, x_2, x_3) = 0$, von $i = 0$ bis $i = \nu - 1$, für $\mu + \nu - 1 \leqq n$. Dann wird $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ ein νfacher Punkt von F', und das Geschlecht p von F erniedrigt sich durch P um

$$\tfrac{1}{6}\mu(\mu - 1)(\mu - 2) + \tfrac{1}{6}\nu(\nu - 1)(\nu - 2).$$

So wird, für $n = 5$, $\mu = 3$, $\nu = 3$, die Fläche F_5, wenn sie noch eine Doppelgerade besitzt, auf der Ebene abbildbar.

c) Sei bei der Fläche 2) die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ eine νfache Kante von $f_\mu(x) = 0$, $f_{\mu+1}(x) = 0$, ... und $f_n(x) = 0$, für $\nu \overline{\overline{<}} \mu$. Bei der speciellen Transformation 1) erhält dann F' ein ähnliches System mit $n$fachem Punkte P' ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) und νfacher Geraden $y_1 = y_2 = 0$. Und man folgert aus der Gleichsetzung der Reduction auf p für beide vielfache Gerade den Satz, dass, wenn eine Fläche einen μfachen Punkt enthält, der für sich allein die Reduction $M = \tfrac{1}{6}\mu(\mu - 1)(\mu - 2)$, und eine von P ausgehende νfache Curve, welche für sich die Reduction N auf das Geschlecht der Fläche hervorbringen würde, die gesammte Reduction durch Punkt und Curve

$$M + N - \frac{\nu(\nu - 1)(3\mu - 2\nu - 2)}{6}, \text{ für } \nu \overline{\overline{<}} \mu,$$

beträgt.

d) F besitze einen uniplanaren Knotenpunkt μter Ordnung, aber der Art singulär, dass F die Gleichung hat:

$$F = x_4^{n-\mu} x_1^{\mu} + x_4^{n-\mu-1} x_1^{\mu-1} f_2(x_1, x_2, x_3) \ldots$$

$$+ x_4^{n-2\mu+1} x_1 f_{2\mu-2}(x) + x_4^{n-2\mu} f_{2\mu}(x) \ldots$$

$$+ f_n(x) = 0, \qquad \text{für } 2\mu - 1 > n.$$

Dann erhält F' nach 1) als Singularität noch eine μfache Gerade $y_1 = y_4 = 0$, durch welche sich das Geschlecht bei Berücksichtigung [1]) der beiden Schnittpunkte dieser Geraden mit K', um $\frac{1}{2}\mu(\mu-1)^2$ erniedrigt. Der singuläre uniplanare Knotenpunkt von F reducirt daher das Geschlecht p um

$$\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2) + \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)^2 = \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(4\mu-5).$$

Für $\mu = 2$ ergiebt sich speciell, dass ein uniplanarer Doppelpunkt, von der Art, dass jede durch denselben gehende Ebene die Fläche in einer Curve mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten schneidet, also ein Selbstberührungspunkte der Fläche, das Geschlecht derselben um 1 erniedrigt, und eine Fläche 4ter Ordnung

$$x_4^2 x_1^2 + 2x_4 x_1 f_2(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

muss sich auf der Ebene abbilden lassen. In der That führt diese Fläche auch auf eine Doppelebene mit Uebergangscurve 4ter Ordnung [2]).

1) S. die »postulation«-Formel in dem schon citirten Cayley'schen Memoire über die Raumtransformationen, pag. 180.

2) S. Clebsch, Math. Ann., Bd. 3, pag. 51.

Die ebenen Schnitte der Fläche bilden sich durch Curven 6ter Ordnung (1^2, 2^2, .. 7^2, 8, 9, 10, 11) ab, wobei die Punkte 8, 9, 10, 11 von einer Curve 3ter Ordnung (1, 2, .. 7) aus einer der Curven 6ter Ordnung ausgeschnitten werden. Das System der 28 durch den uniplanaren Punkt gehenden noch doppelt berührenden Ebene ist identisch mit dem der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung [1]).

III.

Ich mache noch eine Anwendung dieser Theorie auf die Untersuchung der Bedingung, unter welcher eine geometrische Doppelebene auf einer Kegelfläche abbildbar wird. Von Abbildungen auf der einfachen Ebene hat Herr Clebsch in seiner schon citirten Abhandlung, Math. Ann. Bd. 3, Beispiele gegeben.

Sei die »Uebergangscurve« der Doppelebene eine Curve der Ordnung $2m$, $\Omega_{2m}(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ich betrachte die Fläche

$$F = x_4^2 f_{m-1}^2(x_1, x_2, x_3) - \Omega_{2m}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die mit der Doppelebene zugleich auf einer Kegelfläche abbildbar wird. Ihre Singularität liegt in dem $(2m-2)$ fachen Punkte P ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$). Die Transformation von 1) II. liefert

$$F' = \varphi_2^2 f_{m-1}^2(y_1, y_2, y_3) - y_4^2 \Omega_{2m}(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

1) Ein specieller Fall dieser Fläche findet sich bei Herrn Cremona, diese Nachrichten vom 3. Mai 1871, p. 714, erwähnt.

eine Fläche der Ordnung $2m+2$, mit allgemeinem $2m$ fachen Punkte P' ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$), mit dem Doppelkegelschnitt K' und mit einer in dessen Ebene liegenden allgemeinen Doppelcurve $(m-1)$ter Ordnung ($y_4 = 0$, $f_{m-1}(y) = 0$). Das Geschlecht dieser Fläche ist $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$.

»Das Flächengeschlecht der Flächen, welche auf eine Doppelebene mit allgemeiner Uebergangscurve führen, ist $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$«.

Wenn $\Omega_{2m}(x) = 0$ einen ν fachen Punkt in $x_2 = x_3 = 0$ besitzt, so erhält F einen singulären uniplanaren Doppelpunkt im Punkte Π ($x_2 = x_3 = x_4 = 0$). Man macht daher eine Transformation

$$x_2 : x_3 : x_4 : x_1 = \xi_2 \xi_1 : \xi_3 \xi_1 : \xi_4 \xi_1 : \psi_2(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

und erhält eine Fläche Φ mit singulärer Geraden G ($\xi_1 = \xi_4 = 0$). Für ein gerades ν, $\nu = 2\varrho$, ergeben sich sodann in einem Punkte von G zwei getrennte Reihenentwicklungen:

$$\xi_4 = \varkappa \xi_1^{\varrho-1} + \dots\dots$$

$$\xi_4 = -\varkappa \xi_1^{\varrho-1} + \dots\dots,$$

und die Fläche Φ hat zwei Schalen, welche sich $(\varrho-1)$ punktig in jedem Punkte der Geraden G treffen, in der singulären Berührungsebene $\xi_4 = 0$. Man leitet hieraus ab, dass die Fläche $(2m-4)$. Ordnung, deren Anzahl das Geschlecht p der Fläche F bestimmt, durch den Punkt Π derart hindurchgehen müssen, dass sie daselbst die Ebene

$x_4 = 0$ in der $(\varrho-2)$ten Ordnung berühren, was $\frac{\varrho(\varrho-1)}{1.2}$ Bedingungen darstellt.

Wenn ν ungerade[1]), $\nu = 2\varrho + 1$, so erhält man in einem Punkte von G ein cyklisches System von 2 Wurzeln und die Reihenentwicklung für diese beiden Wurzeln:

$$\xi_4 = \pm \varkappa \xi_1^{\frac{2\varrho-1}{2}}.$$

Die Fläche Φ hat dann in $\xi_1 = \xi_4 = 0$ zwei Schalen, die sich in $\varrho-1$ zusammenfallenden Geraden schneiden, und die singuläre Doppellinie ist äquivalent mit $(\varrho-2)$ Doppelgeraden und einer Rückkehrgeraden. Auch hier folgt, dass jene Flächen $(2m-4)$ten Ordnung die Ebene $x_4 = 0$ in P in der $(\varrho-2)$ter Ordnung berühren müssen, was wieder $\frac{\varrho(\varrho-1)}{1.2}$ Bedingungen giebt.

»Das Geschlecht einer Fläche, welche auf eine Doppelebene mit Uebergangscurve der Ordnung $2m$ führt, die α_i $2i$fache oder $(2i+1)$fache Punkte besitzt, ist $= \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \sum_i \frac{1}{2} i(i-1)\alpha_i$.

Dass dieser Ausdruck verschwinde, ist die Bedingung für die Abbildbarkeit der Doppelebene auf der einfachen Ebene. Ferner muss dieser Ausdruck $= -q$ werden, wenn die Doppelebene auf einem Kegel abbildbar sein soll, dessen ebene Querschnitte das Geschlecht q haben.«

1) Hiernach ist eine Bemerkung von Zeuthen, Math. Ann. Bd. 8, pag. 324 zu corrigiren.

Diese letztere Bemerkung folgt aus einem Satze des Herrn Cayley[1]), dass das Flächengeschlecht der Flächen, für welche die numerische Formel dasselbe $\overline{\overline{<}}0$ giebt, gleich wird dem »Curvengeschlecht« [2]), negativ genommen.

Daher muss sich z. B. eine Doppelebene mit Uebergangscurve $2m$ter Ordnung, welche einen $(2m-2)$ fachen Punkt besitzt, auf der Ebene abbilden lassen. In der That führen auch die Flächen $(m+1)$ter Ordnung mit $(m-1)$ facher Geraden, auf eine solche Doppelebene. Die Abbildung derselben geschieht genau nach dem von Herrn Clebsch für $m = 3$ angegebenen Verfahren [3]). Den Geraden der Doppelebene kann man auf der einfachen Ebene Curven der Ordnung $n+1$, mit $(n-1)$fachem, und $4n-2$ einfachen festen Punkten, entsprechen lassen, und die Zahl solcher Abbildungen beträgt 2^{4n-4}.

Eine Fläche 4ter Ordnung mit 2 uniplanaren Doppelpunkten, die Selbstberührungspunkte sind, führt auf eine Uebergangscurve 4ter Ordnung mit 4fachem Punkte. Daher lässt sich diese Fläche auf einem Kegel dritter Ordnung abbilden [4]).

1) Nach einer Privatmittheilung von Herrn Cayley.
2) S. die erste Note vom 14. Juli 1869.
3) Math. Ann., Bd. 3, pag. 64.
4) Ebd. pag. 558.

Heidelberg, den 26. Mai 1871.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

14. Juni. — №. 10. — 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 10. Juni.

Waitz, über Fränkische Annalen aus dem Kloster St. Maximin.

Claus (durch Wöhler), über den Bau und die systematische Stellung von Nebalia, nebst Bemerkungen über das seither unbekannte Männchen derselben.

Benfey, „Ist in der indogermanischen Grundsprache ein nominales Suffix *ia* oder statt dessen *ya* anzusetzen?" (Erscheint in den Abhandlungen).

— „Ueber das Verhältniss des griechischen *Πύθων ὄφις* zu dem vedischen *áhi-s budhnyà-s*.

Wieseler, neue archäologische Untersuchungen und Entdeckungen nach Briefen aus Petersburg und Pompeji.

Ewald: Beiträge zur höheren Sprachwissenschaft. I.

Ueber den Bau und die systematische Stellung von Nebalia nebst Bemerkungen über das seither unbekannte Männchen derselben.

Von

Prof. Dr. Claus.

Die Auffassung der bekannten Gattung Nebalia als Phyllopod und als nächster Verwandter von Apus und Branchipus, zuerst bekanntlich von M. Edwards[1]) vertreten, hat

1) M. Edwards, Mémoire sur quelques Crustacés

sich in neuerer Zeit vielseitiger Zustimmung zu erfreuen gehabt und ist vornehmlich wohl durch die grosse Autorität des berühmten französischen Naturforschers zur allgemeinen Anerkennung gelangt. Erst E. Metschnikoff's [2]) Beobachtungen über einige Verhältnisse der innern Organisation und besonders über die embryonale Entwickelung von Nebalia Geoffroyi brachten wichtige und wesentliche Gründe für die Natur dieser Crustaceenform als Malakostrake. Vor allem musste die Anwesenheit eines Kaumagens mit Chitinbewaffnung und die Aehnlichkeit der Embryonalbildung mit der von Mysis die früher schon oftmals ausgesprochene Verwandtschaft von Nebalia mit den Schizopoden bekräftigen. Minder schwer fiel die Angabe in die Wagschale, auf welche freilich Metschnikoff für seine Deutung als „phyllopodenartiger Decapod" das Hauptgewicht legte, dass Nebalia während des embryonalen Lebens nach dem Naupliuszustand noch ein 2tes in der Gliedmassenzahl mit Zoëa übereinstimmendes Stadium zu durchlaufen hat, indem das letztere seiner Segment- und Gliedmassenzahl nach dem jüngsten Stadium der Cyclopsform entspricht, welches ja auch bereits innerhalb der Eihülle im Kreise der Entomostraken (Lernaeopoden) auftritt.

Unter solchen Verhältnissen erschien eine nochmalige genaue Prüfung des gesammten Körper- und Gliedmassenbaues erwünscht, und diese hat denn auch die Deutung Metschnikoffs nicht

nouveaux. Annales des sciences naturelles, I sér. tom XIII. 1827. Ferner II ser. tom. III. 1835 und Histoire naturelle des Crustacés. tom III. 1840.

2) Sitzungsberichte der Naturforscherversammlung zu Hannover 1865 p. 218, sowie Kefersteins Jahresbericht 1867. Auch hat Metschnikoff eine grössere russische Abhandlung über diesen Gegenstand veröffentlicht.

nur im Wesentlichen bestätigt, sondern überhaupt keinen Zweifel zurückgelassen, dass die ursprüngliche Auffassung der Autoren als die allein richtige in ihr gutes Recht wieder einzusetzen ist.

Wenn man sieht, dass M. Edwards in seiner zweiten berichtigenden Notiz über Nebalia Geoffroyi und Kröyer in seiner viel genauern und zutreffendern Beschreibung von Nebalia bipes den Körperbau der Gattung im Allgemeinen richtig beschrieben haben, so wird es schwer zu begreifen, wie sie zu einer so offenbar verkehrten Deutung gelangen und dieselbe den Autoren gegenüber aufrecht erhalten konnten. Sehr richtig schloss schon Latreille[1]) freilich auf die Resultate der ersten Arbeit von M. Edwards gestüzt: „Il me parait evident, que d'après leur mode d'organisation il tendent à établir le passage entre les Mysis et les Apus" und M. Edwards konnte in kaum begreiflicher Weise entgegnen „je ne comprends pas bien comment M. Latreille a pu conclure de mes precédentes observations, que les Nebalies doivent prendre place dans sa derniere section des Décapodes Macroures". Gleichwohl ging die falsche M. Edwardsche Auffassung in die Wissenschaft über und gab wiederum den Palaeontologen Veranlassung, die ältesten fossilen Krebsüberreste wie Hymenocaris, Ceratiocaris, Dictyocaris vornehmlich wegen ihrer Aehnlichkeit mit Nebalia als Phyllopoden zu betrachten.

Hinreichend bekannt und genau beschrieben ist die allgemeine Körperform und die eigenthümliche (erst ausserhalb der der Eihüllen sich ausbildende) Schalenduplicatur des Kopfes, welche den gesammten kurzgeringelten Thorax mit

1) Cuvier, regne animal. 2 Edit. tom. 4 pag. 584.

seinen acht Paaren phyllopodenähnlicher Füsse und grossentheils auch die vordern Segmente des Abdomens umschliesst. Ich will hier nur das bemerken, dass die Schale, nach der Existenz zahlreich verzweigter Canäle und Lacunen in ihrem Innern zu schliessen, von reichen Blutströmen durchflossen wird und demnach als Respirationsorgan fungirt. Erinnern diese Verhältnisse und der Bau der Füsse in der That an die Phyllopoden, so tragen schon die gestilten zur Seite des beweglichen lanzetförmigen Schnabels vorstehenden Augen die Charaktere des Podophthalmenauges. Auch die beiden Aetennenpaare zeigen einen von den Phyllopoden abweichenden Bau, schliessen sich dagegen eng an die der Amphipoden und Cumaceen an. Die vordern Fühler bestehen aus einem mächtigen 4 gliedrigen, in der Mitte knieförmig nach hinten umgebogenen Schaft und 2 Geisselanhängen, von denen freilich der eine zu einen breiten borstenrandigen Platte umgeformt an die Schuppe erinnert, welche das 2te Antennenpaar der meisten Macrouren auszeichnet. Die Hauptgeissel ist schmal, bei N. Geoffroyi 10 bis 12gliedrig und trägt zwischen den Borsten vertheilt die Riechfäden, die im männlichen Geschlecht in viel grösserer Zahl die stark aufgetriebenen Fühlerglieder umlagern. Der Schaft des zweiten Fühlerpaares ist ebenfalls knieförmig gebogen, jedoch nur aus 3 Gliedern zusammengesetzt und läuft in eine schmale etwa 12 bis 17gliedrige Geissel aus. Bei den Männchen ist dieselbe wie bei den Cumaceenmännchen ausserordentlich verlängert, besteht aus ungefähr 80 Gliedern und reicht fast bis an das hintere Körperende. Die unter der Oberlippe gelegenen Mandibeln tragen in auffallender Weise den Charakter des

Coxalgliedes eines Beines und gehen in einen grossen 3gliedrigen Taster über, welcher dem Taster der Amphipoden am nächsten steht. Bei keinem Phyllopoden ist bislang ein Mandibulartaster nachgewiesen worden. Die grossen zweiklappigen vordern Maxillen, von der Mandibel durch eine kleine getheilte Unterlippe getrennt, tragen einen langen und dünnen, beim Weibchen nach dem Rücken umgebogener Tasterfuss, welcher der Schalenhaut anliegt und nach Form und Funktion am besten mit dem sog. Putzfuss der Ostracoden verglichen werden kann. Im männlichen Geschlecht fand ich diesen langen dünnen Anhang nicht dorsalwärts umgebogen, sondern nach vorn gerichtet. Die dreilappigen Maxillen des zweiten Paares nähern sich in ihrem Bau den nachfolgenden Beinpaaren, tragen einen schmalen bostenrandigen Nebenanhang (Aeusserer Fussaste) und setzen sich in einen gestreckten 2gliedrigen Taster (Innerer Ast) fort.

In dicht gedrängter Stellung folgen nun, an ebensoviel gesonderten kurzen Segmenten befestigt, die 8 lamellösen Fusspaare der Brust, deren vermeintliche Idendität mit den Phyllopodenfüssen zu der irrthümlichen Stellung der Nebalia Veranlassung gab. Wenn wir berücksichtigen, dass die Kiefer der Decapodenlarven in ihrem Baue mit den Phyllopodenfüssen nahe übereinstimmen, so werden wir von vornherein dem Charakter an und für sich keinen für die systematische Stellung entscheidenden Werth zuschreiben können. Bei eingehenderer Betrachtung aber ergiebt es sich, dass die sogenannten Phyllopodenfüsse der Nebalia von denen der wahren Phyllopoden einigermassen abweichen, dagegen entschieden zu den Spaltfüssen der Podophthalmen hinführen, deren

sämmtliche Theile und Abschnitte in dem Nebaliafusse vertreten sind. Wir können an demselben einen 2gliedrigen Basalabschnitt und einen mehr oder minder deutlich 5gliedrigen Stamm oder Hauptast unterscheiden. An der Aussenseite des untern Grundgliedes entspringt eine grosse 2zipflige Lamelle, welche sowohl dem scheibenförmigen Anhange der 5 Stamatopodenfüsse als dem Kiemenanhang der Amphipoden, Schizopoden und Decapoden entspricht und auch in unserm Falle eine entschieden respiratorische Bedeutung hat. Dies ergiebt sich aus dem Systeme verzweigter Gänge und Blutbahnen im Innern derselben. Das zweite Glied des Basalabschnittes trägt ebenfalls an der Aussenseite eine breite lamellöse Platte, in der wir morphologisch sowohl die zur Bildung des Brut-Raums verwandte Lamelle des Amphipodenbeines, als den äussern Nebenast oder Schwimmfussast der Spaltfüsse erkennen. Die randständigen Borsten, die vornehmlich an jüngern und kleinern Exemplaren dicht gedrängt stehen, unterstützen diese schon aus der Insertion hervorgehende Bedeutung. Physiologisch dient auch dieser Anhang, dessen Mitte von einem an der Spitze sich theilenden Blutstrom durchsetzt wird, mit zur Respiration und findet sich in vollkommen gleicher Ausbildung beim Männchen vor. Nach vorn verlängert sich das 2te Glied des Basalabschnittes in den aus 5 Gliedern gebildeten Hauptast, dessen Innenseite ebenso wie die der beiden Grundglieder von einer dicht gestellten Borstenreihe besetzt wird. Das erste Glied des Hauptastes erscheint am meisten gestreckt, nach oben merklich verjüngt und von dem Basalabschnitt nur durch eine mehr oder minder ausgeprägte Einkerbung undeutlich ab-

gesetzt. Zuweilen beobachtet man in der Mitte seines Innenrandes eine Einkerbung, welche auf ein Zerfallen in 2 Glieder hindeuten würde. Von den vier kürzern nachfolgenden Gliedern sind nur die drei obern stets scharf als Glieder abgesetzt und mit besondern Muskeln zur Bewegung des Endgliedes versehen. Die Borsten werden schon an dem vorletzten Gliede stärker, an dem kräftigen nach aussen umgebogenen Endgliede aber zu langen befiederten Schwimmborsten, welche in Form eines Fächers auseinandergebreitet liegen und wie es scheint vornehmlich zur' Unterhaltung einer beständigen Wasserströmung im Schalenraum (Bruthöhle) in Verwendung kommen. Interessant ist die Verkümmerung dieser Borsten an den viel schwächern Füssen des Männchens. Hier scheint besonders der Hauptast kürzer und schmächtiger, das Endglied gerade gestreckt und niemals umgebogen.

Dieser Unterschied weist uns auf die angeführte Bedeutung des Borstenfächers als einen für die Entwicklung der Eier im Brutraum nothwendigen Strudelapparat hin.

Viel umfangreicher als die Brustsegmente sind die Ringe des Abdomens, von denen die vier vordern von der Schale grossentheils überdeckten Segmente zweiästige Schwimmfüsse tragen. Diese letztern bestehen wie die Afterfüsse der Amphipoden aus einem langgestreckten Grundgliede und zwei schmalen und langen mit starken Dornen und Borsten besetzten Ruderästen, welche sich dem Basalgliede unter einem Winkel anfügen. Männchen und Weibchen verhalten sich in der Bildung dieser Ruderfüsse vollkommen gleich und tragen an dem kurzen Grundgliede des Innenastes einen eigenthümlichen

mit ganz kurzen Häkchen besetzten Anhang, der dazu dient, die Füsse der rechten und linken Seite wie durch eine Art Retinaculum zu einem gemeinsamen Ruderapparat zusammen zu heften. Die frei aus der Schale hervortretende hintere Hälfte des Abdomens verjüngt sich allmählig nach dem Ende zu, ihre 4 Segmente sind noch länger und gestreckter als die vorausgehenden, die beiden vordern noch mit Fussabhängen (das erstere mit einem 2gliedrigen, das zweite mit einem einfachen Fusse) versehen. Das Endglied (achte Abdominalsegment) läuft bauchwärts in 2 kurze conische Platten aus und trägt die stilförmigen, divergirenden Furcalglieder, welche in Form und Bau dem Aussenaste der vordern abdominalen Schwimmfüsse ähnlich sind.

Von grossem Interesse war mir die Entdeckung des Nebaliamännchen, das ich unter etwa vierzig auf den Unterschied in der Gestaltung verglichenen Exemplaren von Nebalia Geoffroyi[1]) in freilich nur einem einzigen ausgezeichnet erhaltenen Exemplare auffand. In Grösse und Form des Leibes und der Schale mit dem Weibchen übereinstimmend, doch etwas schlanker und gestreckter, zeigt das Männchen die bereits hervorgehobenen Abweichungen der Antennen und Füsse, welche von denen der Phyllopoden wesentlich verschieden sind, dagegen sich an die Cumaceen und Schizopoden anschliessen. Vergebens suchte ich nach besonderen Copulationseinrichtungen z. B. Haken an den phyllopodenähnlichen Beinen, wie sie die Estherien und Daphniden charakterisiren. Dagegen gelang es, mir über die Mündungsstelle des männlichen Geschlechtsapparates Aufschluss zu verschaffen und durch die Lage

1) Dieselben stammen von Metschnikoff aus Neapel.

derselben an dem letzten der 8 Thoracalfusspaare eine neue und wichtige Uebereinstimmung mit den Malacostraken darzuthun.

Man sieht, die Hauptabweichung vom Malacostrakentypus, dem die Nebalia der innern Organisation, Gliedmassenbildung und Entwicklung nach angehört, beruht auf der vermehrten Anzahl von Hinterleibssegmenten und auf der Form des Schwanzendes. Anstatt eines 6gliedrigen mit einer Schwimmflosse endenden Abdomens haben wir einen 8gliedridrigen Hinterleib, dessen 6 vordern Segmente Gliedmassen tragen, während das letzte Segment nach Copepodenart in Furcalglieder ausläuft. In letzterer Hinsicht finden wir auch bei manchen Amphipoden die Schwanzplatte der Länge nach median in 2 stilförmige Glieder gespalten. Zur Erklärung der erst genannten wichtigen Abweichung dürfen wir uns vorstellen, dass die zuweilen noch gespaltene Schwanzplatte der Malacostraken im Laufe der zeitlichen Entwicklung durch Reduction aus einem grössern eine Reihe von Segmenten umfassenden Abschnitt hervorgegangen ist, den wir noch wenngleich der Giederzahl nach beschränkt bei Nebalia vorfinden. So hätte man sich vielleicht die Brücke zwischen den niedern Formenreihen der noch durch keine bestimmte Segmentzahl begrenzten Crustaceentypen, denen auch die Phyllopoden zugehören, einerseits und den Malacostraken andererseits zu denken. Bekanntlich betrachtet man die ältesten paläozoischen Crustaceenreste, deren Schalen und Körperform theils mit Apus theils mit Nebalia eine so grosse Aehnlichkeit zeigt, gerade wegen dieser Uebereinstimmung als Phyllopoden, ohne über die Natur der Gliedmassen unterrichtet zu sein. Nun aber wird uns der lehrreiche Irr-

thum, zu welchen die Deutung von Nebalia Veranlassung gab, zu um so grösserer Vorsicht in der Deutung der so unvollständig erhaltenen und schlecht gekannten fossilen Reste mahnen. Auch bei Ceratiocaris Salt haben wir ein grosses Nebalia-ähnliches Kopfschild, von dem eine Reihe freier Segmente bedeckt werden, ferner einen langen wohl gesonderten lanzetförmigen Schnabel. Dagegen weist die Form des Hinterleibes mit der mächtig entwickelten von Seitenstacheln umstellten Schwanzplatte auf abweichende Gestaltungsverhältnisse hin, welche auch in dem für C. papilio Salt. als Antennen oder Thoracalgliedmassen abgebildeten Anhängen ihren Ausdruck finden. Wenn diese Gebilde wirklich Gliedmassen entsprechen, so würden sie am meisten an Larvenbeine von Decapoden erinnern. Aehnliches gilt für Dictyocaris Salt. und Dithyrocaris Scoul., wie denn überhaupt die Stellung der übrigen Silurischen bisher als Phyllopoden betrachteten Ueberreste wie Hymenocaris Salt., Peltocaris pp. so lange eine problematische (ebenso wie die der Trilobiten) bleibt, bis wir nähere Aufschlüsse über die beschaffenheit der Gliedmassen erhalten haben. Höchst wahrscheinlich aber sind alle diese Formen keine wahren Phyllopoden gewesen, sondern haben Crustaceentypen angehört, von denen sich gegenwärtig keine Repräsentanten mehr lebend finden, die aber aus niedern den Entomastraken verwandten Gestaltungsformen die Entstehung des Malacostrakentypus vorbereiteten. Als ein solches in die Jetztwelt hineinreichendes Verbindungsglied haben wir möglicherweise die Gattung Nebalia aufzufassen.

Neue archäologische Untersuchungen und Entdeckungen. Nach Briefen aus Petersburg und Pompeji

mitgetheilt von

Fr. Wieseler.

I.

»Ein junger Candidat der Petersburger Universität, Prachow, war in's Ausland geschickt worden, um archaeologische Studien zu machen und war in München, Paris und London. In München hat er die Fragmente von den Statuen der aeginetischen Giebelgruppen genau studirt, und einige Restitutionen zum Theil verändert und verbessert, zum Theil neu hinzugefügt. Unter anderm hat er Friederichs' und Brunn's Umstellung der Bogenschützen als eine Unmöglichkeit zurückgewiesen. Weiter hat er in London sich, unter Anderem, mit den lykischen Denkmälern beschäftigt, sie selbst zum Theil, namentlich alle archaischen unter ihnen, gezeichnet und hat jetst die archaischen in Altertotypien herausgegeben, mit Beschreibungen und Stilbestimmungen und Vergleichungen andrer archaischer Denkmäler. Sie nehmen sechs Tafeln ein, eine ganz stattliche Reihe. Die Resultate seiner Arbeit sind folgende. Während man gewöhnlich das Harpyienmonument zuerst mit attischen archaischen Denkmälern und dann, diesen Vergleich aufgebend, mit den milesischen verglich, zog man daraus den voreiligen Schluss, dass lykische Kunst in nächstem Zusammenhang sei es mit Attika, sei es mit kleinasiatischer Kunst gestanden. Prachow weis't jenen Vergleich zurück, findet aber Stilähnlichkeit zwischen einzelnen Denkmälern archaischer lykischer Kunst und den einzelnen echtgriechischen Denkmälern in Attika, Samothrake, Thasos, Kleinasien. S–

kommt er zum Schluss, dass in Betreff des Kunstbetriebs das aegaeische Meer mit seinen Inseln und Küsten ein einzelnes Gebiet ausgemacht habe; dass wir aber bis jetzt nur einzelne Kunstdenkmäler aus verschiedenen Theilen dieses Gebiets und zwar von verschiedenen Entwicklungsstufen kennen. Andrerseits bilde das eigentliche Festland mit Sicilien und Unteritalien ein besonderes Kunstgebiet.

Auf diese Weise würde sich das Territorium, das von den Griechen besetzt war, in zwei Theile, in ein östliches und in ein westliches Gebiet theilen mit einigermassen verschiedener Civilisation. Interessant ist dieses Resultat der Untersuchungen von Prachow in sofern, als Kirchhof in seinen Studien über das griechische Alphabet zu einem und demselben Resultat kam, von dem aber Prachow nichts wusste. Kirchhoff sah sich auch genöthigt, eine Zweitheilung des archaischen Alphabets anzunehmen. Die Abbildungen sind bei Prachow höchst genau und stilgetreu. Sie werden nächstens auch in den deutschen Buchhandel kommen. Andrerseits werde ich ihn auffordern, auch seine Untersuchungen über die Composition der aeginetischen Giebelgruppen (nebst den Taf.) deutsch herauszugeben«[1].

II.

»Die von Fiorelli mit bekanntem Geschick und Eifer geleiteten Ausgrabungen gehen ihren sichern Gang. Sie erstrecken sich jetzt vornehmlich auf die, vom Stabianerthor aus genommen, rechts von der Strada Stabiana sich abzweigen-

1) Das Erscheinen des an erster Stelle erwähnten Werkes erwarten wir mit lebhafter Spannung. Auch eine Ausgabe des zweiten mit einem allgemein verständlichen Text wird erwünscht sein, um so mehr als auch bei uns schon Zweifel an der Richtigkeit jener Umstellung der Bogenschützen rege geworden sind. W.

den Strassen. Die Farben der Wände sind von blendender Frische, besonders frappirte mich in einem neu aufgedeckten Bäcker- und Müllerhaus die Seitenwand einer Treppe, deren gelb und rother Anstrich erst in diesen Tagen vom Maler fertig geliefert worden zu sein schien. In diesem Hause sind nun am Freitag Abend zwei Wandgemälde in einem kleinen Zimmer gefunden worden, die ich am Sonnabend früh mit Entzücken als der erste Fachgenosse sah [1]).

Die beiden Bilder befinden sich einander gegenüber, an den Langseiten besagten Zimmers und sind von ungleicher Erhaltung.

Das bestconservirte stellt einen Gegenstand dar, der zu den beliebtesten bei den Malern Pompeiis gehört zu haben scheint: die Findung der Ariadne durch Dionysos auf Naxos. Links ruht die Verlassene, auf ein reiches Lager, gelb mit blauer Decke darüber, gebettet, aber halb nackt, ein dunkel-violett-rothes Gewand um die Beine geschlungen; ihr Haupt liegt auf weichem Kissen, ihre Augen sind geschlossen. Zu ihren Füssen wird, wie auf den Darstellungen gerade dieser Scene nicht eben gebräuchlich, an dem sehr niedern Ufer das Meer sichtbar. Vor ihr steht, von einem braunen, nackten, nur mit einem Leibschurz um die Lenden gegürteten jugendlichen Satyr unterstützt, Dionysos in jugendlicher Schöne, reich bekleidet, auch mit hohen grünen, die Zehen der Füsse jedoch freilassenden Stiefeln versehen, welche volle Gewandung in dieser Liebesaffaire auch nicht just oft vorkommt; in seinem rechten Arm ruht ein Thyrsesstab. Hinter ihm und die rechte Seite des Bildes zum Theil einnehmend sind noch zwei Bakchantinnen sichtbar, deren eine ein Tympanon handhabt. Die Ausführung des Bildes ist merkwürdig un-

1) Das betreffende Schreiben ist vom 17. Mai d. J. W.

gleich. Während Dionysos und sein Gefolge in Bezug auf Auffassung, Ausdruck und Gesten sehr wenig zu wünschen übrig lässt, besonders der süssträumerische Blick, mit dem der Gott das Wesen betrachtet, welches er später zu seiner Gemahlin erheben wird, sehr tief und wahr ist, hat der Maler die Ariadne äusserst roh, derb, handgreiflich, ja zudringlich und frech vorne hingelegt; das Nackte ist nicht zu tadeln, der Faltenwurf aber in hohem Grade unangenehm und steif; auch ist sie gegen den in ihrer unmittelbaren Nähe stehenden Dionysos viel zu gross gerathen. Ich glaube nicht zu irren, wenn ich behaupte, der Pompejanische Apelles habe ein sehr gutes Original vor Augen gehabt, treu nach demselben auch den Gott und seine Umgebung gefertigt; als er aber an die Darstellung des halbnackten weiblichen Wesens kam, dachte er: »anch' io sono compositore« und malte nun nach seiner eignen Erfindung jene unglückliche Ariadne, nach seinem und vielleicht auch des Bäckermeisters derbem Goût. Vielleicht verdanken wir es auch der Vorliebe, mit der er dieses sein Werk mit einem grossen Aufwand von Farbe ausführte, dass diese Figur von allen auf beiden Bildern befindlichen weitaus am Besten erhalten ist.

Leider lässt die Conservirung des zweiten Gemäldes viel zu wünschen übrig. Es ist das bei Weitem interessantere und stellt ein Sujet vor, welches uns bis jetzt auf Pompejanischen Werken fremd war: »Demeter entsendet den Triptolemos«. Links sitzt auf hohem Throne die Göttin, eine hehre, majestätische Gestalt, in ihrem linken Arme ruht eine grosse Fackel, der rechte auf die Thronlehne gestützte Arm ist erhoben, die Hand ruht mit einem bedeutsamen, Nachdenken ausdrückenden Fingergestus ganz

eben so an der Schläfe, wie die der Arkadia auf dem allbekannten Gemälde mit Herakles und Telephos. Rechts neben ihr, etwas im Hintergrunde, steht in lieblicher Jugendlichkeit Proserpina, ein Blätterkranz schmückt ihr Haupt, hat doch die der Mutter wiedergegebene Anlass zur Freude! [2]) Sie hält in den Händen eine runde, plattdecklige Kiste, aus der etwa Ceres die wunderthätige Saat genommen [3]). Rechts ziemlich nach hinten steht der jugendliche, roth-braune, kräftig schöne Triptolemos. Er ist eben erst im Begriff seinen mit roth und grünem Korb versehenen Schlangenwagen zu besteigen, und schon entwirft er freudig, mit seiner Rechten weit ausholend, den in seinem Gewandbausch mit der Linken vor der Brust gehaltenen Samen auf die ganz rechts im Vordergrunde am Boden liegende weibliche Gestalt der Erde [4]). Dieselbe

2) Ist der Kranz nicht von Epheu, wie sonst bei der wiederkehrenden Kora? W.

3) Zu dieser Annahme scheint uns schon der Umstand nicht wohl zu passen, dass die Cista mit dem Deckel versehen ist. Auch dass Vasenbild in den Denkm. d. a. Kunst II, 9, 110, auf welchem man ein Mädchen mit einem Korbe auf den Triptolemos zueilen sieht, spricht, selbst vorausgesetzt, dass er sich um »une Heure, qui apporte à Triptolème un panier, qu'on doit supposer rempli de froment« (Stephani Compte rend. de la commiss. imp. arch. pour la. 1859 p. 96), handele, nicht dafür, sondern eher dagegen. Die Cista ist sicherlich keine andere als die der Mysterien der Demeter, und um so interessanter, als sie hier in der Hand der Kora gefunden wird. Vgl. zunächst Pausanias VIII, 37, 4. Mehr bei O. Jahn »Die Cista mystica« in Hübner's »Hermes« III, S. 326 fg. W.

4) Diese erscheint ebenso bekanntlich sehr selten und nur auf Werken der Griechisch-Römischen Kunst, dem Marmorrelief in Florenz (E. Braun Annali d. Inst. arch. 1854, p. 76), dem Braunschweigischen Onyxgefässe (Gerhard Ant. Bildw., Taf. CCCX); vgl. auch die Münze mit

hält ein gelbes Füllhorn. Ich habe mit dem Oberinspector Herrn de Pietra dasselbe lange betrachtet, und haben wir beide als völlig sicher ausgefunden, dass dasselbe keine Früchte und kein Getreide, sondern nur Grünes enthält, jedenfalls mit feiner Anspielung, sei es, dass dadurch die zur Zeit des Misswachses eingetretene Fruchtlosigkeit des Bodens ausgedrückt, oder, wie ich eher anzunehmen geneigt bin, angedeutet werden soll, dass, sobald der Genius seinen Samen ausschüttet, auch die Erde sich schon mit frischem Grün überzieht [5]. Die Ausführung ist recht gut, lässt sich sehr wohl mit der des Bakchischen Hofstaates auf dem andern Bilde vergleichen und ähnelt in Nichts der leidigen Ariadne. Der innere Zusammenhang der beiden Darstellungen fällt in die Augen: die Segnungen des Weingottes und der Göttin der Erdfrucht, beide gewährt nach Trauer und Noth. Aber auch die Wahrnehmung drängt sich wie von selbst auf, dass, wie in den weinreichen Gegenden des Vesuvs im Allgemeinen jener Triumph des Weingottes ein homogener Gegenstand sein musste, so für den Bäcker speciell diese durch die Göttin des Getreides gewährte Segnung besonderes Interesse hatte«.

dem Sardes'schen Triptolemos Tylos in d. Denkm. d. a. K. II, 10, 174. Ausserdem ist sie angedeutet auf dem der ersten Kaiserzeit angehörenden Wiener Silberdiscus (Mon. ined. d. Inst. III, 4, Arneth. Gold- und Silber-Mon.) W.

5) Hierüber wird schwerlich etwas Haltbares ermittelt werden können, wenn sich nicht mit Sicherheit entscheiden lässt, ob unter dem Grün sich junge, aufgrünende Keime der Saat befinden oder nicht. W.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

21. Juni. № 11. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 10. Juni.

Beiträge zur höheren Sprachwissenschaft,

von

H. Ewald.

I.

Wie man eine höhere Mathematik, Naturlehre u. s. w. von der für den nächsten Hausgebrauch bestimmten unterscheidet, ebenso sollte man längst die höhere Sprachwissenschaft von der für niedere Schulen bestimmten Grammatik wohl unterschieden haben. Nicht als ob beide sich einander entgegengesetzt oder gar feindlich wären: vielmehr wird was jene bewährtes gewinnt, schliesslich auch dieser zu gute kommen. Aber wie die Wissenschaft ihre ganz neuen schweren Aufgaben mit aller Anstrengung zu lösen sucht, so bringt sie allerdings vieles was über die von früheren Zeiten her überkommenen Arbeiten und Bemühungen und daher

auch über die früher allein herrschenden Einsichten als deren Früchte hinausgeht, und insofern auf einer gewissen Höhe verweilt von wo es sich indessen bald genug zur rechten Zeit auch in die uns allen nächsten tiefen Gegenden der menschlichen Einsicht und gemeinen Lehre herabsenken kann. So ist jetzt längst eine höhere Sprachwissenschaft gegründet: und es kommt nur darauf an deren Aufgaben eben so unverdrossen als richtig weiter zu verfolgen. Wir fassen diesmal zu einer solchen höheren Betrachtung eine besonders wichtige Erscheinung in dem Semitischen Sprachstamme auf, zunächst dazu durch eine Schrift über sie bewogen [1]). Eine Druckschrift von 216 Seiten über einen so besondern und in einiger Hinsicht so schwierigen Gegenstand wie der sogenannte *status constructus* im Semitischen beweist jedenfalls dass die von unsrer heutigen Sprachwissenschaft angeregten Fragen die Geister immer tiefer beschäftigen und manchem unter den Gelehrten des Tages keine Ruhe mehr lassen. Wir müssen es dabei für einen Vortheil halten dass solche etwas schwerer zu lösende Fragen wieder mehr dem Semitischen und allen übrigen ausserhalb des weiten Mittelländischen liegenden Sprachgebieten gewidmet werden, da die einseitige Beschäftigung allein mit den dem Sanskrit verwandten Sprachen in unsern letzten Jahrzehenden sichbar weit mehr geschadet als genüzt hat und bei allem Eifer welchen sie entwickeln mag dennoch nie ein genug sicheres Ziel erreichen kann. Nur wenn unsre Sprach-

1) Wesen und Ursprung des *status constructus* im Hebräischen. Ein Beitrag zur Nominalflexion im Semitischen überhaupt von Dr. *Fried. Wilh. Mart. Philippi* Privatdocent der orientalischen Sprachen an der Universität Rostock. Weimar, Hermann Boehlau, 1821. In 8.

wissenschaft gerade die uns und unsern nächsten Sprachen entfernter stehenden Sprachstämme ihrem ganzen Wesen und ihrer Geschichte nach vollkommner erkannt haben wird, wird sie mit einer höhern Gewissheit und Klarheit von welcher sie heute kaum schon eine rechte Ahnung hat, zu den uns zunächst umringenden Sprachgesichtern zurückkehren, um diese noch viel näher zu betrachten und richtiger zu schätzen als sie bisjetzt gewohnt ist. Gehen nun unsre heutigen Erforschungen vorzüglich auch bei diesen von uns weiter abliegenden Sprachgebieten bis in die durch Zeitalter und Ursprung entferntesten Sprachbildungen zurück, so kann uns auch das, wenn es richtig begonnen und beharrlich fortgeführt wird, zu einem Vortheile ausschlagen, weil man ohne Sicherheit in allen den Urdingen und Anfängen der Sprachen sogar das uns allernächst Vorliegende nicht mit dem wünschenswerthen Nuzen zu behandeln vermag. Eine genaue Kenntniss und sichere Würdigung des Standortes auf welchem heute alle Sprachwissenschaft steht, ist daher namentlich für jüngere Männer welche sich hier versuchen wollen, das erste Erforderniss: und diesem steht als ein ebenso nothwendiges die Freiheit des Geistes von allem einseitigen Schulwesen zur Seite, da dieses den wissenschaftlichen Blick welcher bei den uns heute beschäftigenden neuen schwierigeren Fragen ganz besonders geschärft sein muss nur abstumpfen kann.

Die heutige Sprachwissenschaft hat unter anderm die zwei grosse Hauptsätze erkannt: 1) dass jeder Sprachstamm den wir geschichtlich unterscheiden können, von Anfang an bestimmte Eigenthümlichkeiten hat von denen sich auch seine spätesten Zweige schwer oder gar nicht

losreissen können; 2) und dass trozdem hinter allen Sprachstämmen eine noch höhere und ältere Gestalt aller menschlichen Sprache steht, welche allmälig sicher wieder só aufgefunden werden kann dass man das wechselseitige Verhältniss des einen zum andern von vorne an klar zu überblicken vermag. Im besondern wissen wir jetzt deutlich genug dass der Semitische Sprachstamm keineswegs der älteste aller oder vielmehr der aller ältesten menschlichen Sprachart am treuesten gebliebene ist, wohl aber von seinem ersten Anfange an gewisse durchgreifende unverrückbare Eigenthümlickeiten hat. Zu diesen gehört nun auch der *status constructus* oder vielmehr die Wortkette, welchen Namen der Vf. der neuen Schrift am besten beibehalten hätte, da er deutsch, kurz, und dazu sachlich den besten Gegensatz zu der Wortzusammensetzung ausdrückt welche dem Mittelländischen ebenso eigenthümlich wie dem Semitischen fremd ist. Zwar hat sich in den einzelnen Semitischen Sprachen und schon in den ältesten welche wir geschichtlich kennen die Wortbildung um diese Wortkette herum sehr verschieden ausgebildet: allein fassen wir alles was dahin gehört noch richtig und genau zusammen, so können wir auch da den ursprünglichen Zusammenhang und die aus diesem hervorgegangenen Verschiedenheiten noch sicher genug wiederfinden. Und dieses alles zusammen wäre etwa dás was man unter den Begriff des Ursprunges des Semitischen *stat. constr.* bringen könnte, über welchen unser Vf. in dem Haupttheile seiner neuen Schrift reden will.

Wir bedauern jedoch sagen zu müssen dass der Vf. seinen Gegenstand sehr unrichtig und verkehrt abhandelt. Scheint dies Urtheil hart

zu sein, so bedenke man dass die Arbeiten und Mühen der Wissenschaft am Ende wenig nüzen wenn ihre Früchte verachtet oder auch nur durch mancherlei Bemühung in den Hintergrund gedrängt und verdunkelt werden. Was auf wissenschaftlichem Wege durch klare Beweise erwiesen ist, darf nur auf demselben Wege durch noch klarere Beweise oder auch durch neuentdeckte Thatsachen widerlegt werden: zu dem wissenschaftlichen Wege aber gehört es vor allem dass man nicht von einer unbewiesenen Voraussetzung ausgehe und troz entgegenstehender Wahrheiten bei ihr bleibe; sodann, dass man die schon gegebenen Thatsachen welche zur Lösung der Frage dienen sämmtlich richtig beachte und in ihren Zusammenhang stelle Geschieht dies nicht, so kann man nur auf einen Irrweg gerathen und über die Dinge welche man erklären will wohl vielerlei vernünfteln aber nichts Treffendes und noch weniger etwas Erschöpfendes sagen.

Nun ist die Voraussetzung von welcher der Vf. bei allen seinen Betrachtungen und Urtheilen ausgeht und die er starr festhält, nichts als die Meinung das Arabische sei so wie wir es jezt kennen, die älteste und am ursprünglichsten erhaltene aller Semitischen Sprachen. Dies war die Meinung einiger Holländischer Orientalisten des vorigen Jahrhunderts, und ist jezt nachdem sie in unserm Jahrhunderte längst vollkommen widerlegt war erst in den lezten Zeiten von einigen Gelehrten unter uns wieder aufgenommen. Diese haben aber eine solche Ansicht nie ernstlich bewiesen, sondern immer damit nur wie gespielt; man spielt aber mit gelehrten Meinungen wenn man sie entweder nur beiläufig hinwirft ohne sie in ihrer ganzen

Schwere aufzustellen nnd richtig zu würdigen, oder wenn man sie mit fremdartigen Bestrebungen vermischt und rein eigensinnige Absichten mit ihnen verfolgt; wie das hier deutlich geschehen ist. Auch unser Vf. gibt nicht etwa selbst einen neuen Versuch das noch nie gründlich Bewiesene endlich allseitig einleuchtend zu machen: er bleibt vielmehr im Vertrauen auf die Meinungen und Wünsche von ein paar neuesten Gelehrten bei der blossen Voraussetzung stehen, obgleich er wusste dass ihre Grundlosigkeit von anderer Seite schon stark genug und mit vielen Gründen nachgewiesen war. Wir bemerken jedoch an dieser Stelle dass der Vf. bei der Abfassung seiner Schrift die dritte sprachwissenschaftliche Abhandlung des Unterz. offenbar noch nicht kannte [2]): und da in ihr diese Frage wiederholt in Betracht gezogen ist, können wir hier um so leichter zu andern Erwägungen übergehen.

Die Thatsachen nämlich welche der Vf. zwar sehr ausführlich bespricht aber nur von jener grundlosen Voraussetzung aus betrachtet wissen will, sind diese. Wir finden in den übrigen Semitischen Sprachen und zwar gerade in solchen welche für uns heute die ältesten sind,

2) Wir sezen, da von dieser Abhandlung auch in den Nachrichten noch keine Rede war, ihre nähere Aufschrift hieher: Abhandlung über die geschichtliche Folge der Semitischen Sprachen. Dritte sprachwissenschaftliche Abhandlung von H. Ewald. Aus dem XVten Bande der Abhandlungen der K. Ges. der WW. zu Göttingen. Göttingen in der Dieterichschen Buchhandlung, 1871. 63 S. in 4. — Auch bemerken wir hier dass S. 36 Z. 6 v. u. خَدَم, S. 44 Z. 12 anderswohin, S. 62 Z. 7 v. u. ihnen für ihm zu lesen ist.

noch eine Menge von klaren Anzeichen dass die Arabische Wortbildung in Bezug auf die Wortkette und alles was mit dieser enger zusammenhängt nicht die älteste sein kann. Sie bestehen in kurzen aber scharfen Lauten welche sich dem ersten der zwei durch die Wortkette aufs engste zusammentretenden Nennwörter anhängen, und die auch ihrer Urbedeutung nach den Begriff der Wortkette als der engsten Beziehung des ersten zum Sinne des zweiten noch ganz frisch an sich tragen. Als ein solcher Laut findet sich das *i* sehr verbreitet; dass dieses jedoch nur aus einem ursprünglichen bezüglichen Fürwörtchen *ja* oder *jo* verkürzt sei, beweist sein Wechsel mit *a* oder *o*. Es sind dies die Bindevocale des *stat. constr.*, wie man sie früher wohl nannte: der Name eines Bindevocales ist aber ansich ein noch ziemlich unklarer, und wurde von den früheren Gelehrten nur deshalb eingeführt weil man die Bedeutung und den Ursprung dieser Laute nicht kannte und nur im Allgemeinen richtig fühlte dass sie das erste Wort enger mit dem zweiten verbinden wollen. Sie sind aber vielmehr ein denkwürdiges Ueberbleibsel der ältesten Semitischen Sprache, und haben sich am wenigsten im Aramäischen, etwas mehr im Hebräischen und Phönikischen wiewohl in diesen theilweise nur allerthümlich, am meisten und durchsichtigsten im Aethiopischen erhalten; wobei wir beiläufig bemerken dass der Phönikische Laut *u* in Fällen wie in der Wortkette des Eigennamens *Hasdr-u-bal* nur entweder wie sonst so oft im Phönikischen mit *ô* oder vielleicht nur von einer andern Seite aus mit *i* wechselt. Die Stufe des allmäligen Verschwindens dieser Laute nach der ebengenannten Reihe der einzelnen Se-

mitischen Sprachen ist ganz so wie wir die geschichtliche Folge dieser auch sonst kennen; denn das Aramäische stellt uns heute die älteste Gestaltung alles Semitischen dar; das Phönikische und Hebräische ist verhältnissmässig schon jünger; das Aethiopische seinerseits ist als Schriftsprache wohl später als das Hebräische und Phönikische, aber bedeutend älter als das Arabische, und hat vieles Alterthümliche treuer bewahrt. Dieses Arabische selbst ist dagegen in allen jenen Bildungen so vollkommen neu umgestaltet dass es von jenen Lauten an ihrer Stelle gar keine Spur mehr an sich trägt. Wenn aber unser Vf. meint jene Laute sollten, wenn das ihr Ursprung sei, nicht am Ende des ersten sondern zu Anfange des zweiten Wortes ihre Stelle haben: so ist das eine vergebliche Forderung, weil die Laute gerade umgekehrt das erste zum zweiten hinüberziehen sollen; wie dasselbe ja im Neupersischen eintrifft. Oder wenn er bezweifeln will dass es in der Semitischen Urzeit ein bezügliches Fürwörtchen des Lautes *ja* gegeben habe, obgleich dieses noch im Amharischen sich findet: so wird das schon durch den uranfänglichen Zusammenhang des Semitischen mit dem Mittelländischen widerlegt. Aber auch die Endung des bezüglichen Beschreibewortes aus —ִי (wörtlich *welcher von* ....) entstammt ja derselben Quelle.

Alle diese Thatsachen verkennt jedoch der Vf., bloss weil sie von seiner Voraussezung aus keinen Sinn und keinen Grund haben. Weil die Laute selbst aber um welche sich hier alles drehet doch nicht abgeläugnet werden können, unternimmt er es vielmehr sie von seiner Voraussezung aus zu deuten und so in ihnen sogar eine Stüze für diese zu suchen. Er meint diese

Laute welche so am Ende des ersten Wortes der Wortkette kleben, seien eben Ueberbleibsel der drei Vocale der Arabischen drei Casus, eines Nominativs also, eines Genitivs oder eines Accusativs. Allein wollte man sich dies ernstlich denken, so wäre völlig unverständlich warum immer nur das erste, nie aber das zweite Wort der Wortkette noch auch irgend sonst ein allein stehendes Nennwort diese Nachlaute hätte. Im Arabischen hat aber jedes Nennwort, an welcher Stelle des Sazes es seine Reihe haben mag, stets seinen bestimmten Casusvocal; warum also solche Laute in allen jenen anderen Semitischen Sprachen bloss dem ersten einer Wortkette ankleben sollten ist unfindlich; und dieses noch aus einer andern Ursache umso mehr. Das erste Wort einer Wortkette wird nämlich im Arabischen ebenso wie in jeder andern Semitischen Sprache rascher und abgekürzter gesprochen als das die Wortkette schliessende: demnach würde man am wenigsten gerade bei ihm Laute erhalten finden welche sich nirgends sonst noch halten konnten. Und so führt uns der Augenschein doch immer wieder darauf zurück dass diese schliessenden Laute nichts anderes bedeuten können als was sie bedeuten, die Aufnahme des ersten Wortes in den Sinn der Wortkette. Auch macht der Vf. nicht einmal den Versuch zu zeigen dass jeder dieser Laute da wo er sich findet einem der drei Arabischen Casusvocale entspreche: während es doch schon an sich eine ganz rohe Sache wäre wenn die drei Arabischen Casusvocale durchaus nur willkürlich so oder so lautend sich erhalten hätten, und demnach gar keine Casusvocale mehr wären. Weder die Romanischen Sprachen in ihrem Zerfalle aus dem Lateinischen noch das

Neuarabische kann ein solches rein willkürliches Verfahren beweisen.

Da jedoch diese Laute sich im Aramäischen Hebräischen und Phönikischen nur sehr zerstreut und für gewöhnliche Augen theilweise sogar schwer erkennbar erhalten haben, so scheint da für die willkürliche Betrachtung, wenn man etwa solche liebt, heute ein sehr freies Feld sich zu öffnen. Allein was will man mit dem Aethiopischen machen welches noch ganz durchgängig jene alterthümliche Bezeichnung der Wortkette erhalten hat und sich dadurch von dem Arabischen welchem es sonst so nahe steht vollkommen unterscheidet? Inderthat können solche Gelehrte welche in unsern Tagen so untreffende Meinungen aufstellten und unsern Vf. auf ihren irrthümlichen Weg hinführten, das Aethiopische gar nicht recht gekannt noch genau berücksichtigt haben. Allein unser Vf. will nun einmal von seiner Voraussezung aus auch das dieser durch und durch widerstrebende Aethiopische bezwingen: so versucht er S. 154ff. seinen Bau unter dies Joch zu bringen. Er verliert sich aber in ein so offenbares blosses Vernünfteln und reimloses Vermuthen dass es kaum der Mühe werth ist seine Worte darüber unsern Lesern vorzulegen. Wo statt klarer Einsicht und Erkenntniss ein bloss umherschweifendes anhaltsloses Vermuthen und statt nüzlicher Vernunft das bekannte und leider in der neuesten Zeit wieder so allgemein verbreitete Uebel der Vernünftelei einreisst, da hört alle Strenge ja aller Ernst der Wissenschaft auf; und immer ist ein solches Ueberhandnehmen des willkürlichen Vermuthens und der grundlosen Einbildung schon an sich ein Merkmal dass der gelehrte Mann mitten indem er ein Forscher

und Ergründer von Wahrheiten sein will vielmehr nur noch ein irrender Redner ist. Aber eben dahin muss am Ende jede grundlose Voraussezung führen, wenn man sie troz alles Widerstrebenden dennoch durchführen will.

Fassen wir alles zusammen, so müssen wir sagen der wahre Nuzen dieser für ihren Inhalt sehr langwierigen Schrift liege därin dass sie nun für jeden, dessen Erkenntniss heute noch nicht so weit reichte, den deutlichsten Beweis gibt bis zu welchen Verkehrtheiten zulezt der irrthümliche Weg führe welchen man hier einschlagen konnte. Dass dieser Beweis nun so augenscheinlich für Jedermann gegeben ist, kann als Vortheil gelten: und insofern heissen wir ja manche Schrift heute willkommen welche für den Gegenstand selbst den sie abhandeln will unfruchtbar bleibt. — Was aber die Abhandlung des Vfs über das Wesen des *stat. constr.* betrifft welche er in der kleineren ersten Hälfte seiner Schrift bis S. 83 mittheilt, so bedauern wir auch über sie kein besseres Urtheil fällen zu können. Der Vf. meint dieses Wesen am besten aus den Beschreibungen und Kunstwörtern erkennen zu können welche die Islâmischen Schriftsteller in den noch aus der Blüthezeit aller Islâmischen Wissenschaft abstammenden Werken über Arabische Sprache niedergelegt haben. Die Vorzüge aber auch die grossen Mängel dieser Arabischen Sprachgelehrten des Mittelalters haben wir oft auch in den Gel. Anzeigen hervorgehoben: wir müssen uns aber wundern dass noch heute ein Gelehrter unter uns sie auch in ihren Beschränktheiten und Unzureichendheiten überschäzt. Gerade auch in der Lehre von der Wortkette kann man das Unzureichende und Beschränkte welches diesen

mittelalterlichen Grammatikern anklebt, sehr deutlich erkennen. Diese Sprachgelehrten hatten bekanntlich von dem Wesen und Umfange aller Semitischen Sprachen gar keine klare Vorstellung; sie verglichen höchstens bisweilen die Neupersische Sprache weil viele von ihnen selbst Perser waren: aber diese konnte ihnen znm genaueren Verständnisse der Arabischen wenig nüzen. Da nun das Arabische, wie es überhaupt in seinem Sazbaue weit geringere Freiheit und Mannichfaltigkeit als die übrigen Semitischen Sprachen ausgebildet hat, die Wortkette bei weitem nicht so frei gebrauchte und so weit ausdehnte als (das Aethiopische ausgenommen) die übrigen Semitischen Sprachen, so versteht sich leicht dass wer die Anschauungen und Lehren dieser Arabischen Grammatiker des Mittelalters über den *stat. constr.* zu Grunde legt, damit für unsre heutige Wissenschaft bei weitem nicht ausreicht. Hinzukommt dass jenen Gelehrten der geschichtliche Sinn in den Sprachforschungen gänzlich abging: und leider ist es auch bei unserm Vf. dieser Mangel welcher seine Meinungen über das Wesen der Semitischen Wortkette drückt.

Wir enthalten uns auch die mancherlei zwar mehr oder weniger neuen aber völlig verfehlten Ansichten hier näher zu beurtheilen welche der Vf. im Verlaufe seiner Schrift besonders bei seiner Abhandlung über den Ursprung der Wortkette und der Semitischen Casusbildungen aufstellt. Hat man einmal das Wesen einer weitgreifenden geschichtlichen Erscheinung nicht richtig gefasst, so drängen sich einem um sie herum leicht hundert scheinbar sehr wol mögliche Ansichten auf, welche doch näher betrachtet gar keinen Grund haben und so so-

gar in ihrer nackten Möglichkeit alsbald wieder vollkommen verschwinden müssen. Sie weitläufig unsern Lesern vorzuführen und vor ihren Augen zu widerlegen, scheint unnöthig.

Uebrigens aber wünschen wir dass niemand alle solche Erforschungen deswegen weil sich heute noch so sehr vieles theils schwächliche und ungesunde theils sogar schädliche Wesen in sie eindrängt, etwa gar verachten möge. Sie sind vielmehr unentbehrlich, wenn in unsern Tagen endlich eine wahrhaft nüzliche und geschichtlich zuverlässige Vorstellung über das Wesen und die Entwicklung aller menschlichen Sprache sich ausbilden soll. Und so hoffen wir dass sie troz aller Hindernisse welche man ihnen entgegenwirft, ihr Ziel immer vollkommen erreichen werden.

Ueber Fränkische Annalen aus dem Kloster St. Maximin.

Von

G. Waitz.

Der Aufmerksamkeit unserer Historiker hat sich bisher, soviel ich sehe[1], ein Exemplar Fränkischer Annalen entzogen, das in mehr als einer Beziehung Beachtung verdient. In dem Jahr 1844 publicierte der Baron von Reiffenberg in dem Compte-rendu des séances de la commission royale d'histoire Tom. VIII (Bruxelles) S.

1 Weder Abel in den Jahrbüchern Karl des Gr., noch Wattenbach, oder Giesebrecht in seiner Abhandlung über die Fränkischen Königsannalen haben es benutzt. Ich stiess darauf, als ich für andere Zwecke den betreffenden Band des Compte-rendu durchsah.

168—192 Annalen von 710—811, aus einer Handschrift der Brüsseler Bibliothek, die in diese im Jahr 1837 aus der Van Hulthems übergegangen war, Nr. 17350 ff [1]. (ebend. VII, S. 241; vgl. Inventaire des manuscripts de l'ancienne bibliothèque royale des ducs de Bourgogne S. 348). Sie enthält Abschriften aus einem Codex von St. Maximin zu Trier, aus dem erst Alex. Wilthem Auszüge machte, die dann Nelis Veranlassung gaben eine Abschrift fertigen zu lassen, die er selbst, wie er am Ende bemerkt, collationierte (Relegi et emendavi hac die 20. Februarii 1783). Er (oder, wie Reiffenberg S. 167 sagt, Wilthem) notiert zu Anfang: Ex antiquissimo codice monasterii S. Maximini, scripto, ut apparet ex litteris, tempore Caroli Magni. Allein für sich wird dieses Zeugnis vielleicht nicht schwer wiegen; dass es sich aber um eine alte Handschrift handelt, dürfen wir doch schon hiernach annehmen.

Die Ausgabe, und wahrscheinlich schon die Abschrift, lässt manches zu wünschen übrig; einzelnes hat der Herausgeber berichtigt (einiges auch ohne Grund), anderes lässt sich nach Vergleichung verwandter Annalen verbessern (z. B. 785 S. 179 statt: 'usque Gubardungawi' lies: 'u. in Bardungawi'; 787 S. 181 statt 'super fluvium Tschibi, Tassilo' lies 's. f. Lech, ibi Tassilo'; 802 S. 186: statt 'Orlana' lies 'Ortona' [2]; 810 S. 191: statt 'Verasicus' l.: 'Arsafius').

Die Annalen, welche gerade ein Jahrhundert Fränkischer Geschichte umfassen, fallen mit keinem der bisher bekannt gewordenen Werke zusammen, zeigen aber mit mehr als einem Ver-

1 Bethmann hat diese Nummer in sein Verzeichnis, Archiv VIII, nicht aufgenommen.

2 Vgl. 786 S. 180 wo 'Tul' statt 'Lul' gelesen ist.

wandtschaft, sind von Bedeutung für die Geschichte der Karolingischen Historiographie, gewähren auch einige neue für die Geschichte selbst nicht unwichtige Nachrichten. Reiffenberg hat sie Maximiniani genannt, und vorläufig mag der Name beibehalten, hier Max. als Bezeichnung gebraucht werden.

Der Anfang zeigt die nächste Verwandtschaft mit dem Chronicon Moissiacense. Der Text beginnt: Pippinus princeps multa bella gessit contra gentes plurimas, wie dort, SS. I, S. 288, und die Uebereinstimmung geht bis 741, zum Tode Pippins. Es fehlen aber nicht blos alle von Pertz in [ ] eingeschlossene Stücke, die nur die eine Handschrift (Paris Nr. 4886, Pertz 1) hat, sondern auch anderes was sich speciell auf Aquitanische Verhältnisse bezieht (S. 290: Sema — transmittit; S. 291. A. 732: Abderaman — Francia; 734: His temporibus Jussuf — depraedat; S. 292: Posthaec — Franciam, und einiges andere vorher). Dorr (De bellis Francorum cum Arabibus gestis. Regim. 1861. S. 43 ff.) hat eben diese Stücke als Theile eines älteren Chronicon Aquitanicum ausgeschieden; und wir erhalten hier eine Bestätigung, dass sie ursprünglich nicht zu der Darstellung Fränkischer Ereignisse gehörten, die die Grundlage des Chronicon ausmacht. Dagegen finden sich die beiden Sätze 711: Aquae inundaverunt valde, und 725 über die Einnahme von Autun durch die Sarracenen, bis zu den Worten: Kalendas Septembris, die Dorr für, von dem Chronicon verschiedene Annales Aquitanici in Anspruch nehmen will, die aber hiernach schon in jenem dem Chron. Moiss. zu Grunde liegenden Werke vorhanden gewesen sein müssen. — Dass dies nicht über 741 hinausging, ist wahrscheinlich,

da mit diesem Jahr die nähere Verwandtschaft der beiden Texte vollständig aufhört. Es hat sich auch eine Bearbeitung der allgemeinen und fränkischen Geschichte in Anschluss an Bedas Chronik eben bis zu diesem Jahr in einer Leidener Handschrift (Scaliger 28) erhalten, die schon früher als Grundlage des Chron. Moissiacense erkannt ist; s. Jaffé in Mommsens Ausgabe des Cassiodor S. 677. Ob der Anfang in dem Codex von St. Maximin gefehlt oder Nelis die Abschrift des älteren Theils für überflüssig gehalten hat, wird sich jetzt nicht entscheiden lassen. In dem was erhalten zeigt der Text mit dem des Chr. Moissiacense, wie er gedruckt vorliegt, genaue Uebereinstimmung auch in kleineren Dingen (S. 290 Z. 26: quendam mit Cod. 1; Z. 12: die Form Ragngario). Manchmal ist die Lesart besser, namentlich wo die Ausgabe sich nur auf eine Handschrift (oder Martenes Ausgabe derselben) stützen kann (z. B. S. 291 Z. 12: Vinciaco; Z. 25: Theodericum statt Theodosium). Die Formen sind alterthümlich (wie Frigiones, Austrea, ultra Ligere; inluciscente). Erhebliche Abweichungen sind nur 716 S. 291 statt 'de exercitu suo': 'de sodalibus suis'; Z. 24 nach 'reddidit' der Zusatz: sed non diu in regno resedit; Z. 46 steht 'His diebus' und der Beisatz 'minor' zu Gregorius; statt 'magnis muneribus' heisst es: 'muneribus magnis et infinitis'. Unmittelbar darauf gehen aber die beiden Texte aus einander, indem Max. nach 'misit' (S. 291 Z. 1) fortfährt: quo facto patrato ut a partibus imperatoris recederet et Romano consulto (l.: consulato) praefato principi Carolo sanciret; Worte die sich unmittelbar an Fredegar. cont. anschliessen, dem auch die folgenden: ipse autem princeps magnifico honore ipsam legationem recepit,

munera pretiosa contulit atque cum suis nuntiis remisit Romae, näher entsprechen als der amplificierte Text des Chron. Moiss. Mit diesem stimmt zuletzt noch im wesentlichen die Angabe über Karls Tod ('regnavit — Novembris' fehlt) und die Vertheilung der Länder unter seine Söhne (nach 'Burgundiam' ist 'Neustriam' eingefügt).

Dann folgt in Max. eine ziemlich ausführliche Geschichte Pippins und seiner Beziehungen namentlich zu den Päpsten und Langobarden (S. 171—176), die mit dem was Moiss. hierüber enthält keinerlei nähere Verwandtschaft zeigt, die vielmehr grossentheils direct aus dem Liber pontificalis entlehnt ist. Vorangeht eine Stelle aus Pauli hist. Langobardorum VI, 48, und eingefügt sind einzelne Sätze aus Ann. Laur. maj., aus 746 der Bau des Klosters 'in Zirapti monte', aus 749 die Sendung Pippins nach Rom, aus 748 über Grifo und Tassilo, aus 755: Misitque rex Pippinus Folradum abbatem cum papa Stephano ad recipienda propria ecclesiae — et salvum pontificem Romae perduxit.

Aber schon vorher finden sich Nachrichten anderer Art, kurze annalistische Notizen, die sich auch in dem Chr. Moiss. nicht finden, dagegen die nächste Verwandtschaft zeigen mit den sogenannten Ann. Mosellani (SS. XVI) und Laureshamenses (SS. I).

Die erste Stelle der Art ist dem früheren Theil eingefügt, 721: Jactavit Eodo Sarracenos de terra sua, wo jene lesen: Ejecit Heudo Saracinos de Aequitania. Daran reiht sich: A. 737. ab inc. D. Carolus pugnavit contra Sarracenos in Gotia in loco qui dicitur Birra. Jene Annalen haben die letzte Angabe nicht, die den Ann. Laur. maj. entlehnt sein kann, dagegen den hier

weggelassenen Zusatz: dominica die. In die vorher erwähnte längere Geschichte aus dem Liber pontific. ist der Satz eingeschoben: A. inc. D. 750. Pippinus elevatus est in regem ac postea regnavit annis 18, dessen erster Theil den angeführten Annalen zu 752 entspricht. — Von 754 an folgt Max. diesen genauer, doch ohne alles aufzunehmen was sie geben oder sich ganz wörtlich an ihren Ausdruck zu binden, einzeln auch mit Zusätzen. So heisst es

Ann. Mos. (Laur.).	Ann. Max.
761. ... Et rex Pippinus fuit in Wasconia cum exercitu suo usque ad Limodiam civitatem. 762. Pippinus fuit in Wasconia et conquisivit Bidurgam....	761. Rex Pippinus in Wasconia, et conquaesivit Lemovicam civitatem, Clarmontem cremavit, et alio anno conquaesivit civitatem Bituricas.

Der Zusatz über Clermont kann aus den Ann. Laur. maj. genommen sein, obschon diese nicht speciell vom Verbrennen dieser Stadt sprechen, wie es der Cont. Fredegarii und aus ihm die Ann. Metenses thun.

Die Uebereinstimmung mit jenen Annalen geht bis zu dem Jahre 785, wie die hier mitgetheilten Stellen zeigen mögen:

Ann. Mos. (Laur.).	Ann. Max.
780. Domnus rex Karolus perrexit iterum in Saxonia cum exercitu et pervenit usque ad fluvium magnum Albeha; et Saxones omnia (omnes L) tradiderunt se illi, et omnia accepit in hospitate tam ingenuos quam et lidos; divisitque ipsam patriam inter episcopos et presbyteros seu et abbates, ut in ea baptizarent et praedicarent; necnon et Winidorum seu et Fresionum pa-	780. Dominus Carolus in Saxonia pervenit usque ad Albiam fluvium, et Saxones omnes tradiderunt se illi, et ille divisit ipsam patriam inter episcopos et abbates atque presbyteros baptizare et praedicare, et tunc Winidorum atque Fresonum multitudo magna credere se Domino sposponderunt.

ganorum magna multitudo ad eum conversa est ....

782. Habuit Karolus rex conventum magnum exercitus sui in Saxonia ad Lippiabrunnen et constituit super eam comites ex nobilissimis Saxonum genere ....

783. Obiit Hildegardis regina pridie Kal. Maj., et Berta obiit 6. Id. Jun. ....

784. Iterum Karolus perrexit in Saxonia cum exercitu per duas vices ....

785. Rex Karlus demoratus est in Saxonia ad Heresbrug .... et edificavit ipsum castellum a novo, sed et basilicam ibidem construxit .... et tunc demum perrexit trans fluvium Wiseraha et pervenit usque in Bardungawe. Cumque Saxones se illi dedissent, christianitatem, quam pridem respuerant, iterum recipiunt. Paceque patrata nulloque rebellante postquam rex rediit domum suam, Widuchind, tot malorum auctor ac perfidie incentor, venit cum sociis suis ad Attinacho palatio, et ibidem baptizatus est, et domnus rex suscepit eum a fonte ac donis magnificis honoravit.

782. Carolus iterum cum Saxonibus conventum magnum habuit ad Lippiaebronnom, et constituit super eos comites ex nobilibus *Francis atque* Saxonibus.

783. Obiit Hiltegarte regina pridie Kalendas Maji, et Bertha regina obiit in Idibus Iunii.

784. Carolus duobus vicibus cum exercitu in Saxoniam.

785. Carolus cum Francis civitatem Eresburc a novo construxit et basilicam ibi fecit, et inde perrexit usque in Bardungawi, et multi ex Saxonibus ibi christiani facti sunt; indeque domi reverso rege, Widuchin Saxo, magnorum malorum auctor, *in Saxoniam* venit ad dominum regem in Attiniaco palatio et ibi baptizatus est et a domino rege a sacro fonte susceptus est et multis donis honoratus est.

Die durch den Druck hervorgehobenen Worte sind Zusätze, aber offenbar keine Verbesserungen, des Autors; alles übrige stellt sich als Wiedergabe oder Auszug jener Annalen dar.

Nach diesem Jahr, wo die Ann. Mosellani und Laureshamenses sich trennen, bleibt Max. wenigstens noch ein Jahr in Verbindung mit diesen. Ist auch der Ausdruck bei der Verschwö-

rung gegen Karl etwas abweichend: quod Domino revelante et protegente regem minime latuit et ultionem condignam in eis exercuit, so kann Max. das doch wohl aus dem Bericht der Laurish. gemacht haben.

Anderes ist zweifelhafter oder kann gar nicht auf diese Quelle zurückgehen. Und auch schon vorher finden sich Nachrichten, die einen andern Ursprung haben. So 764: et Tassilo de Aquitania clam se de hoste subtraxit; 767 über die Synode welche Pippin hielt; 768 die eingefügten Daten von Pippins Tod und Karls Erhebung, 769 über Karls ersten Zug nach Aquitanien. Diese Nachrichten finden sich in den Ann. Laurissenses majores, und sind wohl jedenfalls auf diese zurückzuführen.

Anders verhält es sich mit späteren Stellen, gleich 787: Carolus Romam venit et Beneventum Sancto Petro reddidit. Ibique missi Tassilonis Arn episcopus et Hunricus abba pro pacis foedere venerunt inter Carolum et Tassilonem, et rex inde rediens, coadunato exercitu magno super fluvium Lech, ibi Tassilo venit ad regem et Theodonem filium suum dedit ad obsidem. Et Grimoldum per terribile sacramentum constituit ducem super Beneventum, et in Wirtzipurc translationem sancti Ciliani martyris celebravit.

Die durch den Druck hervorgehobenen Stellen finden sich überhaupt nicht oder wenigstens nicht in solcher Fassung in irgend einer uns bekannten Gestalt fränkischer Annalen.

788 schliesst sich an die Ann. Laur. maj. an; die Lücke, welche diese bei der Schlacht zwischen Avaren und Franken in Beziehung auf den Ort lassen, wird hier aber ausgefüllt: in campestribus Foroiuli.

790: Cum pace et sine bello moratus est Carolus in Wormacia, ist allerdings nur ein anderer Ausdruck für das was sowohl die Ann. Lauresh. wie Laur. maj. enthalten.

791 aber heisst es abweichend von allen andern Annalen:

Perrexit dominus Carolus cum Francis et Saxonibus, cum Bajowariis et Alamannis et cum caeteris populis suis in Pannoniam ultra Omundesthorf et cum triumphi gloria rediit et hiemavit in Regantsburc.

Das hier genannte Omundesthorf ist gänzlich unbekannt; zur Vergleichung bietet sich nur eine Stelle der Ann. Fuldenses 890 (SS. I, S. 407) dar, wo es heisst, Arnulf habe 'Pannoniam proficiscens' mit dem Mährenfürsten Zwentibold eine Zusammenkunft gehabt 'in loco qui vulgo appellatur Omuntesberch'. Vgl. über die Unsicherheit der Lage Dümmler, Ostfränkisches Reich II, S. 238 N. 30.

Am Schluss des Jahres heisst es:

Engibrammus (l.: Engilramnus), Wiemodus, Sindpertus episcopi obierunt.

Den ersten und letzten nennen auch die Ann. Lauresh., Wiomodus kommt weder hier noch in den Ann. Laur. maj. vor; ich weiss seine Heimath nicht zu bestimmen; Weomadus von Trier † 776 und kann schwerlich durch Versehen hierher gerathen sein.

Weiter heist es 792:

Carolus rex synodum magnam habuit in Reganesburc contra Felicem haereticum de adoptione filii Dei; quae haeresis ibi damnata est, et libri plurimi Felicis sive Elipandi in eadem haerese perdurantis combusti sunt, et Felix Romae per Engilbertum transmissus est.

Die Ann. Laurish. enthalten davon überhaupt

nichts; die Laur. maj. nur einiges, weichen in der Fassung ganz ab; die Ann. Einh. gehen näher auf die Sache ein, berichten aber nichts von der Verbrennung der Bücher, scheinen auch nicht dem Verfasser von Max. bekannt gewesen zu sein.

793. Dominus Carolus rex per fossatum Alchmonae fluminis perrexit.

in der Sache übereinstimmend mit Ann. Lauresh. und Laur. maj., im Ausdruck abweichend.

794. Der ausführliche Bericht über die Synode zu Frankfurt kann aus den beiden genannten Annalen zusammengesetzt sein, obwohl die Fassung vielfach anders ist; auch wird nur hier Alchuinus magister neben dem Patriarchen Paulinus und Erzbischof Petrus von Mailand als anwesend genannt, wie es heisst 'cum caeteris orthodoxae fidei defensoribus et refutantibus dogma perversum'. Das Folgende schliesst sich näher an Ann. Laur. maj. an.

Dagegen haben weder diese noch Lauresh. den ersten Satz von

795. Dominus Carolus in Saxonia, et tertiam eorum partem generis masculini foras tulit.

Er findet sich ähnlich in den Ann. Laur. min., mit denen sonst keine nähere Verwandtschaft hervortritt: Karlus in Saxoniam pergens, Saxones obtinuit, et tertium de eis hominem in Franciam educens conlocavit.

Das Weitere über die Gesandtschaft des Tudun entspricht dem Bericht der Ann. Laur. maj., die den dann noch kurz erwähnten Tod des Papstes Adrian erst zum folgenden Jahr berichten, zu diesem ausführlicher die Lauresh.

Mit diesen findet aber jetzt so wenig Uebereinstimmung statt, dass man sie in diesen Jah-

ren schwerlich wird zu den Quellen von Max. rechnen dürfen. Und im Folgenden findet sich nichts was mit irgend welcher Wahrscheinlichlichkeit auf sie zurückgeführt werden könnte, aber, wie wir weiter sehen werden, auch sonst wenig, was nicht aus anderen bekannten Quellen abgeleitet ist.

Unter diesen Umständen muss es nahe liegen, bei den eigenthümlichen Nachrichten der Jahre 787—795 an eine Fortsetzung der alten, den Ann. Mosellani und Laureshamenses zu Grunde liegenden [1]), wie Giesebrecht (Königsannalen S. 40) annimmt bis zum Jahre 785 in Lorsch geschriebenen, Annalen zu denken; 786 fehlt in den Ann. Mosellani ganz, ist aber hier vielleicht nur durch einen Zufall übergangen; oder der Verf. des von Max. benutzten Exemplars hat die Lorscher Aufzeichnung um ein Jahr weiter fortgeführt erhalten. Dann aber hat er eine selbständige Fortsetzung beigefügt, die uns eben in dieser Ableitung von Max. theilweise erhalten, hier neben den Ann. Laur. maj. benutzt ist. Findet Giesebrecht es wahrscheinlich, dass die Fortsetzung der sogenannten Ann. Mosellani in den Maingegenden, vielleicht in Würzburg geschrieben ward, so ist es auffallend, dass auch in dieser davon ganz unabhängigen Weiterführung eine Beziehung auf Würzburg hervortritt (787), während andererseits in den Sachen allerdings fortwährend eine Verwandtschaft mit den Lorscher Aufzeichnungen statthat, wie sie in den Laureshamenses, Laurissenses minores und den Laurissenses majores oder den fränkischen Königsannalen vorliegen.

1) Auf das was Oelsner, Pippin S. 520 ff., über ihr Verhältnis abweichend von Giesebrecht bemerkt, kommt es hier nicht an.

An die letzteren schliesst sich Max. im Folgenden immer näher an und wird allmählich fast zu einer nur den Ausdruck ändernden Wiedergabe derselben, ohne Zweifel weil dem Autor nun eine andere Quelle fehlte.

Nur einzelne Zusätze finden sich. 799 heisst es: et in locum suum (den Papst Leo) per Hildibaldum et Arnonem archiepiscopos restituit, was der Verf. aus dem Liber pontificalis nahm. — 801 ist zu Anfang bei der Kaiserkrönung eingeschaltet, sie sei vorgenommen: nesciente domino Karolo. — 803, an der Stelle wo die Ann. Mett. (9[b]) einen Zusatz machen über die Ankunft des Patriarchen Fortunatus, wird hinzugefügt: Nam et missi Georgii patriarchae de Hierosolymis, id est monachi duo, ibi venerunt ad eum; vgl. Laur. maj. 807, wo aber der Patriarch Thomas, einer der Mönche Georgius heisst, eine Stelle die in Max. auch benutzt ist. — 804 wird nach Ann. Laur. maj. berichtet, Karl habe mit dem Papst Weihnachten in Carisiaco gefeiert, und dann fortgefahren: epiphaniam vero in Aquis, und weiter: ita post dies 8 magnis ditatum muneribus etc., was ich anderswo nicht finde.

Sehen wir von diesen Zusätzen ab, so zeigt sich im übrigen nur eine bald freiere, bald aber auch mehr wörtlich sich anschliessende Wiederholung der Ann. Laur. maj. Zwei Beispiele mögen das verschiedene Verfahren zeigen.

Ann. Laur. maj.	Ann. Max.
796 .... altera (legatio), quae dixit, Pippinum cum exercitu suo in hringo sedere.	Dominus Pippinus rex ad locum celebre Hunorum qui hrinc vocatur prevenit et ibi ordinavit secundum jussionem domini Caroli patris sui.
811 .... et circa medium Novembr. Aquas venit. Obviarunt ei venienti legati Hem-	Iterum Novembre medio Aquis venit, ubi legati Hemmingi regis venerunt, Ha-

mingi regis Aowin et Hebbi munera regis et verba pacifica deferentes; fuerunt etiam Aquis adventum ejus expectantes qui de Pannonia venerunt Canizauci princeps Avarum et Tudun et alii primores ac duces Sclavorum circa Danubium habitantium, qui a ducibus copiarum, quae in Pannoniam missae fuerunt, ad praesentiam principis jussi venerunt. Interea Karlus filius imperatoris, qui major natu erat, 2. Non. Decembris diem obiit; et imperator Aquis hiemavit.	cuus et Hebbi, munera regis et verba pacifica deferentes; venerunt et de Pannonia Canizauci princeps Avarorum et Tudun et alii priores ac duces Sclavorum circa Danubium habitantium. Interea Carolus filius domini imperatoris major natu diem obiit 2. Nonas Decembris.

Dass Max. wirklich eine Ableitung, nicht etwa gar eine Quelle von Laur. maj. ist, bedarf kaum der Bemerkung. Das zeigt jede Stelle die man vergleichen mag; daraus ergeben sich auch einzelne Irrthümer oder Ungenauigkeiten. So wenn es 805 Ende heisst: et imperator cum omnibus filiis suis ad hiemandum in villam Theodonis pervenit, wo Laur. maj. nur Pippin und Ludwig nennen. Der Text schliesst sich, wo Ann. Laur. maj. und Einh. zusammenfallen, regelmässig an jene an, nur einmal habe ich eine Abweichung bemerkt, indem 811 unter den Franken, die den Frieden mit den Dänen schliessen, der Meginhardus comes fehlt, der nach der Ausgabe in jenen stehen soll; doch mag vielleicht eine Verschiedenheit der Handschriften zu Grunde liegen. Manche Namensformen sind abweichend, wie in der vorher angeführten Stelle 811 'Hacuus' (vielleicht ist 'Hacuun', Hakon, zu lesen; vorher zweimal 'Ansfrid' statt 'Osfred' (Osfrid, Offredus, andere Handschriften), 'Aosdag' statt 'Ostdag (Ostdach, Osdag).

Ob der Umstand, dass die Handschrift von Max. nur bis zum Jahre 811 geht, zu der Annahme berechtigt, die Ann. Laur. maj. hätten nur bis zu diesem Jahre dem Autor vorgelegen, mag zweifelhaft sein. Da sie in dieser Zeit, wenn auch von einem Verfasser, doch wahrscheinlich gleichzeitig und wenigstens theilweise Jahr für Jahr fortgeführt wurden (Giesebrecht S. 22), so wäre immerhin die Benutzung auch eines Theiles möglich. Der Schreiber des Codex hatte jedenfalls nicht mehr vor sich. Denn am Ende standen die Worte: De reliquis sextae aetatis. Haec de cursu praeteriti saeculi ex Hebraica veritate, die auf Beda zurückgehen, mit dessen Buch de sex aetatibus mundi der zu Anfang benutzte Theil in Zusammenhang steht. Vielleicht ist das Ganze was vorliegt als eine Fortsetzung der Bedaschen erweiterten und bis zum Jahr 741 herabgeführten Chronik zu betrachten. Dies würde erklären, dass der erste Theil den Text eines älteren Werkes wesentlich unverändert wiedergegeben hat, in dem späteren (nach 741) eine viel freiere Behandlung der benutzten Quellen stattfindet: nur hier ist der Autor so zu sagen selbständig aufgetreten.

Für die Abfassung aber um diese Zeit spricht, dass wo von Karl die Rede ist wiederholt zu dem 'rex' oder 'imperator' 'dominus' hinzugefügt[1]), oder Karl als 'dominus Carolus' bezeichnet[2]), einmal, abweichend von Ann. Laur. maj., 'domino nostro' gesagt wird (809).

1) Nur — 799 haben diese Bezeichnung mitunter auch die Ann. Laur. maj.

2) 796 steht auch 'dominus Pippinus rex'.

Ann. Laur. maj.	Ann. Max.
... missaque ad imperatorem legatione, sese cum omnibus quae habebat in deditionem illi venire velle promisit.	... cum omnibus quae habebat in deditionem domino nostro se venire promisit.

Reiffenberg hat aus dieser Stelle geschlossen, dass der Autor Zeitgenosse Karl des Grossen war, und ich weiss dem nicht zu widersprechen. Mir scheint kaum denkbar, dass nach dem Tode Karls dieser Ausdruck gebraucht, und zwar nicht aus einer älteren Quelle beibehalten, sondern an die Stelle einer andern Bezeichnung gesetzt wäre [1]).

Das Werk in eine spätere Zeit zu setzen, hätte man nur dann Grund, wenn man die vorher angeführten Worte, die Krönung Karls in Rom habe Papst Leo vorgenommen 'nesciente domino Karolo', auf die bekannte Stelle in Einhards Vita c. 28 zurückführen wollte. Doch scheint mir, da keine weitere Benutzung derselben nachgewiesen werden kann, eine solche Annahme nicht berechtigt; ein Zeitgenosse Karls und Einhards konnte auch dieselbe Nachricht bringen, ohne direct von diesem abhängig zu sein.

So sind diese Annalen aber ein neues Zeugnis, wie vielfach man sich in jener Zeit mit der Geschichte des mächtigen Kaisers beschäftigt, denselben Stoff in verschiedene Form gebracht hat, und wie uns bisher nur ein Theil

1) Dagegen kommt es nicht in Betracht, dass er 802 die Worte 'praesidiumque nostrorum in ea positum' übergeht, oder 797 statt: Barcinona civitas Hispaniae, quae jam pridem a nobis desciverat, per Zatun praefectum ipsius nobis est reddita, schreibt: Barcinona civitas, quae jam pridem a ditione Francorum decidit, per Z. p. i. et domino regi Carolo reddita est.

dessen bekannt war, was auf Grund der Aufzeichnungen in den Ann. Laurissenses majores (den sogenannten Königsannalen) und in Anschluss an diese von verschiedenen Verfassern geschrieben worden ist [1]).

Eine neue Ausgabe mit verbessertem Text und genauem Nachweis der Quellen in den Monumenta Germaniae historica ist dringend zu wünschen.

Verhältniss von *Πύθων ὄφις* zu sanskritisch (vedisch) *áhi-s budhnyà-s.*

Von

Theodor Benfey.

§. 1.

In dem Petersburger Sanskrit-Wörterbuch ist unter dem Artikel *budhnyà* bei Aumerkung der gewöhnlichen Verbindung dieses Adjectivs, welches 'in der Tiefe *(budhná)* befindlich' bedeutet, mit dem Substantiv *áhi* 'Schlange', mit den wenigen Worten 'vgl. *πύθων ὄφις*' eine Zusammenstellung veröffentlicht, welche zu den wichtigsten auf dem Gebiete der vergleichenden Mythologie gerechnet werden darf. *áhis* allein und insbesondere die Verbindung *áhis budhnyàs* bezeichnet in den Veden bekanntlich den Dämon, welchen sich die indogermanische Anschauung in der atmosphärischen Tiefe, der Regenregion, ruhend vorstellte und ihm den Willen und die Macht zuschrieb, der Erde den befruchtenden Regen vorzuenthalten, indem er die als mil-

1) S. über andere solche Ableitungen Forschungen z. D. G. VIII, S. 632; Büdinger, Anfänge des Schulzwangs S. 34.

chende Kühe vorgestellten Wolken in seine Festen einschloss; erst durch seine Besiegung, welche einem göttlichen Wesen, vorwaltend dem Indra, zugeschrieben wird, werden diese befreit und so der befruchtende Regen für die Erde gewonnen. Durch die Zusammenstellung von *Πύθων ὄφις* mit *áhi-s budhnyà-s*, deren Richtigkeit im Allgemeinen unmittelbar einleuchtet, ergiebt sich, dass die Hellenen mit ihrem wunderbar treuen Gedächtniss für uralte indogermanische Mythen, nicht bloss diesen Mythus selbst bewahrten, wie diess schon durch andere Vergleichungen festgestellt war, sondern auch die gewissermassen formelhafte Bezeichnung des Dämons durch zwei innig verbundene Namen, wie sie, man möchte fast sagen: einer systemartigen binären Nomenklatur ähnlich, uns auch sonst mehrfach entgegentritt. Wie wichtig diese Zusammenstellung für die Einsicht in das Wesen des wahrscheinlich ebenfalls in formelhafter Verbindung zweier Namen überlieferten *Φοῖβος Ἀπόλλων* ist, wird den Mythenforschern wohl ohne Weiteres einleuchten: er ergiebt sich dadurch als hellenischer Repräsentant des vedischen *Indra*, welcher selbst nur eine auf arischem Boden entstandene Modification des ebenfalls in formelhafter Verbindung zweier Namen aus der Urzeit überlieferten vedischen *Dyaúsh pitár* = *Ζεύς πατήρ* (gewöhnlich im Vokativ *Ζεῦ πάτερ*) = *Jûpiter*. Auch für Athene fanden wir diese formelhafte Verbindung in *Τριτωνίδ Ἀθάνα* dem Femininum der damit identischen zendischen Masculina *Thrâetâna âthwyâna*, welche ebenfalls vereint erscheinen und die Verbindung dadurch als eine uralte erweisen[1]).

1) Vgl. den Aufsatz über *Τριτωνίδ Ἀθάνα* in diesen 'Nachrichten' 1868. S. 46, besondrer Abdruck S. 12.

§. 2.

Wenn ich mir in Folgenden einige Worte über die, wie gesagt, im Allgemeinen unzweifelhafte Verwandtschaft von *Πύθων ὄφις* mit *áhis budhnyàs* erlaube, so geschieht diess nur, um dieselbe im Einzelnen näher zu bestimmen.

In Bezug auf die Identität von *ὄφις* mit *áhis* ist mir diese Mühe durch *Ascoli* erspart [1]). Dagegen sind die Verschiedenheiten zwischen *budhnyà* und *Πύθων*, wenigstens zum Theil, bis jetzt noch nicht erläutert.

Was das wurzelhafte Element in beiden Wörtern betrifft, sskr. *budh*, griech. *πῡθ*, so ist darin nur die Länge des *υ* im Gegensatz zu dem kurzen sskr. *u* noch dunkel; der Reflex von sskr. *budh* durch griech. *πυθ* dagegen ist bekannt, und durch eine hinlängliche Anzahl von Analogien geschützt. Nicht minder ist der Grund dieses Reflexes im Wesentlichen schon erläutert; dennoch muss ich mir erlauben, ihn mit wenigen Worten ins Gedächtniss zurückzurufen, da wir bei der Erklärung darauf zurückgreifen müssen.

In der indogermanischen Grundsprache gab es nur tönende Aspiratae, *gh*, *dh*, *bh*. In der Griechisch-Lateinischen Grundsprache erhob sich aber ein Bestreben sie in stumme zu verwandeln. Dieses Bestreben war bei der Trennung dieser Sprachen aber keineswegs schon durchgedrungen.

Dabei bemerke ich, dass in diesem bes. Abdr. manche dort stehen gebliebene Druckfehler corrigirt sind. Leider jedoch ist beider Orte, dort S. 43 Z. 21 hier S. 10, 8 ein sinnentstellender Fehler zurückgeblieben, welchen ich folgendermassen zu heben bitte. Man lese nämlich: 'sie an *ātbīn* bei *Firdusi* erinnert, während *Mujmil ut tevarikh* statt' u. s. w.

1) Corsi di glottologia. Vol. I. Fonologia, p. 193.

Im Griechischen ward es nach der Trennung weiter geführt, so dass die grundsprachlichen tönenden Aspiratae vorwaltend durch die stummen χ, ϑ, φ reflectirt werden; doch sind Fälle genug zurückgeblieben, wo dieser Wechsel nicht durchgedrungen ist; in diesen treten an die Stelle der ursprünglichen Aspiratae die sogenannten mediae, nämlich γ, δ, β. Im Lateinischen sind die Aspiratae in der weiteren Entwickelung ganz eingebüsst; aber ehe diese Entwickelung zum Abschluss gelangt war, hatte sich jener Kampf — im Gegensatz zum Griechischen — vorwaltend zu Gunsten der Bewahrung tönender entschieden, so dass sie durch *g*, *d*, *b* wiedergespiegelt werden. Wie aber im Griechischen Fälle übrig geblieben waren, wo die tönenden sich erhalten hatten und durch γ, δ, β vertreten wurden, so waren im Lateinischen auch mehrere Spuren des Eindringens der stummen an die Stelle der tönenden Aspiratae bewahrt. Es sind diess diejenigen Fälle, wo sich statt des ursprünglichen *gh*, *dh*, *bh* im Latein *c*, *t*, *p* (statt vorhergegangener *ch* (*kh*), *th*, *ph*) zeigen. Es giebt nur eine Aspirata, welche ihre Aspiration in das neue Lautsystem hinüber rettete, aber dieses geschah nur dadurch, dass sie den Verschlusslaut fast ganz opferte und zur spirans herabsank; es ist diess *f*.

Ferner gab es in der indogermanischen Grundsprache mehrere sogenannte Wurzeln, in denen sowohl der Anlaut als der Auslaut aspirirt war, mit andern Worten: in deren Derivaten die beiden ersten Sylben mit Aspiratis anlauteten, wie z. B. *bhudh* in 3 Sing. Präs. Medii *bhaudhatai*. Im Sanskrit sowohl als im Griechischen ist die Fähigkeit, anlautende Aspirationen in zwei unmittelbar auf einander folgenden

Silben zu bewahren, bis auf wenige Fälle eingebüsst. Im Sanskrit, wo sich die grundsprachlichen tönenden Aspiratae erhalten haben, tritt dann an die Stelle der anlautenden in der ersten Silbe regelmässig die entsprechende Nichtaspirata, so dass in den bemerkten Beispielen *budh*, *bodhate* entsteht. Da im Griechischen vorwaltend die Aspirata stumm geworden ist, so tritt in den Fällen, wo der Anlaut seine Aspiration einbüsst, an dessen Stelle vorwaltend die stumme Nichtaspirata z. B. πυϑ, πεύϑεται, (lateinisch *put-are*). Allein wie sich im Griechischen der ursprüngliche Charakter der Aspiratae als tönende in der keineswegs ganz seltenen Vertretung durch die tönenden γ, δ, β erhielt, so wirkt er auch noch in den stummen Reflexen, χ, ϑ, φ nach und zwar in denjenigen hieher gehörigen Fällen, wo die eine der Aspiratae nicht in die entsprechende stumme, sondern in die tönende Nichtaspirata übergeht, also χ, ϑ, φ nicht bezw. in κ, τ, π, wie vorwaltend, sondern in γ, δ, β, z. B. grundsprachliches *ghadh* in γαϑ in ἀγαϑός [1]). Zugleich ist zu bemerken, dass im Griechischen bisweilen die wurzelanlautende Aspirata ihre Aspiration bewahrt und die wurzelauslautende sie einbüsst. Beide Umwandlungen treten in dialektischem Gegensatz hervor in πιϑ-άκνη, attisch φιδ-άκνη aus grundsprachl. *bhadha* [2]), nicht ganz selten aber auch die letzten allein im Gemeingriechischen, z. B. ϑυγ-ατερ aus grundsprachl. *dhugh-atár* [3]).

1) Vergl. 'Jubeo und seine Verwandte'. S. 16 (in Abhandlungen der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Bd. XVI).

2) S. Fick, Vgl. Wörterb. der Indog. Spr. I. 1870. S. 164.

3) Ebds. S. 103.

Beiläufig bemerke ich, dass mir ein Beispiel dieser Umwandlung derartiger Wurzeln auch im Sanskrit vorzuliegen scheint. Denn Gothisch *biugan* erweist durch sein *b* und *g* wohl unzweifelhaft, dass als grundsprachliche Form des radikalen Theils *bhugh* anzusetzen ist, wie auch Fick andeutet, indem er neben *bhug* auch *bhugh* als solchen hinstellt[1]; griech. entspricht, nach Analogie von *θυγ* = *dhugh*, *φυγ* und ebenso im Sanskrit *bhug* in *bhug-na* 'gebogen', dessen *g*, wie so überaus häufig, in andern Formen zu *j* palatalisirt ist.

§. 3.

Zu dieser Classe von Wurzeln mit an- und auslautender Aspirata gehört auch das radikale Element, welches in *budhnyà* und *Πύθων* zu Grunde liegt. In der Grundsprache würde es *bhudh* gelautet haben, im Sanskrit *budh*; aus letzterem ist mit Affix *na* das Substantiv *budhná*, 'Boden, Grund, Tiefe' gebildet, daraus durch das Suffix, welches in der Grundsprache höchst wahrscheinlich, im ältesten Indisch entschieden, *ia*, im späteren, speciell dem Sanskrit, *ya* lautet, das Adjectiv *budhnia*, später *budhnyà*[2]) in der Bedeutung 'auf dem Boden u. s. w., in der Tiefe befindlich'. Dieses Affix ist eines der am häufigsten gebrauchten und bezeichnet fast alle adjectivischen Beziehungen, welche an der Base zu der es gefügt wird, hervortreten können z. B. 'davon abstammend, herrührend, damit zusammenhängend, darin entstanden, befindlich u. s. w.' Des folgenden wegen erlaube ich mir

1) Ebds. S. 139.

2) Vgl. meine Abhandlung 'Ist in der indogermanischen Grundsprache ein nominales Suff. *ia* oder *ya* anzusetzen?', in Abhandl. der Kön. Ges. der Wiss. XVI, insbesondre S. 105 und §. 6.

auf die erste besonders aufmerksam zu machen.

Im Griechischen erscheint sowohl die gewöhnliche Umwandlung des radikalen Theiles in πυθ als die in βυθ; jene in πυθ-μέν 'Boden, Grund, Tiefe', diese zunächst in dem damit gleichbedeutenden βυθ-μό[1]); ferner in βυθ-ό, 'Tiefe, bes. Meerestiefe'; höchst wahrscheinlich auch in Βύνη (für βυθ-νη), Name einer Göttin der Meerestiefe; für Assimilirung, dann Ausfall eines θ vor ν kenne ich zwar kein ganz analoges Beispiel, allein einigermassen lassen sich καίνυμαι für κάδ-νυ-μαι, ῥαίνω für ῥαδ-νω (sskr. *ard*) vergleichen, welche ganz so aussehen, als ob sie aus einem Dialekt in die epische Sprache gedrungen wären und αι in lesbischer Weise statt ᾱ (καίνυμαι für κᾱ́νυμαι) hätten. Ist diese Auffassung von Βύνη richtig, so haben wir darin das Femininum von sskr. *budhná* zu erkennen, mit Wechsel des Accents, wie in Eigennamen im Gegensatz zu den Appellativen, aus denen sie entstanden sind, so häufig.

Doch zurück zu βυθό. Da wir neben πυθ in πυθ-μέν auch βυθ in βυθ-μό finden, so dürfen wir annehmen, dass auch neben βυθ-ό eine Nebenform πυθ-ό existirte, und zwar um so unbedenklicher, da der Uebergang der ursprünglich anlautenden Aspirata in die stumme Nichtaspirata der vorherrschende ist. Diess zugestanden, haben wir eine vollständige Analogie für die Entstehung von Πύθων in dem Verhältniss von Τρίτων zu dem, im Femininum Τριτωνίδ zu Grunde liegenden, Masculinum Τρῑτωνο = altbactrischem *Thraêtâna*[2]) und von diesem zu

1) Fick, a. a. O. S. 140 und 380.

2) Vgl. Τριτωνίδ Ἀθάνα in 'Nachrichten 1868. 53, ff. bes. Abdr. S. 21.

sskr. *Tritá*[1]. In dem n. 1 S. 328 citirten Aufsatz ist nämlich nachgewiesen, dass *Thraêtâna* = **Τρῑτωνο** ein Patronymikum von Thrita = sskr. *Tritá* ist; nun wird aber hinter *ν* im Griechischen nicht selten ein thema-auslautendes *ο* eingebüsst (vgl. *ἀχέν* = lat. *egeno* u. aa. bei Leo Meyer[2]), denen sich noch manche beifügen lassen). Daraus erklärt sich das Verhältniss von **Τρίτων** für **Τρῑτωνο.** Nach dieser Analogie dürfen wir auch **Πύθων** für eine Abstumpfung von **Πῡθωνο** nehmen. In diesem tritt das Suffix sowohl als das gedehnte *υ* statt des kurzen in *πῠθό* für *βυθό* in vollständige Analogie mit dem Affix und der Dehnung des *ι* in **Τρῑτωνο** von dem ebenfalls oxytonirten *Tritá.* Ich habe in dem angeführten Aufsatz[3]) das *ῑ* für Vertreter von *ει* genommen, wofür man ausser dem dort angeführten *τρις* für *τρεῖς* in *τρισκαίδεκα* wohl unzweifelhaft auch *ἶδος* geltend machen kann, dessen *ῑ* dem sskr. *e* für grundsprachliches *ai* in *sveda* 'Schweiss' entspricht; dass das Affix *a* vielfach Verstümmelung von *as* = griech. *ος* ist, habe ich schon in meiner vollständigen Grammatik der Sanskritsprache (S. 142 §. 381) bemerkt, und die Beispiele, wo *as* und *a* in demselben Worte neben einander bestehen, lassen sich in Fülle beibringen; denen gemäss darf man ein älteres *svedas* ansetzen, mit welchem *ἶδος* für *εἶδος* identisch ist. Nach dieser Analogie würde auch das lange *ῡ* in *πύθων* für *ευ* zu nehmen sein und dafür liesse sich auch das lange *υ* der verstärkten Formen der Präsensthemen auf *νυ* (*δεικ-νῡμι*) für grundsprachliches

1) Ebds. S. 37 ff., bes. Abdr. S. 4 ff.

2) Vgl. Gramm. der Griech. und Latein. Spr. II. 137.

3) *Τριτωνὶδ' Ἀθάνα.* S. 45, bes. Abdr. 12, wo Z. 8 (16) v. u. 213 statt 273 zu lesen ist.

au sskr. *o* geltend machen. Doch lässt sich auch manches gegen diese Auffassung in Bezug auf *υ* anführen, z. B. dass wir sogar im Sanskrit in einigen Fällen Dehnung von *u* statt der Gunirung (*û* statt *o*) eintreten sehen. Welche Annahme — unmittelbare Dehnung des *υ*, oder Entstehung von *ῡ* aus *ευ* — vorzuziehen sei, wird sich nicht ohne eine umfassende Untersuchung feststellen lassen. Diese würde hier zu weit führen und für unsren Zweck völlig unerheblich sein, da die Dehnung des *υ* durch die des *ι* in *Τρῖτων* und *Τρῖτωνιδ* ihre für diesen ausreichende Analogie findet.

Was die etymologische Bedeutung von *Πύθων* betrifft, so ist sie nach Analogie von *Thraêtâna*, 'Sohn des Trita', höchst wahrscheinlich 'Sohn der Tiefe'; man vergleiche dazu *υἱωνό* von *υἱό* 'Sohn eines Sohnes' = 'Enkel'. Diese Bezeichnung der in der atmosphärischen Tiefe waltenden Schlange ist eine hochpoetische und dem gewaltigen dichterischen Geiste der Hellenen, wie mir scheint, keinesweges unangemessen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass, wie sich neben *Τρῖτωνιδ* die Form *Τρῖτώ* findet, welche für *Τρῖτωνι*, mit Einbusse des *ν*, *Τρῖτῳ* steht, so auch neben dem msc. *Πύθων* das fem. *Πῡθώ* erscheint [1]), jedoch als Bezeichnung der Localität, in welche die himmlische Schlange später versetzt wurde. Wie *Τρῖτωνιδ* nur fem. von *Τρῖτωνο* sein kann, so auch *Τριτώ* (für *Τρῖτωνι*), woraus folgt, dass auch in *Πῡθώ* für *Πῡθωνι* die für *Πύθων* vorausgesetzte volle Form *Πυθωνο* als zu Grunde liegend entschieden anzuerkennen ist.

1) Vgl. Leo Meyer, Vglch. Gr. II. 142.

Universität.

Preisvertheilung.

Die auf den 4. Juni fallende Preisvertheilung hatte dieses Mal am 7. d. M. statt. In der Festrede setzte Professor Wieseler auseinander, wie Griechen und Römer über den Sieg und seine Verleiher dachten.

Von den drei Predigten, welche über den seitens der theologischen Facultät gegebenen Text Joh. 15, 14—16 eingeliefert worden sind, wurde einer die Hälfte des königlichen Preises zuerkannt. Ihr Verfasser ist
Heinrich Tiedge, stud. theol. aus Meinersen.

Die philosophische Facultät, bei welcher auf die aus dem vorigen Jahre wiederholte Aufgabe: De Eratosthenis Chronographi fontibus et auctoritate, zwei Arbeiten eingegangen waren, konnte der einen mit allgemeiner Uebereinstimmung den vollen Preis ertheilen. Als ihr Verfasser ergab sich
Ludewig Mendelssohn, stud. philol. aus Oldenburg.

Die neuen Preisaufgaben sind folgende:

Als wissenschaftliche Aufgabe stellt die theologische Facultät:

Pauli Samosateni vita e fontibus eruatur et doctrina ita exponatur, ut quid et ad haeresin Arianam et ad theologiam Antiochenam excolendam momenti habuerit, demonstretur.

Als Predigttext giebt sie die Stelle:

2. Cor. 4, 5—7.

Die Aufgabe der juristischen Facultät lautet:

Explicetur burggraviorum muneris ratio in diversis Germaniae urbibus durante medio aevo.

Die medicinische Facultät wiederholt die Preisfrage des verigen Jahres, welche lautet:

Es wird eine genaue Untersuchung der Structurveränderungen des Rückenmarks gewünscht, welche nach Vergiftungen durch Strychnin etwa entstehen mögen. Die Untersuchung wird sowohl an durch das Gift rasch oder allmählich getödteten, als auch an nach der Vergiftung wieder belebten Thieren vorzunehmen sein.

Die Aufgaben der philosophischen Facultät sind:

I. Quaestio ordinaria:

Ordo philosophorum postulat „ut leges a Livio in Aunalium orationibus componendis observatae ex veterum rhetorum arte explicentur inque quaestionem vocentur harum orationum loci, quorum verba propter rhetorices ignorantiam aliave de causa in codicibus depravata exstare videantur";

II. Quaestio extraordinaria:

„Es soll die Gleichung derjenigen Spirale entwickelt werden, die ein Galvanometerdraht bilden muss, damit die Wirkung des Stroms auf die Nadel ein Maximum sei".

Die Bearbeitungen müssen mit einem Motto versehen und zugleich mit einem versiegelten Zettel, der aussen dieses Motto trägt und innen den Namen des Verfassers enthält, bis zum 15. April 1872 den Decanen der einzelnen Facultäten übergeben werden. Die Bearbeitung der medicinischen und der ausserordentlichen philosophischen Aufgabe kann auch in deutscher Sprache erfolgen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai, Juni 1871.

Nature Nr. 79–82.
Carte Géologique de la Suède. Livr. 36–41.
Oversigt over det Kongel. Dansk. Videnskabernes Selskabs Forhandlingar. 1870. Nr. 2.
J. Thomson, thermochemiska Undersögelser. Nr. V—IX. Kjöbenhavn. 1870. 4.
A. Colding, om Strömningsforholdene i almindlige Ledninger og i Havet. Ebd. 1870. 4.
Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei III. Vol. VII. fasc. II. 1870. Upsaliae 1870. 4.
Bulletin météorologique mensuel de l'observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. II. Nr. 1—6. Décembre 1869—Mai 1870. Upsal. 1870. 4.
A. J. Angström, recherches sur le spectre solaire. Ebd. 1868. 4.
Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVI. Part. 1. for the session 1869—70. 4.
Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Session 1869—70. 8.
Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch Indie. Deel XXIX. Aflev. 5–6. Deel XXX. Aflev. 1 en 2. Deel. XXXI. Aflev. 4–6. Batavia, s'Gravenhage 1867—70. 8.
Verzeichniss der Abhandlungen der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1710–1870 in alphabetischer Folge der Verfasser. Berlin 1871. 8.
XX. Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover. 1871. 4.
War Department. Circular Nr. 4. 1870. Report on barracks and hospitals with descriptions of military posts. Washington 1870. 4.
Flora Batava. Aflevering 213–215. Leyden. 4.
Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg, section des sciences naturelles et mathématiques. T. XI. Années 1869 et 1870. Lnxembourg 1870. 8.
Lotos, Zeitschrift für Naturwissenschaften. Jahrg. XX. Prag 1870. 8.

Az Erdélyi Muzeum-Egylet Évkönyvei. Ötödik Kötet. Második & Harmadik Füzet. Kolozsvárt 1870. 71. gr. 8.
Abhandlungen herausg. vom naturwiss. Vereine zu Bremen. Bd. 2. Hft. 3. Bremen 1871. 8.
Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1870. Nr. 2. Moskou. 1870. 8.
Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. April 1871. Berlin 1871. 8.
Abhandlungen des naturwiss. Vereins zu Magdeburg. Hft. 2. Magdeburg 1870. 8.
Naturwissenschaftlicher Verein zu Magdeburg. (Aus d. Beiblatt zur Magdeburgischen Zeitung). 8.
C. Settimanni nouvelle théorie des principaux éléments de la Lune et du Soleil. Florence 1871. 4.
Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. Vereinsjahr 1870—71. Prag 1871. 8.
Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Jahr 1870. 8.
Memorie del R. Instituto Lombardo di Science e Lettere. Classe di Scienze matematiche e naturali. Vol. XI. — II della Serie III. Fasc. III. — Vol. XII. — III della Serie III. Fasc. I. II. Milano 1870. 71. 4.
Classe di Lettere e Scienze morali e politiche. Vol. XI. — II. della Serie III. Fasc. III. Vol. XII. — III. della Serie III. Fasc. I. Ebd. 1870. 4.
R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti Serie II. Vol. II. Fasc. XVII — XX. Vol. III. Fasc. I - XX. — Serie III. Vol. IV. Fasc. I — VII. Ebd. 1869 — 71. 8.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. V. Parte II. che abbraccia l'anno 1870. 8.
L. Gabba alcuni recenti studj di chimica organica e sull' applicazione dei loro risultati all' arte tintoria. Milano 1870. 8.
Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Bd. IX. Hft. 2. Kronstadt 1870. 8.
Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde für $18^{69}/_{70}$. Hermannstadt 1870. 8.
Antonio de Marchi, Alla Germania. Canto. Palermo 1871. 8.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

28. Juni. №. 12. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen 5ter Ordnung insbesondere.

Von

A. Clebsch.

Der Kgl. Gesellschaft erlaube ich mir eine Reihe von Resultaten einer Untersuchung mitzutheilen, welche einerseits durch das Studium der höhern Transformation binärer Formen veranlasst wurde, andererseits durch die Beschäftigungen mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades [1]).

1.

Im verflossenen Jahre legte ich der Kgl. Gesellschaft eine Abhandlung vor, in welcher gezeigt wurde, dass absolute Invarianten bei höheren als linearen Transformationen binärer For-

1) Die ausführliche Darlegung der Untersuchung wird demnächst in den Math. Annalen erscheinen.

men nicht existiren. Es liegt nun die Frage nahe, worin der gemeinsame Character aller derjenigen Gleichungen zu suchen sei, welche durch irgend eine höhere eindeutige Transformation aus einer gegebenen Gleichung n-Grades ($f = 0$) hervorgehen. Ich habe gefunden, dass man diesen gemeinsamen Charakter durch eine geometrische Interpretation ausdrücken kann, welche für quadratische Transformationen so lautet:

Alle Gleichungen, welche aus einer gegebenen Gleichung n-Grades durch quadratische Transformationen hervorgehen, werden dargestellt durch die Schnittpunctsysteme, welche die Graden der Ebene auf den Seiten eines gewissen n-Seits ausschneiden, dessen Seiten Tangenten eines Kegelschnitts sind.

Insbesondere geht die quadratische Substitution in eine lineare über, wenn die Gerade Tangente dieses Kegelschnitts wird.

Ist $n > 5$, so können die Invarianten der Schnittpunktsysteme nicht mehr alle beliebigen Werthsysteme annehmen. An Stelle der bei der linearen Transformation auftretenden Unveränderlichkeit absoluter Invarianten treten dann hier gewisse Gleichungen, welche den Zusammenhang der verschiedenen durch die quadratische Transformation zu bildenden Gleichungen angeben. Diese Gleichungen bestehen zwischen den Invarianten eines Schnittpunctsystemes; aber ihre Coefficienten sind Invarianten des Vielseits, an welches die Interpretation sich anknüpft.

Sucht man diejenigen Geraden, für welche eine bestimmte Invariante des Schnittpunctsystems verschwindet, so erhält man die Tangenten einer Curve. War die Invariante vom Grade k in den Coefficienten, so ist die Classe dieser

Curve $\frac{kn}{2}$, und sie hat die Seiten des Vielseits zu $k$fachen Tangenten.

Man erhält so eine Reihe merkwürdiger Classencurven, welche mit dem Vielseit in invarianter Beziehung stehen. Von Wichtigkeit ist dabei insbesondere die Frage, ob eine solche Curve zerfällt; und jenachdem dieses eintritt oder nicht, kann man die Invariante, welche für ihre Tangenten verschwindet, einer von zwei grossen Classen zuweisen, die ich als die Classen der reducibeln und der irreducibeln Invarianten bezeichne. Ein wichtiges Beispiel der ersten Classe giebt die Discriminante.

In ähnlicher Weise kann man die Transformation dritter Ordnung im Raume interpretiren. Alle Gleichungen, welche aus einer gegebenen Gleichung $n$ten Grades durch cubische Transformation hervorgehen, werden durch die Schnittpunctsysteme dargestellt, welche die Geraden des Raumes auf gewissen n Schmiegungsebenen einer Raumcurve 3ter O. ausschneiden. Den quadratischen Transformationen entsprechen dabei die Tangenten der von den Schmiegungsebenen dieser Curve gebildeten abwickelbaren Fläche, den linearen ihre Doppeltangenten.

Bei höhern Transformationen kann man sich zur Interpretation in gleicher Weise eines Raumes von mehr Dimensionen bedienen.

2.

Für die Gleichungen 3ten, 4ten und 5ten Grades ist die quadratische Transformation noch die allgemeinste. Bei Formen 3ten Grades zwar erhält man nichts Bemerkenswerthes. Bezüglich der Formen 4ten Grades ergiebt sich nur das benannte Resultat, dass diejenigen Geraden,

welche die Seiten eines Vierseits bei einer gegebenen Anordnung nach einem gegebenen Doppelverhältniss schneiden, einen gewissen Kegelschnitt des Systemes berühren, welche die Seiten des Vielseits zu gemeinschaftlichen Tangenten hat. Dagegen ergiebt die Betrachtung des Fünfseits eine Reihe interessanter Resultate.

Bezeichnen wir durch A, B, C, R die auf p. 104 des gegenwärtigen Jahrgangs der „Nachrichten" definirten Invarianten, so entsprechen diesen die 4 Curven:

$A = 0$, 10ter Classe, die Seiten des Fünfseits vierfach berührend,

$B = 0$, 20ster Classe, die Seiten des Fünfseits 8fach berührend,

$C = 0$, 30ster Classe, die Seiten des Fünfseits 12fach berührend,

$R = 0$, 45ster Classe, die Seiten des Fünfseits 18fach berührend.

Die Berührungspuncte auf den Seiten t des Fünfseits werden durch Gleichungen gefunden, welche algebraisch lösbar sind. Ebenso findet man durch algebraisch lösbare Gleichungen die gemeinsamen Tangenten einer jener 4 Curven mit einem 4 Seiten des Fünfseits berührenden Kegelschnitt, und die Tangenten, welche man von den Ecken des Fünfseits an die 4 Curven ziehen kann.

Die Curve $R = 0$ besteht, entsprechend Hermite's Zerlegung der Invariante R in 15 Factoren, 15 Curven 3ter Classe $R^1 = 0$. Sie bilden 5 Gruppen; die 3 Curven einer Gruppe haben dieselbe t zur Doppeltangente, die 4 übrigen t zu einfachen Tangenten und jede Curve der Gruppe berührt ausserdem zwei Diagonalen des aus den 4 letzten t gebildeten Vierseits.

Diese Curven sind dadurch geometrisch vollkommen bestimmt.

Die Curven $A = 0$ und $C = 0$ berühren sich in 30 Puncten, deren Tangenten t_2 mit den t zusammen das ganze System gemeinsamer Tangenten von $A = 0$, $C = 0$ bilden Die 30 t_2 bilden 15 Paare, so dass je zwei Tangenten desselben Paars auch gleichzeitig eine gewisse Curve $R^1 = 0$ berühren.

Die Curve $B = 0$ fällt in zwei Curven 10ter Classe $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, deren jede die t zu vierfachen Tangenten hat, und ausserdem von den Tangenten berührt wird, die man aus den Ecken des Fünfseits an $A = 0$ ziehen kann.

Die Curve $C = 0$ hat 12 Doppelwendetangenten t_2; dieselben zerfallen in 2 Gruppen zu 6, und zwar berühren 6 derselben zugleich in den Wendepuncten von $C = 0$ die Curve $B_1 = 0$, die andern 6 berühren in den bezüglichen Wendepuncten von $C = 0$ die Curve $B_2 = 0$. Jede der Curven $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ hat also 6 t_2 zu Doppeltangenten. Und zugleich sind die t_2 dieser beiden Gruppen einander einzeln zugeordnet, so dass sie 6 Paare bilden; aus solchen 6 Paaren lassen sich 15 Combinationen von zwei Paaren bilden, und die vier t_2 einer jeden solchen Combination berühren eine bestimmte der 15 Curven $R^1 = 0$, so dass die t_2 eines Paars 5 Curven $R^1 = 0$ berühren, welche einzeln den verschiedenen Gruppen dieser Curven angehören.

Die gemeinschaftlichen Tangenten der Curven $R^1 = 0$ bestehen ausser den t und den t_2 noch aus 20 Tangenten t_3, deren jede 3 Curven $R^1 = 0$ berührt.

Die Curven $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ haben das Geschlecht $p = 0$, für die Curve $C = 0$ ist

$p = 4$. In Folge des letzteren Umstandes lässt sich die Curve $C = 0$, auf einer Raumcurve 6ter O. eindeutig abbilden, welche der Durchschnitt einer Fläche 3ter O. mit einer Fläche 2ter O. ist. Von einer solchen Curve kann man Puncte finden mittelst einer quadratischen und einer cubischen Gleichung; indem man nämlich eine Erzeugende der Fläche zweiter O. mit der Fläche 3ter O. schneidet. Daher kann man auch ohne Auflösung höherer Gleichungen und ohne die Seiten des Fünfseits getrennt, d. h. die Gleichung 5ten Grades als gelöst, vorauszusetzen, Tangenten von $C = 0$ finden. Da nun jede solche Tangente ein Schnittpunctsystem liefert, dessen Invariante C verschwindet, so kann man (siehe p. 104 dieses Bandes der Nachrichten) der ihr entsprechenden transformirten Gleichung 5ten Grades die Jerrardsche Form geben, und gelangt so zu derjenigen Form der Gleichung 5ten Grades, auf welche die Hermitesche Auflösungsmethode sofort Anwendung findet.

Bei dieser Behandlung der Gleichung legt man auf der gewählten Tangente von $C = 0$ zwei Puncte zum Grunde, welche in der folgenden geometrischen Beziehung zu dem auf ihr liegenden Schnittpunctsysteme sich befinden. Zu jedem System von Puncten einer Graden gehören drei, welche in Bezug auf jene ein harmonisches Polarsystem haben. Ist aber die Gerade eine Tangente u von $C = 0$, und jenes System von 5 Puncten ihr Schnittpunctsystem mit dem Fünfseit, so fallen zwei der drei Puncte in einen Doppelpunct x, zusammen, während der dritte, y, im Allgemeinen isolirt bleibt. Die Puncte x, y sind es, auf welche man das Schnittpunctsystem beziehen muss, um die Jerrardsche

Form zu erhalten. Die Puncte x, y sind einander und der Geraden u eindeutig zugeordnet; und während letztere die Curve 30ster Classe $C = 0$ umhüllt, beschreibt x eine Curve 12ter, y eine Curve 18ter Ordnung, welche eindeutige Umformungen von $C = 0$ sind.

Bei dieser Untersuchung tritt eine eigenthümliche Bedeutung hervor, welche die linearen Covarianten der binären Formen bei der Uebertragung in das Gebiet ternärer Untersuchungen erhalten. Wenn die Invarianten, gleich Null gesetzt, auf Classencurven führen, so geben die Gleichungen, welche dem Verschwinden zweier linearen Covarianten entsprechen, zu eindeutigen Transformationen Veranlassung, vermöge deren man jene Classencurven durch Ordnungscurven abbilden kann.

3.

Wenn so die quadratische Substitution schliesslich auf dieselben Betrachtungen führt, welche sonst aus der Tschirnhausenschen abgeleitet werden, so giebt die Vergleichung beider Substitutionen sofort eine algebraische Darstellung der erwähnten Abbildung von $C = 0$ auf einer Raumcurve 6ter O., dem Schnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung.

Man wird hierbei auf eine merkwürdige Fläche dritter Ordnung geführt, auf welcher eben jene Raumcurve liegt, und welche mit der Theorie der Gleichungen 5ten Grades im genauen Zusammenhange steht. Diese Fläche ist einem Pentaeder im Raum in ganz bestimmter Weise zugeordnet. Sie enthält nämlich die 15 Diagonalen der Vierseite, welche auf jeder Tetraederebene durch die vier andern ausgeschnitten

werden, und ist dadurch völlig bestimmt. Ich nenne sie deswegen die Diagonalfläche. Sie ist vor andern Flächen dadurch ausgezeichnet, dass von ihren 27 Geraden 15 durch eine Gleichung 5ten Grades gefunden werden, welche keine andre als die bekannte Gleichung des Sylvesterschen Pentaeders ist; dieses fällt hier mit dem schon erwähnten Pentaeder zusammen. Von diesen 15 Geraden gehen 10mal 3 durch einen Punct (Ecke des Pentaeders) und liegen zugleich in einer Ebene, so dass von den 45 Dreiecken der Fläche 10 in drei Strahlen durch einen Punkt ausarten.

Die 12 noch fehlenden Geraden der Fläche bilden 6 Paare und zwar eine Schläflische Doppelsechs. Die Geraden jedes Paars schneiden dieselben 5 unter den 15 ersten Geraden, und zwar je eine auf jeder Ebene des Pentaeders. Man kann also diese Geraden auch ohne Weiteres construiren. Ihre Asymptotenpuncte liegen auf der gesuchten Raumcurve 6ter O., welche das Bild von $C = 0$ ist, und bestimmen dieselbe eindeutig. Während jeder Punct der Raumcurve sonst einer Tangente von $C = 0$ entspricht, sind die 12 Paare von Asymptotenpuncten die Bilder der 12 Doppelwendetangenten, und jede von diesen ist also einer der 12 letzten Geraden zugeordnet, wie denn auch nach dem Vorigen die Gruppirung jener Doppelwendetangenten der einer Doppelsechs entspricht [1]).

1) Für die wirkliche Darstellung des Systems der 27 Geraden einer Oberfläche dritter Ordnung, welche ein sehr verwickeltes System bilden, giebt die Diagonalfläche ein einfaches und leicht construirbares Beispiel, welches zugleich die grösste Zahl der Eigenschaften des allgemeinen Systems ohne zu grosse Modificationen aufweist. Es dürfte sich daher zu Herstellung bequemer Modelle diese Fläche besonders empfehlen.

Da nun hier eine Doppelsechs rational bekannt ist, so kann man zwei conjugirte Abbildungen der Fläche auf einer Ebene finden, indem man nur die quadratische Gleichung löst, welche zur Trennung der Doppelsechs führt. Die so entstehenden Abbildungen sind sehr bemerkenswerth; ihre Natur wird unten dargelegt werden.

Ich erwähne nur zunächst den genauen Zusammenhang, in welchem diese 12 Geraden oder die 12 Doppelwendetangenten von $C = 0$ mit der Auflösung der Gleichung 5ten Grades stehen. Man kann nämlich durch jede der beiden Gruppen von 6 t_2 oder die entsprechende Gruppe von Geraden der Diagonalfläche geometrisch die Resolventen 6ten Grades der Gleichung 5ten Grades interpretiren. Kennt man eine Wurzel derselben, d. h. kennt man eine Doppelwendetangente von $C=0$, so sieht man leicht ein, dass die Gleichung 5ten Grades auf eine reine Gleichung zurückkommt [1]), indem man sie mit der jener Tangente entsprechenden Transformation zweiter Ordnung behandelt; und es ergiebt sich hieraus eine geometrische Darstellung einer der Kroneckerschen verwandten Auflösungsart. Nach derselben würde man eine Wurzel der Resolvente 6ten Grades suchen, und mit Hülfe derselben die Gleichung 5ten Grades in eine reine Gleichung verwandeln. Ich werde nun

1) Um aus einer Gleichung 5ten Grades den 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Term fortzuschaffen, ist nach der Tschirnhausenschen Methode eine Gleichung 24sten Grades zu lösen. Ihre Wurzeln entsprechen den Asymptotenpuncten. Sie gehören daher paarweise zusammen und diese Paare entsprechen den Doppelwendetangenten von $C=0$. Diese aber gehören abermals paarweise zusammen, und so wird jene Gleichung 24ten Grades endlich auf eine Resolvente 6ten Grades zurückgeführt.

zeigen wie der Zusammenhang jener Resolvente mit der Modulargleichung geometrisch in Evidenz tritt.

4.

Dies geschieht durch die Untersuchung der erwähnten Abbildung der Diagonalfläche. Ihre 6 Fundamentalpuncte, welche den 6 Doppelwendetangenten einer Gruppe zugeordnet sind, entsprechen den Wurzeln einer Resolvente; und als eine grosse Classe derartiger Resolventen kann man die Gleichungen bezeichnen, durch welche die Strahlen eines von einem beliebigen Puncte der Ebene nach jenen Fundamentalpuncten gerichteten Strahlen getrennt werden.

Das Sechseck dieser Fundamentalpuncte ist ein sehr merkwürdiges. Es hat die Eigenschaft, dass auf 10 verschiedene Arten die 6 Puncte zu zwei so verbunden werden können, dass die 3 Verbindungslinien sich in einem Puncte treffen; es ist also ein zehnfach Brianchonsches Sechseck. Ein solches ist, abgesehen von projectivischen Umformungen, völlig und eindeutig bestimmt. Man kann es erzeugen durch den Durchschnitt zweier projectischer und perspectivisch liegenden Strahlbüschel von je 4 Strahlen, deren Doppelverhältniss eine Wurzel der Gleichung x^2-x-1 ist. Ein solches Sechseck ist also reell möglich, und damit die ganze Abbildung der Geraden der Diagonalfläche.

Nun zeigt sich aber, dass alle Strahlbüschel, welche von Puncten der Ebene nach den Puncten eines solchen Sechsecks gerichtet sind, eine gewisse Invariantenrelation besitzen. Bezeichnen wir durch A, C die Invarianten einer Form 6ter Ordnung, welche p. 105 dieses Bandes der Nachrichten ebenso bezeichnet sind, so folgt

aus dieser Invariantenrelation, dass C immer verschwindet, sobald $A = 0$. Aber indem man die Betrachtungen von No 1. dualistisch umkehrt, sieht man, dass die Scheitel, für deren Büschel $A = 0$, eine Curve 6ter Ordnung bilden, welche die 6 Fundamentalpuncte zu Doppelpuncten hat. Puncte einer solchen Curve kann man, wie in Nr. 3. erwähnt, durch Lösung quadratischer und einer cubischen Gleichung finden. Daher kann man ohne Lösung einer höhern Gleichung unendlich viele Puncte finden, für deren Stahlenbüschel die Invarianten A und C zugleich verschwinden. Aber dann ist, wie ich a. a. O. gezeigt habe, die Gleichung 6ten Grades eine lineare Transformation der Modulargleichung für die Transformation 5ter O. der elliptischen Functionen; und zwar ist dort auch dargelegt, wie man sie in dieselbe verwandelt. Demnach kann man also ohne Auflösung höherer Gleichung, und zwar auf unendlich viele Arten, Resolventen finden, welche mit der Modulargleichung identisch sind.

Hierdurch ist die angegebene Auflösungsmethode vollständig skizzirt, und man übersieht den Zusammenhang, in welchem die Auflösungsmethoden für die Gleichungen 5ten Grades einerseits mit den im Eingange entwickelten Principien der höhern Transformation stehen, andrerseits mit einer Anzahl eben so einfacher als interessanter geometrischer Gebilde.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai, Juni 1871.

(In ungarischer Sprache).

Almanach der ungarischen Akademie der Wissenschaften. Pest 1869 und 1870. 8.

Statuten der ungarischen Akademie der Wissenschaften u. s. w. Pest 1869. 8.

Denkmäler des Alterthums von Ungarn. Bd. 1. Heft 1. 2. Alterthümer des Mittelalters von Fünfkirchen, von Emerich Henszlmann. Pest 1869. 1870. 4.

Geschichtliche Denkmäler der türkisch-ungarischen Zeit. 1ste Abth. Diplomatorium. III. IV. V. (türkisch-ungarisches Staats-Archiv. Geordnet von Aaron Szilády und Sándor Szilágyi. Bd. 1—3). Pest 1868—1870. 8.

Forschungen, herausgegeben von der ung. Akademie der Wissenschaften.

Mathematische Abtheilung. Heft 4. 5. Pest 1869. 8.

Philologische Abtheilung. Heft 3. 4. 6. Pest 1868. Heft 5. 1869. Heft 1. 7. 8. 9. 10. 1870. 8.

Philosophische Abtheilung. Heft 9. 10. 11. Pest 1869. 8.

Staatswissenschaftliche Abtheilung. Heft 13. Pest 1870. 8.

Naturwissenschaftliche Abtheilung. Heft 14—19. Pest 1869. Heft 1. 2. 1870. 8.

Historische Abtheilung. Heft 8. 9. 10 bis 11. Pest 1869. 8.

Nachrichten von der ung. Akademie der Wissenschaften, herausgegeben von Hyacinth Rónay. 2r Jahrg. Heft 19. 20. Pest 1868. 3r Jahrg. Heft 1—20. 1869. 4r Jahrg. Heft 1—12. 1870. 8.

Jahrbuch der ung. Akademie der Wissenschaften. B. 12. Heft 10. 12. Pest 1869. B. 13. H. 1. 2. 4. Das. 1870. 4.

Jahrbücher des siebenbürgischen Museum-Vereins, herausgeg. von Samuel Brassai. Bd. 5. Heft 2. 3. Klausburg 1870. 71. 4.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

5. Juli. №. 13. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. Juli.

Benfey: Ueber die Entstehung und die Formen des Indogermanischen Optativ (Potential), so wie über das Futurum auf sanskritisch syâmi u.s.w.
(Erscheint in den Abhandlungen.)

Universität.

Preisaufgabe

der Beneke'schen Stiftung

für das Jahr 1871.

Obgleich bei dem engen Zusammenhange, in den die Griechen Philosophie und Medicin zu bringen gewusst haben, den Alterthumsforschern die grosse Bedeutung, welche für die Erkenntniss der griechischen Philosophie und ihres Entwickelungsganges die Schriften des Hippokrates haben, nicht entgangen ist, so werden doch eingehende Untersuchungen gerade in dieser Hinsicht bis jetzt ganz vermisst — ohne Zweifel wegen der vielen mit dieser Forschung verbun-

denen Schwierigkeiten. Zu diesen dürfte vor Allem der Umstand gehören, dass unter dem Namen des Hippokrates Werke der verschiedensten Verfasser allmählig vereinigt worden sind, von denen ein Theil neben, ein anderer lange nach diesem, ein dritter vielleicht vor ihm gelebt hat.

Da nun ohne eine gründliche Erörterung der Frage, welche philosophischen Systeme auf die Werke der hippokratischen Sammlung irgend Einfluss ausgeübt haben, ein sicheres Urtheil über die Abfassungszeit dieser Schrift zu gewinnen nicht möglich ist, da ferner diese Schrift nur nach solchem Urtheil für die Darstellung der philosophischen Systeme zugänglich gemacht und der unbedenklichen Benutzung gewonnen werden.

So stellt die philosophische Facultät zu Göttgen als Aufgabe:

> „einen eingehenden und umfassenden Nachweis der philosophischen Systeme, denen die Verfasser der dem Hippokrates zugeschriebenen Schriften folgten, verbunden mit einer Untersuchung über den Gewinn, den die sorgfältige Beachtung jener Systeme sowohl für die Bestimmung der Abfassungszeit der hippokratischen Schrift als auch für die Geschichte der griechischen Philosophie ergiebt."

Die Bearbeitungen dieser Aufgabe sind bis zum **31. August 1873 dem Dekan der philosophischen Facultät zu Göttingen in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache** einzureichen. Jede eingesandte Arbeit muss mit einem Motto und mit einem versiegelten den Namen und die Adresse des

Verfassers enthaltenden Couvert, welches dasselbe Motto trägt, versehen sein.

Der erste Preis wird mit **500 Thlr. Gold in Friedrichsd'or**, der zweite oder das Accessit mit **200 Thlr. Gold in Friedrichsd'or** honorirt.

Die Verleihung der Preise findet im **Jahre 1874 am 11. März**, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der Facultät statt.

Gekrönte Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihrer Verfasser.

Uebrigens sind über die Beneke'sche Stiftung die Göttinger gelehrten Anzeigen vom 2. April 1870 zu vergleichen.

Göttingen, den 2. April 1871.

Decan, Senior und Professoren der Honoren-Facultät.

Hoeck.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai, Juni 1871.

(Fortsetzung.)

Mittheilungen, herausgegeben von der Ung. Akademie der Wissenschaften.
  Archäologische. Bd. 8. Heft 1. Pest 1870. 4.
  Mathematische und naturwissenschaftliche, herausgeg. von Joseph Szabó. Bd. 5. Pest 1867. 8.
  Philologische, herausgeg. von Paul Hunfalvy. Bd. 7. Pest 1869. Bd. 8. 1870. 8.
  Statistische und nationalökonomische, herausgeg. von Karl Keleti. Bd. 5. Heft 2. Pest 1869. Bd. 6. 1869. 8.

Monumenta Hungariae historica. Abth. 1. Bd. 12. Codex diplom. Arpadianus continuatus. Bd. 7. Pest 1869. 8.

Budapester Revue. N. F. 1868. Bd. 12. Heft 10. 1869. Bd. 13. Heft 1—4. Pest 1869. 8.

Ungarischer Sprachschatz. Bd. 5. Heft 2—4. 4.

Ungarisches historisches Magazin, herausgeg. von der Ung. Akad. d. Wissensch. Bd. 14 oder 2te Folge, Bd. 2. Marino Sanuto's Nachricht über Ungarn in seiner Weltchronik herausgegeben von Gustav Wenzel. I. Pest 1869. 8.

Topographische Geschichte von Ungarn, von Jacob Rupp. Bd. 1. Pest 1870. 8.

Juni 1871.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.

Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. XXX. Wien 1870. 4.

Philos.-historische Classe. Bd. XIX. Ebd. 1870. 4.

Karl Fritsch, phänologische Beobachtungen aus dem Pflanzen- und Thierreiche. Hft. VIII. Jahrg. 1857. Herausg. durch die kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Ebd. 1869. 4.

Tabulae codicum manu scriptorum praeter Graecos et Orientales in bibliotheca palatina Vindobonensi Asservatorum. Vol. IV. Cod. 5001—6500. Ebd. 1870. 8.

Almanach der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. XX. 1870. Ebd. 1870. 8.

Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 42. Erste und zweite Hälfte. Bd. 43. Erste Hälfte. Bd. 44. Erste u. zweite Hälfte. Ebd. 1870. 71. 8.

Österreichische Geschichts-Quellen. Abth. II. Bd. XXX u. XXXIII. Ebd. 1870. 8.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

Philosoph.-historische Classe. Bd. LXIII. Hft. 1. 2. 3. Jahrg. 1869. — Bd. LXIV. Hft. 1. 2. 3. Jahrg. 1870. — Bd. LXV. Hft. 1. 2. 3. 4. Jahrg. 1870.— Bd. LVI. Hft. 1. Jahrg. 1870. Ebd. 1869. 70. 8.

Mathem.-naturwiss. Classe. Erste Abtheilung. Bd. LX. Hft. 3. 4. 5. Jahrg. 1869. — Bd. LXI. Hft. 1. 2. u. 3. 4. 5. Jahrg. 1870. — Bd. LXII. Hft. 1. u. 2. Jahrg. 1870. Zweite Abtheilung. Bd. LX. Hft. 3. 4 u. 5. Jahrg. 1869. — Bd. LXI. Hft. 1. 2 u. 3. 4. 5. Jahrg. 1870. — Bd. LXII. Hft. 1. 2. 3. Ebd. 1869. 70. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

26. Juli. №. 14. 1871.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs $18^{71}/_{72}$. Die Vorlesungen beginnen den 16. October und enden den 15. März.

Theologie.

Kritische und hermeneutische Einleitung in die kanonischen und apokryphischen Bücher des Alten Testaments: Prof. *Bertheau* in fünf Stunden um 11 Uhr.

Geschichte der Juden von Cyrus bis Hadrian: Lic. *Wellhausen*, dreimal um 12 Uhr.

Einleitung ins Neue Testament: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 12 Uhr.

Biblische Theologie des Neuen Testaments: Prof. *Ritschl* fünfmal, um 11 Uhr.

Erklärung der Genesis: Prof. *Bertheau* sechsmal um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Prof. *de Lagarde* fünfmal um 10 Uhr.

Erklärung des Jesaia: Lic. *Wellhausen*, fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung des Amos und Micha: *Derselbe* zweistündig um 12 Uhr, unentgeltlich.

Erklärung der aramäischen Stücke im A. T.: s. *Orientalische Sprachen* S. 363.

Erklärung des Römerbriefes: Prof. *Wiesinger*, fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums und der Briefe Johannis: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der Offenbarung Johannis: Prof. *Zahn* fünfstündig um 11 Uhr.

Erklärung der beiden Korintherbriefe: *Derselbe* fünfstündig um 9 Uhr.

Einleitung in die Kirchengeschichte: Prof. *Duncker* zweimal um 4 Uhr öffentlich.

Kirchengeschichte I. Hälfte: *Derselbe* sechsmal um 8 Uhr.

Reformationsgeschichte: Prof. *Wagenmann* zweimal, Mont. und Sonnab. um 8 Uhr öffentlich.

Dogmengeschichte: *Derselbe* fünfmal um 4 Uhr.

Geschichte der protestantischen Theologie: *Derselbe* viermal, Dienst., Mittw., Donnerst., Freit., um 8 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Schoeberlein* viermal um 12 Uhr; Prof. *Matthaei* Donnerstag und Freitag um 2 Uhr.

Einleitung in die Dogmatik: Prof. *Schöberlein* zweistündig, Mittw. und Sonnab. um 12 Uhr, öffentlich.

Dogmatik Th. II.: Prof. *Ritschl* fünfmal um 12 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie Th. I. (Prolegomena, Theorie der Mission und Katechetik): Prof. *Ehrenfeuchter* viermal, Montag Dienstag Donnerstag Freitag um 3 Uhr.

Christliche Pädagogik: Prof. *Schöberlein* Montag und Dienstag um 4 Uhr.

Kirchenlied und Kirchengesang: *Derselbe* Donnerstag und Freitag um 4 Uhr.

Kirchenrecht s. unter Rechtswissenschaft S. 354.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabend von 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabend von 3—4 Uhr, Prof. *Wiesinger* Mittwoch von 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Prof. *Schöberlein* Sonnabend von 9—10 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang: *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

Eine theologische Societät leitet Prof. *Schäberlein* Dienstags um 6 Uhr, eine historisch-theologische Societät Prof. *Wagenmann*, patristische Uebungen *Prof. Zahn.*

Die systematischen, kirchengeschichtlichen und exegetischen Conversatorien im theologischen Stift werden in gewohnter Weise Montag Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.

Repetent *Zoepffel* wird in später zu bestimmenden Stunden das Evangelium des Lucas cursorisch und unentgeltlich erklären, Repetent *Duhm* ebenso das Buch der Richter, Repetent *Dorner* die Lehre Augustins zweistündig, Dienst. und Donnerst. um 11 Uhr, öffentlich vortragen; Rep. *Duhm* zweistündig unentgeltlich Hebr. Grammatik.

Rechtswissenschaft.

Rechtsencyclopaedie: Prof. *Frensdorff* viermal wöchentlich von 9—10 Uhr.

Römische Rechtsgeschichte: Prof. *Ribbentrop* sechsmal wöchentlich von 10—11 Uhr, und Freitags auch von 5—6 Uhr.

Geschichte des römischen Civilprocesses: Dr. *Enneccerus* dreimal wöchentlich von 3–4 Uhr.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* sechsmal wöchentlich von 12—1 Uhr, und ausserdem Dienstags von 5—6 Uhr.

Pandecten: Prof. *Francke* von 9—10 und von 11—12 Uhr; Prof. *Hartmann* sechsmal wöchentlich von 11—12 und von 12—1 Uhr.

Erbrecht: Dr. *Enneccerus*, nach Arndts Pandekten, fünfmal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Exegetische Uebungen: Prof. *Wolff* drei Stunden (Montag, Dienstag und Donnerstag) um 4 Uhr.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Kraut* von 10—11 Uhr; Deutsche Rechts- und Verfassungsgeschichte: Prof. *Dove* täglich von 10—11 Uhr.

Erklärung des Sachsenspiegels: Prof. *Frensdorff* Mittwoch von 12—1 Uhr, öffentlich.

Deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehnrechts: Prof. *Thöl* fünfmal wöchentlich von 9—10 und von 10—11 Uhr.

29*

Landwirthschaftsrecht: Dr. *Ziebarth* Montag, Mittwoch und Freitag von 5—6 Uhr.

Deutsches Strafrecht: Prof. *Zachariae* fünfstündig um 11 Uhr.

Deutsches Reichsrecht: Prof. *Zachariae* vierstündig um 12 Uhr.

Deutsches Staatsrecht: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Wolff* fünf Stunden um 3 Uhr.

Katholisches und evangelisches Kirchenrecht: Prof. *Kraut* von 12—1 Uhr; Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts: Prof. *Dove* von 9—10 Uhr.

Civilprocesstheorie: Prof. *Briegleb*, achtstündig, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4–6 Uhr.

Civilprocesstheorie: Dr. *Grefe*, 6 Stunden, 1 Uhr.

Deutscher Strafprocess: Prof. *Zachariae* fünfstündig um 10 Uhr.

Civilprocesspracticum: Prof. *Hartmann* zweimal wöchentlich von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin und öffentliche Gesundheitspflege siehe unter Medicin S. 357.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie siehe unter Naturwissenschaften.

Anthropologie mit Benutzung der Blumenbach'schen Sammlung (auch für Nicht-Mediciner): Dr. *Merkel* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 11—12 Uhr.

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Henle*, Dienstag Freitag, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Henle*, Mont. Mittw. und Donnerst. von 2—3 Uhr.

Secirübungen, in Verbindung mit Prosector Dr. *Merkel* täglich von 9—4 Uhr.

Allgemeine Histologie in physiologischer und pathologischer Beziehung trägt Prof. *Krause* Sonnabend von 10—11 Uhr öffentlich vor.

Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatissime; Dr. *Merkel* wie bisher.

Mikroskopische Curse hält Prof. *Krause* im pathologischen Institute vier Mal wöchentlich, für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 12 oder um 2 Uhr.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst*, in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institute leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie und Therapie: Prof. *Krämer* Montag, Dienstag, Donnerstag von 4—5 Uhr.

Pathologische Anatomie lehrt Prof. *Krause* Dienstag und Freitag um 2 Uhr, Mittwoch und Sonnabend um 11 Uhr.

Physikalische Diagnostik in Verbindung mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken lehrt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel sowie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 4—5 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit pharmakognostischen Demonstrationen und erläuternden Experimenten trägt Dr. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr vor; Dasselbe gleichfalls in Verbindung mit Demonstrationen der Arzneimittel und ihrer physiologischen und toxischen Wirkung lehrt Dr. *Marmé* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* sechsmal wöchentlich von 8—9 Uhr, Dieselbe Dr. *Stromeyer* privatissime.

Pharmacie und Pharmakognosie für Mediciner lehrt Dr. *Husemann* vier Mal wöchentlich in später zu bestimmenden Stunden.

Elektrotherapie in Verbindung mit praktischen Uebungen in der Anwendung des Inductions- und des constanten Stroms lehrt Dr. *Marmé* Donnerstag und Freitag von 6—7 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich, Sonnabend ausgenommen, von 4—5 Uhr.

Ueber die venerischen Krankheiten und ihre Behandlung trägt Prof. *Krämer* öffentlich am Mittwoch um 4 Uhr vor.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von $10^1/_2$—12 Uhr.

Geschichte der Chirurgie trägt Prof. *Baum* Mittwoch von 5—6 Uhr öffentlich vor.

Allgemeine Chirurgie: Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Chirurgie II. Theil: Prof. *Baum* fünfmal wöchentlich von 6—7 Uhr, Sonnabend von 2—3 Uhr.

Ueber Wunden trägt Prof. *Lohmeyer* öffentlich zwei Mal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen: Prof. *Baum* viermal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Die chirurgische Klinik leitet Prof. *Baum* täglich von 9—$10^1/_2$ Uhr.

Augenheilkunde: Prof. *Leber* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Die Theorie des Augenspiegels erläutert Prof. *Leber* Mittwoch von 3—4 Uhr publice.

Praktische Uebungen im Gebrauch des Augenspiegels leitet Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Augenoperationscursus hält Prof. *Leber* zwei Mal wöchentlich in noch zu verabredenden Stunden.

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Geburtskunde trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krämer* in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr im Ernst-August Hospitale.

Psychiatrische Klinik hält *Derselbe* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin trägt Prof. *Krause* für Mediciner und Juristen Mittwoch und Sonnabend von 4—5 Uhr vor; Dasselbe lehrt Prof. *Lohmeyer* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Ueber öffentliche Gesundheitspflege mit besonderer Rücksicht auf Diaetetik (auch für Nicht-Mediciner) trägt Prof. *Meissner* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere nebst Pferde- und Rindviehkunde lehrt Dr. *Luelfing* sechs Mal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Die Theorie des Hufbeschlags trägt Dr. *Luelfing* öffentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Peip*, fünf Stunden, 3 Uhr.

Geschichte der alten Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 5 Uhr.

Geschichte der mittelalterlichen und neueren Philosophie: Dr. *Stumpf*, vier Stunden 5 Uhr.

Logik und Encyclopaedie der Philosophie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 10 Uhr.

Erkenntnisstheorie oder Metaphysik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 8 Uhr.

Psychologie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Bohtz*, Dienst. und Freit., 4 Uhr; Prof. *Peip*, vier Stunden, 5 Uhr.

Ueber die Argumente für das Dasein Gottes: Dr. *Stumpf*, Mont. und Mittw. 6 Uhr, unentgeltlich.

In seiner philosophischen Societät wird Prof. *Baumann* Kants Kritik der praktischen Vernunft behandeln, Dienst. 6—7 Uhr.

In seinen philosophischen Societäten wird Prof. *Peip* Abends 6—7 Uhr am Dienstag die Grundlehren der Logik nach Trendelenburgs „Elementa logices Aristoteleae“ entwickeln; am Freitag das XII. Buch der Metaphysik des Aristoteles erklären.

Dr. *Peipers* wird in seiner philosophisch-philologischen Societät Platons Theätet erklären, Freitag 6—8 Uhr.

Grundzüge der Rhetorik: Prof. *Krüger*, zwei Stunden, 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Donnerst. und Freit. 11 Uhr.

Mathematik und Astronomie.

Algebraische Analysis: Prof. *Stern*, fünf Stunden, 11 Uhr.

Analytische Geometrie des Raumes: Prof. *Clebsch*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., 12 Uhr.

Ueber Anwendung von Transformationen in der Geometrie: Dr. *Klein*, eine Stunde, unentgeltlich.

Ueber höhere Curven in der Ebene: Prof. *Clebsch*, Mont., Donnerst., 11 Uhr.

Geometrie der Flächen und Curven doppelter Krümmung nebst den Flächen zweiten Grades: Prof. *Enneper*, Mont. bis Freit., 3 Uhr.

Theorie der reellen, der imaginären und der idealen Zahlen: Prof. *Schering*, vier Stunden, 9 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Enneper*, Montag bis Sonnabend, 9 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof. *Stern*, vier Stunden, 10 Uhr.

Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse: Dr. *Minnigerode*, vier Stunden.

Methode der kleinsten Quadrate: Prof. *Schering*, öffentlich, Sonnabend 9—11 Uhr.

Analytische Mechanik: Prof. *Ulrich*, fünf Stunden, 4 Uhr.

Magnetische Uebungen: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math.-physikalischen Seminars, Freit., 6 Uhr.

Lehren der theoretischen Astronomie (Bahnbestimmungen): Prof. *Klinkerfues*, Montag, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag, 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet mathematische Uebungen Prof. *Stern*, Mittwoch 10 Uhr; trägt über Anwendungen der Differentialrechnung Prof. *Clebsch* vor, Mittw. 12 Uhr; giebt Anleitung zur Anstellung astronomischer Beobachtungen Prof. *Klinkerfues*, in einer passenden Stunde. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 360.

Naturwissenschaften.

Vergleichende Anatomie, mit besonderer Berücksichtigung der Vertebraten: Prof. *Claus*, täglich mit Ausnahme Sonnabends, 8 Uhr.

Allgemeine Naturgeschichte der Organismen vom Standpunkte des Darwinismus: Prof. *Claus*, Mont., Mittw. Freit. 3 Uhr.

Einleitung in das Studium der Botanik: Prof. *Bartling*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Pflanzen-Physiologie mit besonderer Rücksicht auf die Theorie des Ackerbaus: Prof. *Grisebach*, Mont., Dienst., Donnerst. Freit., 4 Uhr, verbunden mit mikroskopischen Demonstrationen im physiologischen Institut, Sonnabend um 10 Uhr.

Geographie der Pflanzen: Prof. *Grisebach*, Donnerst. und Freit. 5 Uhr.

Naturgeschichte der kryptogamischen Gewächse: Prof. *Bartling*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 2 Uhr.

Demonstrationen in den Gewächshäusern des botanischen Gartens giebt *Derselbe* Mittw. 11 Uhr, öffentlich.

Botanische Excursionen in bisheriger Weise *Derselbe*.

Ausgewählte Abschnitte aus der Mineralogie: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, fünf Stunden, 11 Uhr.

Ueber die Geologie der Kohlenformation: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, öffentlich, Donnerst. 6 Uhr.

Krystallographie, einschliesslich der Krystalloptik: Prof. *Listing*, Mont., Dienst., Donnerst.. Freit., 4 Uhr.

Palaeontologie: Prof. *von Seebach*, fünf Stunden, 9 Uhr.

Das mineralogische Praktikum hält Prof. *Sartorius von Waltershausen*, Donnerst. Nachmittag und Sonnabend 10—12 Uhr.

Petrographische und palaeontologische Uebungen leitet Prof. *von Seebach*, in gewohnter Weise, privatissime, aber unentgeltlich.

Physik, zweiter Theil, über Electricität, Magnetismus, Wärme und Licht: Prof. *Weber*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag 5—6 Uhr.

Elemente der praktischen Physik: Dr. *Riecke*, zwei Stunden.

Ueber das Auge und das Mikroskop: Prof. *Listing*, privatissime zu einer bequemen Stunde.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Laboratorium leitet Dr. *Riecke*.

Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und das Gesetz der Erhaltung der Kraft: Dr. *Klein*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Physikalisches Colloquium: Prof. *Listing*, Sonnabend, 10—12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing*, Mittwoch um 11 Uhr. Siehe *Mathematik und Astronomie* S. 358.

Chemie: Prof. *Wöhler*, sechs Stunden, um 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Donnerstag, 12 Uhr.

Organische Chemie, speciell für Mediciner in später zu bestimmenden Stunden, Prof. *von Uslar*.

Organische Chemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 Stunden, 8 Uhr.

Organisch-technische Chemie: Dr. *Tollens*, zwei Stunden, 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, vier Stunden, 4 Uhr.

Agriculturchemie (speciell: Chemie des Bodens): Dr. *Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, in zu bestimmenden Stunden.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Freitag, 12 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Vorlesungen über Pharmacie s. unter *Medicin* S. 355.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Dr. *Wagner* leitet die Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) von 8—12 und 2—4 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (mit Ausschl. d. Sonnb.) 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Geographie und Statistik von Süd-Amerika: Prof. *Wappäus*, vier Stunden, 11 Uhr.

Paläographie und Diplomatik, mit praktischen Uebungen: Prof. *W. Müller*, Dienst., Mittw., Freit., 12 Uhr.

Grundzüge der Urkundenlehre und Uebungen in der Urkundenkritik: Dr. *Steindorff*, drei Stunden, 9 Uhr.

Griechische Geschichte: Prof. *Wachsmuth*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 12 Uhr.

Geschichte unserer Zeit seit 1815: Prof. *Pauli*, fünf Stunden, 9 Uhr.

Allgemeine Geschichte der Gegenwart: Prof. *Droysen*, vier Stunden, 5 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: Prof. *Waitz*, vier Stunden, 8 Uhr.

Deutsche Geschichte: Prof. *Waitz*, fünf Stunden, 4 Uhr.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag, 6 Uhr, öffentlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Droysen*, eine Stunde, öffentlich.

Kirchengeschichte und Geschichte der Juden: s. unter *Theologie* S. 351. 352.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Encyclopädie der Staatswissenschaften: Dr. *Dede*, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Volkswirthschaftspolitik: Prof. *Hanssen*, vier Stunden, 3 Uhr.

Finanzwissenschaft: *Derselbe*, vier Stunden, 5 Uhr.

Einleitung in die Statistik: Prof. *Wappäus*, Sonnabend 11 Uhr, öffentlich.

Statistik von Südamerika: s. *Historische Wiss.* S. 361.

Geschichte des Handels und der Industrie: Dr. *Dede*, Mittw., 12 Uhr, unentgeltlich.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: s. *Historische Wiss.* S. 361.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Griepenkerl*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit., 5 Uhr.

Die Ackerbausysteme: Prof. *Griepenkerl*, in zwei passenden Stunden, öffentlich.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre: *Derselbe*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit., 12 Uhr. — Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Drechsler*, vier Stunden, 4 Uhr.

Landwirthschaftliche Fütterungslehre: Prof. *Henneberg*, vier Stunden, Mittwoch und Sonnabend, 11—1 Uhr.

Ueber Pachtverträge: Prof. *Drechsler*, eine Stunde, 4 Uhr.

Landwirthschaftliches Praktikum: Uebungen im Anfertigen landwirthschaftlicher Berechnungen: Prof. *Drechsler*, in zu bestimmenden Stunden.

Theorie des Ackerbaus: S. *Naturwissenschaften* S. 359.

Agriculturchemie s. unter *Naturwissenschaften* S. 360.

Anatomie der Hausthiere, Pferde- und Rindviehkunde; Hufbeschlag s. *Medicin* S. 357.

Landwirthschaftsrecht s. *Rechtswissenschaft* S. 354.

Literärgeschichte.

Literargeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur, erster Theil: Prof. *Schweiger*, vier Stunden.

Geschichte der römischen Historiographie: Dr. *Hirschfeld*, Mittwoch und Sonnabend, 12 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung: Assessor *Tittmann*, 10 Uhr.

Geschichte der althochdeutschen Literatur: s. *Deutsche Sprache* S. 364.

Geschichte der deutschen Nationalliteratur von Lessings Zeit bis zur Gegenwart: Prof. *Bohtz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr.

Alterthumskunde.

Das Theaterwesen der griechischen Tragiker wird erörtern und Sophokles Antigone erklären: Prof. *Wieseler*, vier oder fünf Stunden, 5 Uhr.

Ueber den troischen Sagenkreis: Dr. *Matz*, Mittw. u. Sonnab. 12 Uhr.

Im k. archäologischen Seminar lässt Prof. *Wieseler* öffentlich einige wichtige Partien der scenischen Archäologie behandeln, Mittw. 5 Uhr, und ausgewählte Kunstwerke erklären, Sonnabend, 12 Uhr. Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Grundriss der deutschen Mythologie: Dr. *Wilken*, Mont. u. Donnerst. 6 Uhr.

Die deutsche Heldensage: Assessor *Tittmann*, um 5 Uhr.

Vergleichende Sprachkunde.

Vergleichende Grammatik der indogermanischen Sprachen: Prof. *Benfey*, Mont., Dienst., Donn. und Freitag, um 3 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament siehe unter *Theologie* S. 351—353.

Hebräische Grammatik: s. *Theologie* S. 353.

Abriss der Grammatik der aramäischen Mundart des A. T. und Erklärung der aramäischen Stücke in demselben: Dr. *Hoffmann*, 2 Stunden, unentgeltlich.

In seiner semitischen Gesellschaft lässt Prof. *de Lagarde* öffentlich, in noch zu bestimmenden Stunden, entweder den Midrasch Bereschith Rabba oder die syrische Uebersetzung der Recognitionen des Clemens oder die arabische Uebersetzung der Evangelien erklären.

Arabisch (Arnold's Chrestomathie): Dr. *Hoffmann*, drei Stunden.

Anfangsgründe des Arabischen: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Unterricht in der äthiopischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Mittw. Freit., 4 Uhr.

Erklärung von Sanskritgedichten: Prof. *Benfey*, Dienst. u. Donnerst. um 4 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Elemente der griechischen und lateinischen Epigra-

phik: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn., Freit., um 9 Uhr.

Griechische Metrik: Prof. *von Leutsch*, vier Stunden, 10 Uhr.

Pindars Epinikien: Prof. *von Leutsch*, vier Stunden, 3 Uhr.

Theokrits Idyllen: Dr. *Matz*, Mont. u. Donn., 4 Uhr.

Platon's Republik: Dr. *Peipers*, vier Stunden, 8 Uhr.

Sophokles Antigone s. *Alterthumskunde* S. 362.

Platons Theaetet und Aristoteles Metaphysik s. *Philosophie* S. 357. 358.

Terentius Adelphoe und Heautontimorumenos: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 2 Uhr.

Cicero de natura deorum Buch I: Dr. *Peipers*, Mittw. 5 Uhr, unentgeltlich.

Die Briefe des jüngern Plinius: Dr. *Hirschfeld*, Donn. 5 Uhr, unentgeltlich.

Im k. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *von Leutsch*, Mittwoch von 11—1 Uhr; lässt Aristoteles Rhetorik Buch I erklären Prof. *Sauppe*, Montag und Dienstag, 11 Uhr; lässt Cicero de Republica erklären Prof. *Wachsmuth*, Donnerstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminarium leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *von Leutsch* (Mittw. 9 Uhr), *Sauppe* (Mittw. 2 Uhr) und *Wachsmuth*, Sonnab. 11 Uhr; lässt ausgewählte Fabeln des Babrios Prof. *Sauppe*, Mittw. 2 Uhr, Cicero's Somnium Scipionis Prof. *Wachsmuth* erklären, Sonnab. 11 Uhr, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Grundzüge der altnordischen Sprache: Prof. *W. Müller*, Mont. u. Donn. 10 Uhr.

Uebersicht der althochdeutschen Literatur und Erklärung der wichtigsten ahd. Sprachdenkmäler: Dr. *Wilken*, Mittwoch und Sonnabend 9 Uhr.

Das Nibelungenlied mit einer Einleitung über die deutsche Heldensage: Prof. *Wilh. Müller*, vier Stunden, 3 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet *Derselbe*.

Zur Leitung einer altdeutschen Gesellschaft erbietet sich Dr. *Wilken*.

Geschichte der deutschen Literatur: s. unter *Literärgeschichte*, S. 362. Die deutsche Heldensage: s. *Alterthumskunde* S. 363.

Neuere Sprachen.

Angelsächsische Grammatik und Erklärung des Beowulf: Prof. *Theod. Müller*, Mont., Dienst. Donn., 9 Uhr.

Uebungen in der englischen Sprache: *Derselbe*, Donn., Freit. und Sonnab., 12 Uhr.

Uebungen in der französischen Sprache: *Derselbe*, Mont., Dienst., Mittw., 12 Uhr.

Eine romanische Societät leitet *Derselbe*, Freit., 9 Uhr, öffentlich.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ausgewählte Denkmäler der christlichen Kunst erklärt Prof. *Unger*.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape* und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der modernen Musik: Prof. *Krüger*, zwei Stunden, 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen, Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., Sonnab., Morgens von 8—12 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonn-

abend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

9. August. **№ 15.** 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. August.

Stern, über das Sterblichkeitsgesetz, von Prof. Hattendorf.
Clebsch, über Nicht-Euklidische Geometrie, von Dr. Klein.
Derselbe, über das Dirichlet'sche Princip, von Hrn. Heine.
Waitz, Ueber die handschriftliche Ueberlieferung des Continuator Reginonis.
Listing, über das Reflexionsprisma.
Wöhler, chemische Mittheilungen von Prof. Fittig.

Ueber die handschriftliche Ueberlieferung des Continuator Reginonis.

Von

G. Waitz.

Herr Oberbibliothekar Professor Halm hat die Güte gehabt, auf meine Bitte die wichtige Handschrift der Münchener Bibliothek, welche ausser dem Original des Liudprand auch die Chronik des Regino mit der Fortsetzung enthält, (Lat. Nr. 6338, Fris. 188) der hiesigen Bibliothek zu übersenden, zunächst in dem Anlass, dass einer meiner Zuhörer, Hr. stud. hist. Ermisch, das Bedürfnis fühlte, für eine Untersuchung

30

über die Quellen des älteren Theils der Chronik sich auf einen sicheren handschriftlich beglaubigten Text zu stützen. Ich benutzte diese Gelegenheit, um die Fortsetzung mit der Handschrift zu vergleichen, die ungleich älter und besser ist als die welche Pertz bei seiner Ausgabe benutzte. Diese Vergleichung hat es mir in hohem Grade wahrscheinlich gemacht, dass alle uns erhaltenen Handschriften und ebenso die editio princeps direct oder indirect aus dem Münchener Codex stammen.

Dieser ist ohne Zweifel noch im 10. Jahrhundert geschrieben, wie es scheint quaternionenweise und nicht von Einer Hand, im Ganzen gut und selbst zierlich, doch nicht ohne einzelne Fehler, von denen einige gleich berichtigt sind, andere später — im 11. Jahrhundert, wie es scheint — eine Verbesserung erhalten haben, einzelne ohne solche geblieben sind, aber meist auch leicht zu emendieren sind; so 948: prædidente st. presidente; 951: molesti st. molestiae; 952: menso st. mense. Das haben auch spätere Abschreiber berichtigen können. Wenn aber M. z. B. 951 schrieb: per trienium, statt: per trientum, so haben daraus die späteren (Pertz nennt 5. 7. 9. 11. 12; 6 ist hier nicht vorhanden, 8 der Ann. Saxo) 'triennium' gemacht; 961 ist dasselbe Wort 'trentum' geschrieben, und so in 7. 9. 11. 12 wiedergegeben; eine spätere Hand corrigierte 'Tridentum', aber undeutlich und so, dass daraus leicht das 'terrentum' in 5 (der editio princeps) werden konnte [1]; 962 fehlt in

[1] Die Worte 967: et Lucaniae, die in 5 fehlen, sind in M. durch Beschädigung des letzten Blatts so undeutlich geworden, dass der Herausgeber oder ein späterer Abschreiber, dem er folgte (s. Archiv VII, S. 388 über

M. zu Anfang Papiae, und ebenso in den Texten 5. 7. 9—12; 939 hat M. Danemar statt Dancmar, und ebenso 5. 7. 9. 10; 11 und 12 statt dessen nur weiter corrumpiert: Denemar; zu Anfang des Jahres findet sich 'inimicis' statt 'inimicitiis', das P. aus 5. 7. 9. 12 anführt, auch in M., wahrscheinlich auch in 10. 11, wie denn 10. 11. 12 unter sich auf das nächste verwandt und ihre Lesarten nur nicht vollständig verzeichnet sind.

Es sind die Handschriften, welche schon Pertz auf den Münchener Codex zurückgeführt hat (S. 542); da er diese aber nicht selbst vor Augen hatte und bei der Stelle, die er dafür anführt, sich nur auf Docens Mittheilung stützte, so ist das Verhältnis nicht ganz richtig angegeben. Es handelt sich um den Text des Regino selbst zum Jahr 899, wo die genannten drei Handschriften statt der Worte über das Begräbniss des Kaisers Arnulf: sepultusque est honorifice in Odingas, ubi et pater ejus tumulatus jacet, die Angabe bringen: s. e. h. in Radispona in basilica sancti Hemmerammi martyris, quem ipse dum vixit multum veneratus est. Pertz nimmt an, dass diese Stelle so auch in M. gestanden und von da in 10—12 übergegangen sei. Allerdings sind die Worte: sepultus — jacet (ebenso wie das Vorhergehende) auf radiertem Grunde geschrieben, aber offenbar von einer gleichzeitigen Hand, wahrscheinlich derselben, von der das Vorhergehende und Folgende ist; der Raum den sie einnehmen ist auch zu klein, als dass dort die längere Mittheilung von 10—12 gestanden haben könnte. Die Bemerkung am Rand: perdes omnes

den Codex Peutingeri, jetzt im Britt. Museum Harlei. Nr. 3676 s. XVI), sie nicht wohl lesen konnte.

qui loquuntur mendatium, ist aber später, aus dem 11. Jahrhundert, und kann nicht zu der Aenderung im Text, der Herstellung etwa von Oetting statt St. Emmeram Anlass gegeben haben, erscheint eher wie eine Kritik jener Angabe zu Gunsten der hier geltenden Annahme.

An einer anderen Stelle weicht 7 (d. h. eine Wiener, früher Admonter Handschrift) ab: nur sie hat 944 die Worte: Bajovariis et, und: in loco Weles, die in M. wie in allen andern Codices fehlen und die nicht in den Text aufgenommen werden durften, da sie offenbar ein in Oesterreich gemachter späterer Zusatz sind. Aber gleich darauf stimmt 7 doch mit M. in der Schreibung 'Ydone' überein; wenn 950 (Note x) 7 quo hat, so M. $\overline{\text{quo}}$ (= quoniam); so dass über die Abhängigkeit im allgemeinen kein Zweifel sein kann.

Am wenigsten deutlich ist das Verhältnis bei 6, einer früher Ottenburger, jetzt Pariser Handschrift, und ihren Ableitungen, aus denen Pertz nur einzelne Lesarten angeführt hat; einige mit Unrecht oder durch Druckfehler, wie 947 N. e; 950 N. b; denn die Handschrift endet schon am Anfang des Jahres 939 (S. 618 N. i). Sie kommt also gar nicht in Betracht für eine Frage, die ein besonderes Interesse hat.

Bekanntlich fügt der Annalista Saxo der Erzählung des Cont. Reginonis, die er (vielleicht durch Vermittelung der Annales Nienburgenses; s. Günther, Die Chronik der Magdeburger Erzbischöfe S. 64) fast vollständig in seine grosse Compilation aufgenommen hat, am Ende des Jahres 967 einige Sätze hinzu, die sich auf das engste an das Vorhergehende anschliessen, die Erzählung um einige Monate, bis zum Ende des Jahres fortführen. Es musste nach der ganzen

Beschaffenheit dieser Stelle, bei der Unmöglichkeit dafür eine andere Herkunft anzugeben, im höchsten Grade wahrscheinlich dünken, dass sie dem Continuator angehöre, und dieser meiner Vermuthung (SS. VI, S. 620) sind Büdinger (Uebersetzung in den Geschichtsschreibern der Deutschen Vorzeit X. Jahrh. I, S. 32), Wattenbach (Geschichtsquellen 2. Aufl. S. 232) und Giesebrecht (Kaisergeschichte 3. Aufl. I, S. 834) beigetreten. Dem konnte aber entgegenzustehen scheinen, wie Pertz geltend gemacht hat (Anmerk. zu Büdingers Uebersetzung), dass die doch zahlreich vorhandenen Handschriften des Continuator alle diese Stelle nicht haben. Nun wird sich das erklären. Der Münchener Codex schliesst f. 197' am Ende eines Quaternio mit den Worten, die das Ende unserer Handschriften und Ausgaben bilden: in Augusta civitate celebravit. Aber in keiner Weise ist angedeutet, dass da das Werk abgeschlossen; das 'celebravit' ist unter der letzten Zeile geschrieben, wie es auch f. 169', geschehen[1], wenn mit einem Wort oder Worttheil ein Satz geschlossen werden konnte. f. 141' sind die Worte: tulum sancti Petri predictae metropolis (Regino 869, SS. I, S. 581) unter den liniierten Zeilen geschrieben. Hier folgten dem Quaternio (X) zwei Blätter, von denen das eine am hintern Einband angeklebt, das andere verloren ist. So war nach f. 197 (Schluss von Quat. XVII) ohne Zweifel auch noch ein Blatt angefügt, das den Schluss des Werks enthielt, aber früh verloren ging, ehe die anderen Handschriften daraus abgeschrieben wurden.

1) f. 149 steht 'fuit' über die letzte Zeile hinaus am innern Rand.

Es fehlen der Handschrift ganz die Quaternionen 2—4; Hr. Ermisch hält es für wahrscheinlich, dass auch diese schon im 11. Jahrhundert verloren waren; es würde sich fragen, inwieweit diese Lücke sich auch in den übrigen Handschriften mit der Fortsetzung zeigt; nach den spärlichen Varianten ist es bei 6 nicht der Fall; die editio princeps (5) hat für den Regino jedenfalls noch eine andere Handschrift benutzt, also handelt es sich nur um 7. 9—12 und die ihnen entsprechenden Codices, die bisher nicht näher untersucht sind. Sollte sich aber in dieser Beziehung auch ein anderes Resultat ergeben, so würde das die hier vertretene Ansicht nicht erschüttern, da das Blatt am Ende natürlich auch früher verloren gehen konnte, als die Quaternionen (resp. das eine fehlende Blatt) in der Mitte.

Dass die Münchener Handschrift auch für die Constituierung des Texts im einzelnen eine besondere Bedeutung haben muss, versteht sich nach dem Gesagten von selbst [1]). Doch bezieht es sich mit Ausnahme von 944 meistens nur auf Worte und Formen. Diese sind vielfach alterthümlicher: Hlotharius, Hlotharienses; Wiziburg; stets Radasbona; 962 und 963: Gard; 962 (S. 623 Z. 8): undequesecus, 947 hat M.: Magodeburg, 953 Droomanni, und man darf wohl annehmen, dass diese Formen dem Verf. angehören; 948 ist zu lesen: a 34 episcopis; 954 (S. 622 Z. 38) ist 'et' zu streichen; 964 (S. 626 Z. 37) 'est' vor '9. Kal. Jul.' einzufügen. Der Satz: Otbertus — occiditur, gehört zu 913, und da die Ausgabe hier unrichtig über M. (cod. Frising.) berichtet, wird es sich wohl

1) Für die willkürlichen Aenderungsvorschläge von Maurenbrecher, De historicis S. 16 N. 82, findet sich natürlich nicht der geringste Anhalt.

ebenso mit 7. 9—12 verhalten; 932 ist in M. leer, der Satz, den die Ausgabe hierhin stellt, steht unter 933; und ebenso in 5 und im Ann. Saxo; vielleicht dass andere Ableitungen hier die Reihenfolge verwirrt haben, da nach Pertz einige (7. 11) 936 auslassen; in der Handschrift der zu Grunde liegenden Ann. Augienses gehört die Stelle zu 937. — Ein verbesserter Abdruck des Continuator unter Zugrundelegung der Münchener Handschrift wäre wünschenswerth.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juni 1871.

(Fortsetzung.)

Register zu den Bänden 51—60 der Sitzungsberichte der mathem.-naturwiss. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. VI. Ebd. 1870. 8.

Neues Lausitzisches Magazin, herausg. von E. E. Struve. Bd. 48. Hft. 1. Görlitz 1871. 8.

Verhandlungen des naturf. Vereines in Brünn. Bd. VIII. Hft. 1. 2. Brünn 1870. 8.

Mittheilungen des Vereines für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. VII. Nr. 5—8. — Jahrg. VIII. Nr. 1—8. — Jahrg. IX. Nr. 1—6. Prag u. Leipzig 1869. 71. 8.

VII. VIII. Jahresbericht des Vereines für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Prag 1869. 8.

Mitglieder-Verzeichniss des Vereines für Geschichte der Deutschen in Böhmen 1869. 70. 8.

J. U. Dr. V. John, die Vorschuss- und Kredit-Vereine (Volksbanken) in Böhmen. Ebd. 1870. 8.

General-Bericht über die Europäische Gradmessung, für das Jahr 1870. Berlin 1871. 4.

Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Redig. von Dr. C. G. Giebel und Dr. M. Siewert. Neue Folge. 1870. Bd. 2. Hft. 7—12. Ebd. 1870. 8.

Charles Schoebel, étude sur le rituel du respect social dans l'état Brahmanique. Paris 1870. 8.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. — IV. 8.

Annalen der Oenologie. Wissenschaftliche Zeitschrift für Weinbau, Weinbehandlung und Weinverwerthung. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausg. von Dr. A. Blankenhorn und Dr. L. Rösler. Bd. I. Hft. 1. 2. 3. 4. Bd. II. Hft. 1. Heidelberg 1869. 70. 8.

Fr. Toczynski, über die Platincyanide und Tartrate des Berylliums. Dorpat 1871. 8.

Mémoires de l'Académie Imp. de St. Pétersbourg. VII. série. T. XVI. Nr. 1—8. St. Pétersbourg 1870. 4.

Bulletin de l'Académie Imp. de St. Pétersbourg. T. XV. Nr. 3. 4. 5. Bd. XVI. Nr. 1.

Nature 86—91.

Juli 1871.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1871. Bd. XXI. Nr. 1. Jan.—März. Wien 1871. gr. 8.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Nr. 1—5. Ebd. 1871. gr. 8.

Franz Ritter v. Hauer, zur Erinnerung an Wilhelm Haidinger. Ebd. gr. 8.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Presburg. Neue Folge. Hft. 1. Jahrg. 1869—1870. Presburg 1871. 8.

Monatsbericht der k. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Mai 1871.

A. de la Rive et E. Sarasin, de l'action du magnétisme sur les gaz traversés par des décharges électriques. 8.

Kleine Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Emden. XV. Emden 1871. 8.

I. Jahresbericht des Provinzial-Museums für Kunst und Wissenschaft in Hannover. Hannover 1871. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

16. August. №. 16. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Prinzipes.

Von

E. Heine, corresp. Mitgliede.

Im Folgenden sollen einige Voraussetzungen und Schlüsse geprüft werden, auf denen, nach den vorliegenden Mittheilungen, der Beweis des Dirichletschen Prinzipes in der Lehre vom Potentiale beruht.

1) Die erste Voraussetzung besteht in Folgendem: Die auf der Begrenzung des Raumes t, welche eine geschlossene Fläche bildet, gegebene continuirliche und einwerthige Function kann in das Innere und ebenso in den äusseren Raum, wenigstens auf eine Art, derartig fortgesetzt werden, dass die Fortsetzung dieselben Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit erfüllt, wie das Potential der Vertheilung einer Masse auf der Oberfläche.

Die im Folgenden nicht erklärten Bezeichnungen sind dieselben wie bei Gauss in dem Werke: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf

die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte; ferner wird, wie üblich,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

durch $\triangle V$ bezeichnet.

Die Continuitäts-Bedingungen, welche, wie man voraussetzt, wenigstens eine Fortsetzung V erfüllt, bestehen also darin, dass V im ganzen Raume stetig ist, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ und $\frac{dV}{dz}$ nur bis zur Grenzfläche, sowohl im äusseren als im inneren Raume. (Beweisen will man bekanntlich, dass es auch eine Fortsetzung V_1 giebt, für welche noch ausserdem $\triangle V_1 = 0$).

Dirichlet selbst benutzt das Prinzip bei der Theorie des Potentiales zum Beweise desjenigen Satzes, mit dem Gauss seine oben genannte Arbeit krönt (Nr. 36), nach welchem eine Massenvertheilung in einem körperlichen Raume sich durch eine Belegung der Oberfläche mit Masse ersetzen lässt. Die an der Oberfläche gegebene Function ist bei diesem Beweise nicht völlig allgemein; sie ist nämlich gleich dem Werthe, welchen das Potential $\int \frac{kdt}{r}$ der gegebenen, im körperlichen Raume vertheilten Masse, an der Oberfläche annimmt. Sie kann also wirklich, den Bedingungen gemäss, fortgesetzt werden, nämlich durch dieses Potential selbst.

Um dann nachzuweisen, dass die gesammte Masse zur Belegung verwandt werden kann, muss man die Fortsetzung auch noch für den Fall bilden, dass die für die Oberfläche gegebene

Function constant, $= 1$ ist. Durch $V = 1$ lässt sich diese Function in den inneren Raum fortsetzen, aber nicht durch denselben Werth in den äusseren Raum, wegen der Bedingung der Endlichkeit (xV soll endlich bleiben). Nach den Prinzipien, welche ich am Schlusse einer brieflichen Mittheilung über Variationsrechnung in den mathematischen Annalen Bd. 1, S. 191 andeutete, finde ich diese Fortsetzung, indem ich um den Anfangspunct als Mittelpunct eine Kugel mit dem Radius a beschreibe, welche der Raum t ganz einschliesst. Bezeichnet ϱ die Entfernung eines beliebigen Punctes im Raume vom Anfangspuncte, so kann man als Fortsetzung folgende Function V betrachten: Von der Begrenzung des Körpers t bis $\varrho = a$ sei $V = 1$; von $\varrho = a$ bis $\varrho = \infty$ sei

$$V = 1 - \frac{(\varrho^2 - a^2)^3}{\varrho^6}.$$

Diese einwerthige Function genügt allen Bedingungen im äusseren Raume, wenngleich sie daselbst nicht im ganzen Verlaufe, durch ein und dasselbe analytische Gesetz dargestellt wird. (Eine solche Forderung ist aber auch eingestellt). In der That sind auch ihre Differentialquotienten bis zu den zweiten incl., nach x, y, z, ebenso wie die Function selbst, einwerthig und stetig, was man deutlich einsieht, wenn man an den Uebergangs-Stellen auf die Definition des Differentialquotienten zurückgeht.

Wegen der Wichtigkeit der von C. Neumann mit dem Namen der Green'schen belegten Function will ich noch zeigen, dass die in Rede stehende Vorbedingung der Existenz auch für sie erfüllt werden kann, wie auch t beschaf-

fen ist, wenn die Begrenzung nur den Bedingungen der Nr. 16 bei Gauss genügt.

Sei dazu A ein gegebener fester Punct innerhalb t oder ausserhalb; P bezeichne die Puncte im Raume, P_0 an der begrenzenden Fläche; es sei $AP = r$, $AP_0 = r_0$. Es soll die Function, welche an der Oberfläche $\frac{1}{r_0}$ ist, unseren Bedingungen gemäss fortgesetzt werden. Dies hat nur für den inneren resp. äusseren Raum Schwierigkeiten, da für die Puncte P des äusseren resp. inneren Raumes $\frac{1}{r}$ eine brauchbare Fortsetzung ist. Legt man nun um A als Mittelpunct eine Kugel mit einem beliebigen Radius α, die aber ganz innerhalb, resp. ganz ausserhalb des Raumes t liegt, und bezeichnet mit U im Innern der Kugel die Grösse 1, zwischen der Kugeloberfläche und der Begrenzung von t aber Null, so wird

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^6 - \alpha^6)^3}{r \cdot \alpha^{18}} \, U$$

eine Fortsetzung in den inneren resp. den äusseren Raum, welche allen Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit genügt.

Abgesehen von den Fällen, in denen mehrere geschlossene Flächen auftreten, und die ich durch die gleichen Prinzipien erledigen kann, hat Dirichlet auch in den Anwendungen auf Electrostatik nur solche Functionen wie die hier besprochenen von der Oberfläche in's Innere fortzusetzen. Die Richtigkeit der ersten Annahme in den bei ihm vorkommenden Fällen ist daher nachgewiesen.

2) Es wird ferner vorausgesetzt, dass es mehr als eine, und daher unendlich viele, den gleichen Bedingungen wie oben genügende Fortsetzungen giebt. Ist eine erste Fortsetzung V, so lässt sich offenbar jede andere als $V + Z$ darstellen, wo Z alle, den gleichen Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit genügende Fortsetzungen der für die Oberfläche gegebenen Function Null bezeichnet.

Solcher Z giebt es immer unendlich viele. Ist nämlich $\varphi(x, y, z) = 0$ irgend eine beliebige geschlossene algebraische Fläche, z. B. eine Kugel, die ganz innerhalb oder ganz ausserhalb t liegt (es sei φ eine ganze Function von x, y, z); ist ferner U irgend eine mit ihren ersten beiden Differentialquotienten innerhalb des von $\varphi = 0$ umschlossenen Raumes einwerthige, stetige und endliche Function, ausserhalb desselben aber 0, so wird,

$$W = \varphi^3 U$$

gesetzt, $Z = W$ immer eine von den Functionen Z sein. Es ist klar, dass unendlich viele U, selbst bei festgehaltenem φ, existiren; eine Function U findet man schon, wenn man im Innern des durch $\varphi = 0$ begrenzten Raumes $U = 1$ setzt. Man denke sich aber diesen Körperraum irgendwie continuirlich mit Masse erfüllt, und kann dann für U in jedem Puncte des Inneren das Potential der fingirten Masse, in demselben Puncte, nehmen.

Die zweite Voraussetzung ist daher in denselben Fällen wie die erste berechtigt.

3) Es folgt nun bei Dirichlet eine Annahme, auf welche ich hier nicht näher eingehen, und auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen denke, dass es nämlich eine oder

einige Fortsetzungen in den inneren Raum giebt — Aehnliches gilt für den äusseren Raum; hier wird der Kürze halber nur der innere betrachtet — welche

$$\int\left(\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right)dt$$

zu einem Minimum machen. Hieraus ergiebt sich dann, wenigstens eine von diesen Fortsetzungen, V_1, müsse so beschaffen sein, dass für jede Function Z (m. s. Nr. 2) das Integral

$$\int Z\triangle V_1\,dt$$

verschwindet. Hieraus will man schliessen, im Raume t müsse $\triangle V_1$ im allgemeinen Null sein, d. h. mit Ausnahme höchstens von Puncten, Linien und Flächen. Dieser Schluss soll hier geprüft werden.

Er ist nunmehr an den Stellen des Raumes t erlaubt, wo die Function $\triangle V_1$ ihr Zeichen nicht unendlich oft in jedem noch so kleinen Körpertheile ändert oder wenigstens diese Eigenschaft besitzt, nachdem man Puncte, Linien und Flächen ausgeschieden hat. Man kann dann nämlich die Stücke, in welchen $\triangle V_1$ das gleiche Zeichen behält, beliebig nahe durch Körper mit algebraischer Begrenzung $\varphi = 0$, z. B. mit Kugeln ausfüllen und für Z eine Function W aus Nr. 2 wählen, die in dem Raume in welchem sie nicht verschwindet ihr Zeichen nicht wechselt, so dass das Integral sich allein auf den Theil bezieht, der von einer Fläche $\varphi = 0$ eingeschlossen ist, und in welchem daher $W\triangle V_1$ sein Zeichen nicht wechselt, woraus folgt, dass $\triangle V_1$ im allgemeinen Null ist.

In allen Fällen die in Nr. 1 erwähnt sind, kann man sich denken, dass $\triangle V_1$ unseren Voraussetzungen in Bezug auf die Zeichenwechsel entspricht. Die eine Fortsetzung V der an der Oberfläche gegebenen Function aus Nr. 1, die sich auf die Greensche Function bezieht, nämlich

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^6 - a^6)^3}{r \,.\, a^{18}} \,.\, U,$$

besitzt sie augenscheinlich, ebenso wie die andere, welche man dort findet, nämlich

$$V = 1 - \frac{(\varrho^2 - a^2)^3}{\varrho^6},$$

und ebenso wie das Körperpotential in Nr. 1

$$V = \int \frac{kdt}{r},$$

vorausgesetzt, dass sie in dem letzterem Falle der Dichtigkeit k der zu vertheilenden Masse, wo diese unstetig sein sollte, selbst zukommt. Sie darf daher z. B. keine magnetische sein, die aber bereits durch die Festsetzungen von Gauss über die Dichtigkeit in Nr. 9 ausgeschlossen ist, und selbst nach Aufhebung einiger Beschränkungen in Nr. 11 noch ausgeschlossen bleibt. Man kann freilich die Betrachtung von Potentialen magnetischer Massen, nachdem man sie durch Zusammenfassen von je zwei Gliedern der Summe $\Sigma \frac{\mu}{r}$ (s. Nr. 2 bei Gauss) in ein Integral verwandelt hat, auf die der Poten-

tiale von Massen mit continuirlicher Dichtigkeit zurückführen.

Ist also diese Art von Massen, auf welche die Untersuchungen von Gauss nicht überall anwendbar sein würden, ausgeschlossen, so besitzt $\triangle V$ in Nr. 1 überall die für $\triangle V_1$ geforderte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichenwechsel. Unter den Functionen W in Nr. 2 giebt es offenbar unendlich viele von solcher Beschaffenheit, dass $V + W$ dieselbe Eigenschaft besitzt. Stellt nun V_1 nicht das Minimum unter allen Fortsetzungen, sondern nur unter denen war, welche die erwähnte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichen besitzen, und deren es unendlich viele giebt, so ist für dieses V_2 demnach der Schluss dass $\triangle V_1$ im allgemeinen Null sei berechtigt.

Ueber die Ermittlung des Sterblichkeitsgesetzes aus gegebenen Beobachtungen.

Von

K. Hattendorff.

Das Problem, welches ich im Nachfolgenden behandeln will, lässt sich so in Worte fassen.

Es seien vorhanden n Gruppen von Lebenden, in jeder Gruppe Menschen, die an demselben Tage geboren sind, und zwar:

L_x	Lebende vom Alter x,			
L_{x+1}	»	»	»	$x+1$,
L_{x+2}	»	»	»	$x+2$,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
L_{x+n-1}	»	»	»	$x+n-1$.

Jede Gruppe werde während der nächsten Zeiteinheit der Beobachtung unterworfen, und es finde sich, dass nach Ablauf dieser Zeiteinheit gestorben sind

aus der ersten Gruppe T_x,
» » zweiten » T_{x+1},
» » dritten » T_{x+2},
. . . .
» » $n$ten » T_{x+n-1}.

Wie gross ist danach für einen Menschen vom Alter $x+k-1$ der wahrscheinlichste Werth der Wahrscheinlichkeit, im Laufe der nächsten Zeiteinheit zu sterben? k soll der Reihe nach die ganzen Zahlen 1, 2, . . . $n-1$, n bedeuten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch vom Alter $x+k-1$ im Laufe der nächsten Zeiteinheit sterbe, soll mit w_{x+k-1} bezeichnet werden. Dann ist die Wahrscheinlichkeit ~~ω~~, dass das beobachtete Ereigniss, als ein zukünftiges betrachtet, zu Stande komme:

$$(1)\ \omega = C w_x^{T_x} (1-w_x)^{L_x - T_x} . w_{x+1}^{T_{x+1}} (1-w_{x+1})^{L_{x+1} - T_{x+1}} \ldots,$$

wenn zur Abkürzung

$$(2)\ \frac{\Pi(L_x)}{\Pi(L_x - T_x)\Pi(T_x)} . \frac{\Pi(L_{x+1})}{\Pi(L_{x+1} - T_{x+1})\Pi(L_{x+1})} \ldots = C$$

gesetzt wird. Mit $\Pi(m)$ soll für ein ganzes

m das Product 1. 2. 3 ... m bezeichnet werden.

Je nachdem man in (1) den Grössen w_x, w_{x+1}, w_{x+2}, ... w_{x+n-1} andere und andere Werthe beilegt, wird auch der Werth von ω sich ändern. Da man die wahren Werthe von w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} nicht kennt, so wird man die wahrscheinlichsten suchen und als solche diejenigen ansehen, welche ω zu einem Maximum machen.

§. 1.

Die Bedingung dafür, dass ω zu einem Maximum werde, ist

$$(3)\ 0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{dw_{x+k-1}}{w_{x+k-1}(1-w_{x+k-1})} \left\{ T_{x+k1} - w_{x+k-1} L_{x+k-1} \right\}.$$

Diese Bedingungsgleichung lässt sich nur dann weiter behandeln, wenn man weiss, ob die Grössen w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} von einander unabhängig sind, oder ob sie noch besondere Bedingungsgleichungen erfüllen müssen. Die Anzahl solcher besonderen Bedingungsgleichungen ist höchstens $n-1$.

Hat man $n-r$ Bedingungsgleichungen, an welche die variabeln Grössen w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} (und folglich auch ihre wahrschein-

lichsten Werthe) geknüpft sind, $(n \geqq r > 0)$, so bleiben r von den Differentialen dw_x, dw_{x+1}, ... dw_{x+n-1} von einander unabhängig, und man kann die $n - r$ übrigen Differentiale durch jene r unabhängigen ausdrücken. Dadurch geht die Gleichung (3) in eine Form über, welche nur noch die r unabhängigen Differentiale enthält. Die Gleichung (3) zerfällt dann in r einzelne Gleichungen, die man erhält, wenn man einzeln gleich Null setzt, was in der umgeformten Gleichung (3) mit jedem einzelnen der r unabhängigen Differentiale multiplicirt ist. Nimmt man zu diesen r Gleichungen die gegebenen $n - r$ Bedingungsgleichungen, so hat man im Ganzen n Gleichungen, aus welchen die n wahrscheinlichsten Werthe von w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} als Unbekannte zu berechnen sind.

Diese wahrscheinlichsten Werthe sollen mit $[w_x]$, $[w_{x+1}]$, ... $[w_{x+n-1}]$ bezeichnet werden.

Sind die Veränderlichen w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} durch keine Bedingungsgleichung mit einander verbunden, so ergibt sich aus (3)

$$(4) \qquad [w_{x+k-1}] = \frac{T_{x+k-1}}{L_{x+k-1}} \text{ für } k = 1, 2, \ldots n.$$

Dies ist eine eindeutig bestimmte Lösung der Aufgabe. Ausser ihr gibt es aber für die Gleichung (3) noch $(n - 1)$ Klassen von Lösungen, je nachdem man die Veränderlichen w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} durch eine, zwei, drei,

... ($n-1$) Bedingungsgleichungen verbunden voraussetzt. Jede von diesen ($n-1$) Klassen enthält unendlich viele Lösungen, weil die Form der Bedingungsgleichungen unendlich mannichfaltig sein kann.

§. 2.

Die Gleichung (3) lässt sich durch Einführung neuer Variabeln in eine bequemere Form bringen. Ich setze

$$(5)\quad w_{x+k-1}=\frac{W}{W+W_k}\quad \text{für } k=1,2,\ldots n.$$

Dadurch geht die Gleichung (3) über in

$$(6)\quad 0=\frac{dW}{W}\cdot\sum_{k=1}^{n}(T_{x+k-1}-w_{x+k-1}L_{x+k-1})$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{dW_k}{W_k}(T_{x+k-1}-w_{x+k-1}L_{x+k-1}).$$

Hier ist nun aber zu beachten, dass die neue Gleichung (6) ($2n+1$) variable Grössen enthält. Die Gleichung (3) ist eine Differentialgleichung, welcher n variable Grössen in unendlicher Nähe ihrer wahrscheinlichsten Werthe Genüge leisten müssen. Soll demnach die Gleichung (6) dasselbe aussprechen wie die Gleichung (3) und nicht mehr, so müssen ausser (6) noch ($n+1$) Gleichungen vorhanden sein. In (5) sind aber nur n Gleichungen enthalten. Es fehlt also noch eine Gleichung oder — mit andern Worten — man kann die Grössen W, W_1, W_2, ... W_n

noch durch eine Gleichung in Zusammenhang bringen. Dies geschieht, indem man die Gleichung (6) in zwei Gleichungen zerlegt, nemlich

$$(7)\quad 0 = \frac{dW}{W} \sum_{k=1}^{n} (T_{x+k-1} - w_{x+k-1} . L_{x+k-1}),$$

$$(8)\quad 0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{dW_k}{W_k} (T_{x+k-1} - w_{x+k-1} . L_{x+k-1}).$$

Die Gleichung (7) kann in doppelter Weise erfüllt werden, entweder dadurch, dass man setzt:

$$(9)\qquad W = \text{const.},$$

oder dadurch, dass man setzt:

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{n} (T_{x+k-1} - [w_{x+k-1}]\, L_{x+k-1}) = 0.$$

Nimmt man die Gleichung (9), so ist in den Gleichungen (5) und (8) nichts weiter enthalten als eine Transformation, die immer zulässig ist, aber die Lösung um keinen Schritt fördert.

Nimmt man dagegen die Gleichung (10), so wird dadurch ein Zusammenhang in die wahrscheinlichsten Werthe von w_x, $w_{x+1}, \ldots w_{x+n-1}$ eingeführt, aber ein Zusammenhang, und das ist wichtig zu bemerken, der ganz von selbst stattfindet, wenn die eindeutig bestimmte Lösung (4) genommen wird, d. h. wenn äussere

Nebenbedingungen für die Grössen w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} nicht vorhanden sind.

Uebrigens ist es leicht, die Bedeutung der Gleichung (10) in Worten auszusprechen. Der Satz lautet:

Wenn die Anzahl der anfänglich Lebenden jeder Gruppe multiplicirt wird mit dem wahrscheinlichsten Werthe der Wahrscheinlichkeit zu sterben, so ist die Summe der Producte gleich der beobachteten Gesammtzahl der Sterbefälle aus allen Gruppen.

Das Problem selbst stellt keine Nebenbedingungen. Seine Lösung ist also in (4) enthalten, und die Gleichung (10) ist identisch erfüllt.

Es kann aber vorkommen (und davon soll weiter unten die Rede sein), dass man ausser (4) noch andere Lösungen sucht. Dann hat man von aussen Nebenbedingungen aufzustellen. Dadurch wird etwas Willkürliches in die Lösung hineingetragen. Jede Lösung, die von (4) abweicht, ist mit einer Willkürlichkeit behaftet.

Lässt man aber die Wahl von (höchstens $n - 1$) Nebenbedingungen zu, so ist es um so mehr erlaubt, die Gleichung (10) allgemein gültig hinzustellen, da sie bei der einzigen von Willkür freien Lösung identisch erfüllt ist. Selbst bei der äussersten Zahl von $(n - 1)$ Nebenbedingungen kann die Gleichung (10) noch aufgestellt werden. Dadurch wird jede der Grössen w_x, w_{x+1}, ... w_{x+n-1} constant, und das gibt eine particuläre Lösung der Gleichung (3).

§. 3.

Wie gross auch die Anzahl der Lebenden sei, welche man beobachtet: das Absterben ist ein intermittirender Vorgang. Die Zahl der Lebenden vermindert sich in gewissen einzelnen Zeitmomenten jedesmal wenigstens um eine Einheit. Je grösser aber die Anzahl der Lebenden ist, die eine Zeiteinheit hindurch beobachtet werden, um so näher rücken innerhalb dieses Intervalles die einzelnen Momente, in denen ein Todesfall eintritt. Je grösser die Anzahl der beobachteten Lebenden ist, um so eher wird man den wirklichen discontinuirlichen Vorgang durch einen ideellen stetigen Vorgang ersetzen dürfen. In diesem Sinne kann man darauf ausgehen, ein Sterblichkeitsgesetz durch die stetige Function

$$(11) \qquad y : y_0 = \lambda\,(x)$$

auszudrücken, welche für jedes Alter x das Verhältniss der noch Lebenden zu den ursprünglich vorhandenen vom Alter, 0 angibt. Man kann x als Abscisse und $y : y_0$ als Ordinate einer stetig verlaufenden Curve ansehen und diese die Curve der Lebenden nennen. Diese Curve ist in ihrem ganzen Verlaufe bekannt, wenn man für jedes Alter x die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Zeitelement zu sterben, kennt:

$$(12) \qquad w(x)\,dx = -d \lg \lambda\,(x).$$

Aus einer endlichen Zahl von Beobachtungen lässt sich die Curve (11) in ihrem stetigen Verlauf nicht herstellen. Man kann nur einzelne Punkte festlegen, die Abscissendifferenz dieser Punkte hat man zweckmässig zu wählen. Sie darf um so kleiner genommen werden, je grösser die Zahl der Beobachtungen ist. Man

wird sie z. B. je nach der Grösse des Beobachtungsmaterials gleich fünf Jahren, gleich einem Jahre, gleich einem Monate nehmen.

Sind die einzelnen Punkte der Curve (11) festgelegt, so folgt daraus noch nichts über den Verlauf der Curve zwischen zwei solchen Punkten. Man kann die Punkte in unendlich mannichfaltiger Weise durch Curven verbinden. Wie man aber auch die Curve legen mag, immer wird dadurch in den Verlauf der Function (12) zwischen zwei festgelegten Punkten der Curve (11) ein Zusammenhang gebracht, und zwar ein Zusammenhang, der aus dem Beobachtungsmaterial nicht herrührt.

Zunächst handelt es sich darum, mit Hülfe des Beobachtungsmaterials die Curvenpunkte selbst festzulegen, d. h. die Frage zu beantworten: wie finden sich

$$\lambda(x+1),\ \lambda(x+2),\ \ldots\ \lambda(x+n),$$

wenn $\lambda(x)$ bekannt ist?

§. 4.

Es soll zuerst vorausgesetzt werden, dass man die Lösung (4) nehmen dürfe. Dann ergibt sich ohne weiteres

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda(x+1) = \lambda(x)\cdot\left(1 - \dfrac{T_x}{L_x}\right), \\[2ex] \lambda(x+2) = \lambda(x+1)\left(1 - \dfrac{T_{x+1}}{L_{x+1}}\right), \\[2ex] \lambda(x+n) = \lambda(x+n-1)\left(1 - \dfrac{T_{x+n-1}}{L_{x+n-1}}\right). \end{cases}$$

Die Lebensalter x, $x + 1$, . . . $x + n$ sollen nicht weit auseinander liegen. Es ist demnach zu erwarten, dass die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe $[w_x]$, $[w_{x+1}]$, . . . $[w_{x+n-1}]$ nicht bedeutend von einander abweichen. Man wird die nach (4) berechneten Werthe als Ausdruck eines Sterblichkeitsgesetzes ansehen dürfen, wenn danach die Curve (12) zwischen x und $x + n$ einen Verlauf erhält, der von dem geradlinigen sich nicht zu sehr entfernt. Zeigt die Curve Maxima und Minima, sind einzelne von den nach (4) ermittelten Wahrscheinlichkeiten gleich Null, so hat man Grund, vorsichtig zu sein. Ehe man sich dazu entschliesst, in einem complicirten Verlauf der Curve zwischen den nahe gelegenen Altersjahren x und $x + n$ den Ausdruck eines Naturgesetzes zu suchen, wird man sich die Frage zu stellen haben, ob das Beobachtungsmaterial umfangreich genug ist, um daraus überhaupt ein Gesetz abzuleiten, oder doch ein Gesetz, das n Curvenpunkte festlegt.

§. 5.

Hiernach entsteht die zweite Frage: Wie kann man aus dem bekannten $\lambda(x)$ den wahrscheinlichsten Werth von $\lambda(x + n)$ berechnen, wenn das Beobachtungsmaterial zur Herstellung der Zwischenwerthe $\lambda(x + 1)$, $\lambda(x + 2)$, . . . $\lambda(x + n - 1)$ nicht ausreicht?

Die Gleichungen (13) geben durch Multiplication:

$$(14)\ \lambda(x+n) = \lambda(x) \cdot \left(1 - \frac{T_x}{L_x}\right)\left(1 - \frac{T_{x+1}}{L_{x+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{T_{x+n-1}}{L_{x+n-1}}\right).$$

Beachtet man, dass die sämmtlichen $\frac{T}{L}$ sehr kleine Brüche sind, so kann man leicht eine Näherungsformel geben. Man braucht nur in (14) auf beiden Seiten Logarithmen zu nehmen und die rechte Seite in eine Summe von Reihen zu verwandeln. Kehrt man dann zu den Zahlen selbst zurück und entwickelt die rechts auftretende Exponentialfunction in eine unendliche Reihe, so ergibt sich

$$(15)\quad \lambda(x+n) = \lambda(x)\left\{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{x+k-1}}{L_{x+k-1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T_{x+k-1}}{L_{x+k-1}}\right)^2 \ldots\right\}.$$

Die unerlässliche Bedingung dieses Verfahrens ist aber leicht einzusehen. Die Gleichung (14) setzt die Zulässigkeit der Gleichungen (13) voraus. Sobald unter den Gleichungen (13) auch nur eine einzige ist, gegen welche die im vorigen §. erörterten Bedenken sich erheben lassen, kann von der Gleichung (14) gar nicht mehr die Rede sein. Das eben betrachtete Verfahren ist also nur dann zulässig, wenn es überflüssig ist.

§. 6.

Soll die Aufgabe des vorigen §. überhaupt gelöst werden unter der Voraussetzung, dass einzelne der Gleichungen (13) oder alle unzulässig erscheinen, so wird es nothwendig, über den Verlauf der Curve (11) von x bis $x + n$ eine Hypothese aufzustellen. Ist n klein im

Vergleich zu x, so kann man die geradlinige Sehne an die Stelle der Curve treten lassen.

Dadurch kommt man zu der folgenden particulären Lösung der Aufgabe des §. 2:

$$(16) \qquad W_k = \text{const.} = 1 - k\,[W]$$

$$\text{für } k = 1, 2, 3, \ldots n.$$

In Folge davon wird

$$(17) \qquad [w_{x+k-1}] = \frac{[W]}{1 - k\,[W]},$$

und die Gleichung (10) geht über in

$$(18) \quad T = [W]\left\{L_x + \frac{L_{x+2}}{1-[W]} + \frac{L_{x+2}}{1-2[W]} + \ldots + \frac{L_{x+n-1}}{1-(n-1)[W]}\right\},$$

wobei zur Abkürzung

$$T_x + T_{x+1} + T_{x+2} + \ldots + T_{x+n-1} = T$$

gesetzt ist.

Hat man die Gleichung (18) gelöst, so ergibt sich

$$(19) \qquad \frac{\lambda\,(x+n)}{\lambda\,(x)} = 1 - n\,[W].$$

§. 7.

Die Gleichung (18) ist von der Form

$$(20) = z\left\{a_0 + \frac{a_1}{1-z} + \frac{a_2}{1-2z} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1-\overline{n-1}\,z}\right\}.$$

Sie lässt sich in die andere Form bringen

$$(21) \qquad F(z) = 0,$$

wenn man setzt:

$$P\left\{-T + z\left(a_0 + \frac{a_1}{1-z} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1-\overline{n-1}\,z}\right)\right\} = F(z),$$

$$P = (1-z)(1-2z)\ldots(1-\overline{n-1}\,z).$$

Die Grössen $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, T$ sind positiv. Beachtet man dieses, so ist es leicht, die Vorzeichen von $F(z)$ zu bestimmen für

$$z = 0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \infty.$$

Man findet abwechselnde Vorzeichen, und daraus geht hervor, dass zwischen je zwei benachbarten Zahlen der vorigen Reihe je eine Wurzel der Gleichung (18) oder (21) liegt. Für unsern Zweck ist die kleinste Wurzel zu wählen, die zwischen 0 und $\frac{1}{n-1}$ liegt. Die Gleichung 19 weist darauf hin, dass sie nicht grösser als $\frac{1}{n}$ sein wird.

Um die Gleichung (20) zu lösen, setze man folgendes System von Gleichungen an

$$(22)\; T = z_1 \left\{ a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \right\}$$

$$(23)\; T = z_2 \left\{ a_0 + \frac{a_1}{1 - z_1} + \frac{a_2}{1 - 2z_1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1 - \overline{n-1}\, z_1} \right\}$$

$$(24)\; T = z_3 \left\{ a_0 + \frac{a_1}{1 - z_2} + \frac{a_2}{1 - 2z_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1 - \overline{n-1}\, z_2} \right\}$$

$$(25)\; T = z_4 \left\{ a_0 + \frac{a_1}{1 - z_3} + \frac{a_2}{1 - 2z_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1 - \overline{n-1}\, z_3} \right\}$$

. . . . .

$$T = z_{k+1} \left\{ a_0 + \frac{a_1}{1 - z_k} + \frac{a_2}{1 - 2z_k} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1 - \overline{n-1}\, z_k} \right\}$$

Vergleicht man (22) mit (20), so zeigt sich, dass $z_1 > z$ ist. Nun ist zu unterscheiden, ob $z_1 < 1 : (n-1)$ ausfällt oder nicht. Im ersten Falle enthält die Klammer auf der rechten Seite von (23) lauter positive Glieder. Der Inbegriff der Klammer ist demnach in (23) positiv und grösser (20). In Folge davon ist

$$z_2 < z.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse ergiebt sich allgemein, dass z_1, z_3, z_5 . . . grösser sind als z, dagegen z_2, z_4, z_6 . . . kleiner als z.

Ferner ist aber die Klammer in (24) grösser als in (22) und deshalb $z_3 < z_1$. Dadurch wird die Klammer in (25) kleiner als in (23), folglich

$z_4 > z_2$. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse findet man:

$$z_1 > z_3 > z_5 > \ldots > z,$$

$$z_2 < z_4 < z_6 < \ldots < z.$$

Man kann danach z bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen.

Fällt in (22) $z_1 \geqq \frac{1}{n-1}$ aus, so setze man statt dessen $z_1 = \frac{1}{n}$ und beachte, dass nach der Natur der Aufgabe z nicht grösser als $\frac{1}{n}$ sein kann. Dann berechnet sich aus (23) z_2 entweder $= z = \frac{1}{n}$ oder $z_2 < z$. Im ersten Falle ist die Aufgabe gelöst. Im zweiten hat man:

$$z_1 > z > z_2.$$

Man wähle nun zwischen z_1 und z_2 ein beliebiges z_q und berechne z_{q+1} aus der Gleichung

$$(26) \qquad T =$$

$$z_{q+1}\left\{a_0 + \frac{a_1}{1-z_q} + \frac{a_2}{1-2z_q} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1-\overline{n-1}z_q}\right\}$$

Der Vergleich mit (23) lässt erkennen, dass $z_{q+1} > z_2$ ausfallen muss, und der Vergleich mit (20) zeigt, dass z zwischen z_q und z_{q+1} liegt. Ist nun $z_{q+1} < z_1$, so kann man mit

z_q und z_{1q+1} jetzt gerade so verfahren wie vorher mit z und z_2. Sollte aber $z_{q+1} > z_1$ ausgefallen sein, so lässt man z_1 und z_q an die Stelle von z_1 und z_2 treten.

§. 8.

Hat man die kleinste Wurzel $[W]$ der Gleichung (18) ermittelt, so ist:

$$n[W]$$

der wahrscheinlichste Werth der Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch vom Alter x das Alter $x+n$ nicht erlebe. Bestimmt man dann eine Grösse L aus der Gleichung:

$$L = \frac{T}{n[W]}, \tag{27}$$

so hat $n[W]$ aus dem wirklich benutzten Beobachtungsmaterial denselben Werth erhalten, als ob man L Lebende vom Alter x durch die nächstfolgenden n Zeiteinheiten beobachtet und die Zahl der Todesfälle $= T$ gefunden hätte.

Stellt man nun die Hypothese auf, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit $= \frac{T}{L} + u$ sei, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus L Lebenden vom Alter x in den nächsten n Zeiteinheiten T mit Tode abgehen:

$$\omega = \frac{\Pi(L)}{\Pi(T)\,\Pi(L-T)} \left(\frac{T}{L}+u\right)^T \left(\frac{L-T}{L}-u\right)^{L-T} \tag{28}$$

und die Wahrscheinlichkeit der gemachten Hypothese ist:

$$\Omega = \frac{\omega\, du}{\int_{-\frac{T}{L}}^{1-\frac{T}{L}} \omega\, du}$$

d. h.

$$(29) \qquad \Omega = \frac{\Pi(L+1)}{\Pi(L)} \cdot \omega\, du.$$

Hieraus berechnet sich, wenn L eine sehr grosse Zahl ist, der wahrscheinliche Fehler angenähert:

$$(30) \qquad = 0{,}6745 \sqrt{\frac{T(L-T)}{L^3}}.$$

Der Rechnungsgang ist in Wittstein's mathematischer Statistik §§. 10 und 11 durchgeführt und soll daher hier nicht wiederholt werden.

Aachen, den 13. Juni 1871.

Mittheilungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Tübingen.

Von Rudolph Fittig.

1. Ueber die Synthese der Piperonylsäure und eine neue Bildungsweise des Protocatechu-Aldehyds.

Von

Rud. Fittig und **Ira Remsen.**

Die von dem Einen von uns gemeinschaftlich mit Mielck ausgeführte erste Untersuchung über die Constitution der Piperinsäure [1]) liess es wahrscheinlich erscheinen, dass in dieser Säure und in den daraus erhaltenen Oxydationsproducten Piperonal und Piperonylsäure die beiden ausserhalb der Gruppen CO.OH resp. CHO befindlichen Sauerstoffatome in ähnlicher Weise, wie im Chinon gebunden seien. Wir sprachen deshalb die Vermuthung aus, dass dem Piperonal eine der beiden Formeln

$$C^6H^3\begin{cases}\overset{\prime\prime}{O}^2\\ CH^2.CHO\end{cases} \quad \text{oder} \quad C^6H^2\begin{cases}\overset{\prime\prime}{O}^2\\ CH^3\\ CHO\end{cases}$$

zukomme. Die später von uns mitgetheilten weiteren Versuche [2] machen diese Annahme in hohem Grade unwahrscheinlich. Von den vielen andern Formeln, durch welche man sich ein Bild von der Lagerung der Atome in diesen Verbindungen machen kann, stimmen nur we-

1) Ann. Ch. Pharm. 152, 25 und diese Nachrichten 1869, 167.

2) Diese Nachrichten 1870, 22 und Zeitschr. f. Chem. N. F. 6, 427.

nige mit den Ergebnissen unserer Versuche überein und nur die Formeln:

$$C^6H^3\begin{cases} O \\ O \end{cases}\!>CH^2 \atop \diagdown CHO \quad \text{und} \quad C^6H^3\begin{cases} O \\ O \end{cases}\!>CH^2 \atop \diagdown CO.OH$$

Piperonal Piperonylsäure

geben, wie wir in einer demnächst erscheinenden ausführlichen Abhandlung darlegen, in ungezwungener Weise von allen beobachteten Thatsachen Rechenschaft. Danach ist die Piperonylsäure Methylen-Protocatechusäure und das Piperonal Methylen-Protocatechu-Aldehyd. Es schien uns von Wichtigkeit zu sein, diese Annahme durch synthetische Versuche zu prüfen. Wir haben zu dem Zweck ein Gemenge von 1 Mol. Protocatechusäure, 3 Mol. Kalihydrat und $1^1/_2$ Mol. Methylenjodid in eine Röhre eingeschmolzen, dann durch abwechselndes Schütteln und gelindes Erwärmen die Verbindung der Protocatechusäure mit dem Kalihydrat bewirkt und darauf mehrere Stunden erst im Wasserbade, dann im Luftbade auf 140° erhitzt. Nach dem Erkalten wurde der fast schwarze Röhreninhalt mit Alkohol ausgekocht, die alkoholische Lösung zur Zersetzung des etwa gebildeten Methylenäthers der Methylen-Protocatechusäure einige Zeit mit Kalihydrat gekocht, dann mit Wasser verdünnt und mit Salzsäure versetzt. Es schied sich ein brauner amorpher Niederschlag ab, der keine Methylenprotocatechusäure in nachweisbarer Menge enthielt. Die davon abfiltrirte Lösung aber gab nach dem Verdampfen des Alkohols braungefärbte Krystalle, welche sich durch zweimaliges Umkrystallisiren aus siedendem Wasser unter Zusatz von Thierkohle und schliessliche Sublimation leicht reinigen liessen.

Die so gewonnene Methylen-Protocatechu-

säure besass alle Eigenschaften der Piperonylsäure; wir haben sie sehr sorgfältig damit verglichen, aber nicht die geringste Verschiedenheit wahrnehmen können. Sie schmolz genau bei derselben Temperatur (227°) wie diese. Als wir die ganz reine, zweimal sublimirte Säure in heissem Wasser auflösten und die Lösung langsam erkalten liessen, schied sie sich in sehr eigenthümlichen Krystallgebilden aus, die wie verwirrte kleine Fäden von weissem Nähgarn aussahen. Wir hatten dieses früher noch nicht bei der Piperonylsäure beobachtet. Als wir jetzt aber Piperonylsäure, die noch von unsern ersten Versuchen herrührte und damals durch Sublimation gereinigt war, in gleicher Weise behandelten, erhielten wir durchaus dieselben merkwürdigen Krystallgebilde.

Nach diesen Versuchen kann es keinem Zweifel mehr unterliegen, dass die Piperonylsäure Methylen-Protocatechusäure ist und dadurch ist auch die Constitution der Piperinsäure im Wesentlichen klar, denn sie enthält unzweifelhaft ebenfalls die Gruppe $\begin{matrix}-O\\-O\end{matrix}>CH^2$. Wir werden später darauf zurückkommen.

Ein erhöhtes Interesse gewinnt jetzt die an und für sich schon in so hohem Grade merkwürdige Zersetzung, welche die Piperonylsäure beim Erhitzen mit Wasser oder verdünnter Salzsäure erleidet. Wie wir früher mitgetheilt haben, spaltet sie sich bei 170° in Kohlenstoff und Protocatechusäure, bei 200° in Kohlenstoff, Kohlensäure und Brenzcatechin. Die letztere Zersetzung ist eine secundäre und nur Folge der hohen Temperatur, die erstere aber besteht, wie man aus der jetzt festgestellten Formel der Säure sieht, einzig darin, dass das Kohlenstoffatom

der Methylengruppe $\begin{matrix}-O-\\-O-\end{matrix}C\begin{matrix}-H\\-H\end{matrix}$ durch die Anziehung, welche die beiden Sauerstoffatome auf die beiden Wasserstoffatome ausüben, gleichsam aus dem Molecül hinausgeworfen wird. So viel wir wissen, ist eine solche Reaction ohne alle Analogie, wenn man nicht die von Berthelot beobachtete Zersetzung des Acetylendichlorids $C^2H^2Cl^2$ in Salzsäure und Kohlenstoff hierher rechnen will.

Es schien uns wünschenswerth, diese Reaction noch an einem anderen Beispiel zu studiren. Das Piperonal musste sich in ähnlicher Weise wie die Piperonylsäure verhalten und das ist in der That der Fall. Erhitzt man Piperonal mit sehr verdünnter Salzsäure (10—12 Vol. Wasser auf 1 Vol. conc. Säure) in einer zugeschmolzenen Röhre, so findet bei ungefähr 200° Zersetzung statt. Es scheidet sich reiner Kohlenstoff ab und die davon abfiltrirte, ganz farblose und wasserhelle Lösung liefert beim Eindampfen das früher beschriebene Aldehyd der Protocatechusäure. Von der gleichzeitigen Bildung anderer Körper ausser diesen beiden haben wir weder in der abgeschiedenen Kohle, noch in der wässrigen Lösung Spuren entdecken können. Man mag sich noch so sehr sträuben, in einer chemischen Gleichung für die Zersetzung complicirter Verbindungen den freien Kohlenstoff mit auftreten zu sehen, hier ist man dazu gezwungen, denn hier findet die Reaction in Wirklichkeit nach der Gleichung

$$C^6H^3\begin{matrix}-O-\\-O-\\-CHO\end{matrix}C\begin{matrix}-H\\-H\\ \end{matrix} = C^6H^3\begin{matrix}-OH\\-OH\\-CHO\end{matrix} + C$$

Piperonal — Protocatechu-Aldehyd

statt.

2. Ueber die Aethylen-Protocatechusäure.

Von

Rud. Fittig und Thomas Macalpine.

Bevor wir die in der vorstehenden Notiz beschriebenen Versuche mit dem Methylenjodid ausführten, welches trotz der Angaben von Lieben und Butlerow, immerhin in grösserer Menge nicht sehr leicht darstellbar ist, hielten wir es für angemessen, die Reactionsbedingungen durch einen analogen Versuch mit Aethylenbromid zu studiren. Es schien uns das um so nöthiger zu sein, da wir nach den Angaben von Malin (Ann. Ch. Pharm. 152, 111) auf ungewöhnliche Schwierigkeiten gefasst waren und nur wenig Hoffnung auf das Gelingen unserer Versuche haben konnten. Um so mehr waren wir aber überrascht, dass gleich bei dem ersten Versuche die Reaction vollständig und fast glatt in der von uns gewünschten Weise verlief. 3,5 Grm. Protocatechusäure wurden in einer Röhre mit 10 Grm. Aethylenbromid übergossen, $4^1/_2$ Grm. festes Kalihydrat zugesetzt, die Röhre zugeschmolzen und unter zeitweiligem Eintauchen in warmes Wasser so lange geschüttelt, bis die freie Protocatechusäure und das Kalihydrat zu einer dickflüssigen braunen Masse sich vereinigt hatten. Diese Operation ist, wie uns spätere mit grösseren Quantitäten ausgeführte Versuche zeigten, zum Gelingen des Versuchs durchaus erforderlich. Die Röhre wurde dann 5—6 Stunden im Wasserbade erhitzt und von Zeit zu Zeit umgeschüttelt. Schliesslich befanden sich unten in der Röhre Krystalle von Bromkalium und dar-

über eine dicke braune Flüssigkeit. Nach dem Erkalten war der ganze Inhalt der Röhre erstarrt und beim Anblasen öffnete sie sich mit leichtem Druck. Die Masse wurde mit heissem Alkohol ausgezogen, die Lösung mit Kalihydrat gelinde erwärmt, dann der Alkohol abdestillirt, der Rückstand mit Wasser und verdünnter Salzsäure versetzt und mit Aether ausgeschüttelt. Nach dem Abdestilliren des Aethers blieb die Aethylen-Protocatechusäure als eine dunkel gefärbte Masse zurück. Durch Umkrystallisiren aus Wasser unter Zusatz von Thierkohle und durch Sublimation liess sie sich leicht reinigen.

Die Analyse gab Zahlen, welche genau für die Formel $C^6H^3 \begin{matrix} -O \\ -O \\ -CO.OH \end{matrix} \!\!> C^2H^4$ passten.

In reinem Zustande krystallisirt die neue Säure aus Wasser in farblosen, undeutlichen Krystallen, aus Alkohol in Drusen von kurzen glänzenden Prismen. Sie gleicht sehr der Piperonylsäure, ist, wie diese, in kaltem Wasser fast unlöslich, löst sich aber in siedendem Wasser beträchtlich leichter, als diese. In Alkohol ist sie fast in jedem Verhältniss löslich. Sie schmilzt bei 133° und sublimirt bei höherer Temperatur ganz ohne Zersetzung in glänzenden Prismen.

Mit Baryum und Calcium liefert sie sehr leicht lösliche, schwierig in guten Krystallen darstellbare Salze, deren Lösungen mit Eisenchlorid ähnlich, wie die piperonylsauren Salze einen gelben Niederschlag geben.

Wir sind damit beschäftigt, das Verhalten dieser Säure genauer zu studiren.

3. Ueber das Aldehyd der Naphtalingruppe.

Von

J. Battershall.

Die neueren Arbeiten über das Naphtalin haben gezeigt, dass dieser Kohlenwasserstoff, ähnlich wie das Sumpfgas und das Benzol, die Grundsubstanz für eine dritte grosse Gruppe von organischen Körpern ist. Man kennt bereits mehrere mit dem Naphtalin homologe Kohlenwasserstoffe, die Phenole und eine Reihe von Säuren, die in diese Gruppe gehören und alle diese Verbindungen zeigen in ihrem chemischen Verhalten grosse Aehnlichkeit mit den analogen Derivaten des Benzols. Es schien von Interesse zu sein, zu wissen, ob auch die anderen Classen von Verbindungen, namentlich die Aldehyde und die dem Benzylalkohol entsprechenden eigentlichen Alkohole in dieser Gruppe darstellbar sind und wie sich diese Verbindungen zu den gut bekannten Körpern der beiden anderen Gruppen verhalten.

Herr Battershall hat auf meine Veranlassung zunächst das Aldehyd der Naphtoësäure $C^{11}H^{8}O = C^{10}H^{7}.CHO$ durch Destillation eines innigen Gemenges von naphtoësaurem und ameisensaurem Calcium dargestellt. Die Reaction verläuft wenig glatt. Erst bei sehr hoher Temperatur wird das Gemenge breiartig und es destillirt eine braune, in der Vorlage theilweise erstarrende Flüssigkeit über. Zur Abscheidung des Aldehyds und namentlich zur Trennung desselben von dem in grosser Menge in dem Destillat enthaltenen Naphtalin wurde das Product entweder direct für sich oder unter Zusatz von

etwas Aether anhaltend mit einer concentrirten Lösung von saurem schwefligsaurem Natrium geschüttelt. Es bildete sich eine feste Verbindung, die abfiltrirt und abgepresst und dann so lange mit Aether gewaschen wurde, bis der Aether farblos blieb und Nichts mehr löste. Aus dem zurückbleibenden weissen krystallinischen Salz liess sich das reine Aldehyd leicht durch Destillation mit verdünnter Sodalösung gewinnen. Es ging dabei mit den Wasserdämpfen in farblosen Oeltropfen über.

Das reine Aldehyd bildet ein farbloses, etwas dickflüssiges Liquidum von eigenthümlichem schwachem Geruch. Beim Aufbewahren an der Luft oder unter Wasser färbt es sich allmählich bräunlich. Es ist schwerer als Wasser, siedet bei ungefähr 280°, lässt sich aber, wie es scheint, nicht destilliren ohne theilweise in ein viel höher siedendes Condensationsproduct überzugehen. Mit den Wasserdämpfen kann es leicht und ohne Zersetzung destillirt werden.

Es ist bis jetzt nicht gelungen, dasselbe durch Anlagerung von Wasserstoff in den Alkohol $C^{10}H^{7}.CH^{2}.OH$ zu verwandeln. Bei der Einwirkung von Natriumamalgam auf die Lösung in verdünntem Alkohol hatten sich nur braune, unkrystallinische und schwer zu reinigende Producte gebildet.

Die Isonaphtoësäure aus dem β-naphtalinsulfosaurem Kalium, liefert bei gleicher Behandlung ein hinsichtlich der physikalischen Eigenschaften sehr ähnliches Aldehyd.

Herr Battershall ist mit dem genauen Studium dieser Verbindungen beschäftigt und wird später ausführlichere Mittheilungen darüber machen.

4. Notiz über das Benzolhexachlorid.

Von

Zachar. Heys.

Diese von Mitscherlich entdeckte Verbindung lässt sich am leichtesten nach der Methode von Lesimple durch Einwirkung von Chlor auf siedendes Benzol darstellen. Dabei bilden sich kaum Nebenproducte, aber ein sehr grosser Theil des Chlors entweicht, ohne einzuwirken und selbst nach tagelangem Durchleiten von Chlor durch eine verhältnissmässig kleine Menge von Benzol bleibt immer noch ein Theil des letzteren unangegriffen. Die Reindarstellung des Hexachlorids bietet nicht die geringste Schwierigkeit. Man braucht nur das Benzol abzudestilliren, die beim Erkalten sich abscheidenden Krystalle abzupressen und einmal aus Alkohol oder besser aus Benzol umzukrystalliren. Aus Alkohol krystallisirt es in kleinen, weniger gut ausgebildeten Krystallen, aus Benzol dagegen in grossen, farblosen, prachtvoll glänzenden und vollständig durchsichtigen monoklinen Krystallen. Es schmilzt genau bei 157°, also um mehr als 20° höher, als nach den Angaben von Mitscherlich (132°) und Laurent (135—140°). Keiner dieser Chemiker scheint das Hexachlorid in reinem Zustande unter Händen gehabt zu haben. Dass die obige Verbindung wirklich das reine Hexachlorid ist, folgt sowohl aus der Analyse, wie auch daraus, dass sie beim Kochen mit alkoholischem Kali in reines Trichlorbenzol überging, welches ganz constant bei 207° siedete, bei gewöhnlicher Temperatur flüssig war, aber beim Abkühlen unter 0° krystallinisch erstarrte. Nach den Angaben von Vohl (Ztschr.

f. Chem. N. F. 3, 122) soll das Benzolhexachlorid durch Kochen mit rauchender Salpetersäure in eine in Nadeln oder grossen Tafeln krystallisirende Verbindung übergehen. Diese Angabe ist nicht richtig. Weder durch Kochen mit rauchender Salpetersäure noch durch mehrstündiges Erhitzen mit einem Gemisch von concentrirter Schwefelsäure und rauchender Salpetersäure wird das Hexachlorid im geringsten angegriffen. Es schwimmt während der ganzen Dauer des Versuchs unverändert auf der Oberfläche der Säuren. Dieses indifferente Verhalten ist nicht ohne Interesse, weil es zeigt, dass die characteristische Eigenschaft der aromatischen Verbindungen, leicht Nitrosubstitutionsproducte zu bilden, nicht durch die ringförmige Gruppirung der Kohlenstoffatome, sondern durch die doppelte Bindung derselben bedingt ist. Sobald diese doppelte Bindung aufgehoben ist, vermag das Benzol nicht mehr seinen Wasserstoff gegen Untersalpetersäure auszutauschen. Möglich ist es jedoch auch, dass die benachbarten Chloratome die Indifferenz der Wasserstoffatome bewirken.

Beim Erhitzen mit einer alkoholischen Lösung von essigsaurem Kalium auf 150° zersetzt sich das Benzolhexachlorid, wie es scheint, ganz glatt. Es scheidet sich eine grosse Menge von Chlorkalium ab und die davon abfiltrirte Lösung liefert beim Verdunsten hübsche farblose, in Wasser unlösliche, in heissem Alkohol leicht, in kaltem weniger lösliche Krystalle, die beim Erhitzen auf 250° weder schmelzen, noch sich verändern. Das Studium dieser Verbindung wird voraussichtlich zu entscheidenderen Resultaten führen, als die vor mehreren Jahren von Rosenstiehl ausgeführten Versuche.

5. Ueber die Einwirkung von schmelzendem Kalihydrat auf Sulfoxybenzoësäure.

Von

Ira Remsen.

Vor einiger Zeit begann ich eine Untersuchung, die zum Zweck hatte, die Anomalien zu erklären, die in der Bildung der Protocatechusäure aus Oxybenzoësäure und Paraoxybenzoësäure und der Bildung des Brenzcatechins aus Protocatechusäure, sich zeigen. Da die höchst einfache Natur dieser Anomalien seitdem in verschiedenen Notizen (Fittig, Zeitschr. für Chemie 1871, S. 181, Barth, Berliner Berichte, IV. Jahrgang, S. 633, Ascher, ib. IV. Jahrgang, S. 650) besprochen worden ist, so brauche ich kein Wort darüber zu verlieren.

Es schien vor Allem möglich (wenn nicht wahrscheinlich) zu sein, dass eine der zwei angegebenen Bildungsweisen der Protocatechusäure bei wiederholter Prüfung sich als unrichtig erweisen könnte. An der Bildung aus Paraoxybenzoësäure war kein Grund zu zweifeln, da diese Säure aus Anissäure dargestellt wurde und an die Entstehung zweier isomerer Säuren unter diesen Umständen kaum zu denken ist. Ausserdem besitzt die Paraoxybenzoësäure bessere Eigenschaften als die Oxybenzoësäure und fremde Beimengungen lassen sich daher viel leichter in ihr als in der Oxybenzoësäure wahrnehmen. Bei der Reaction mit Oxybenzoësäure aber war der Fall anders. Schon die Darstellungsweise der Säure aus Sulfobenzoësäure liess es, nach den vielen neuen Erfahrungen, die die Bildung zweier isomerer Producte durch directe Substitution bewiesen haben, möglich erscheinen, dass

das, was man bisher für Oxybenzoësäure gehalten hat, kein chemisches Individuum sei. Ich unterwarf deshalb die Sulfobenzoësäure und die Oxybenzoësäure einer neuen Untersuchung und fand gleich am Anfang, wie ich früher angegeben habe (Zeitschrift für Chemie 1871, S. 81), dass beide, wie sie gewöhnlich dargestellt werden, Gemische sind.

Ich glaubte hierdurch das Geheimniss der Anomalien gefunden zu haben. Ich stellte eine grössere Menge von vollkommen reinem saurem sulfobenzoësaurem Baryum dar und benutzte zur Darstellung des Kaliumsalzes nur gut ausgebildete Krystalle. Dieses wurde nun mit Kalihydrat geschmolzen und auf diese Weise eine Oxybenzoësäure von unzweifelhafter Reinheit dargestellt. Mit dieser Säure wurde der Versuch von Barth wiederholt.

Inzwischen hat es aber auch Barth für gut gehalten, seine eigene frühere Untersuchung theilweise zu wiederholen und da unsere Resultate in dem wesentlichsten Punkte übereinstimmen, so wäre diese Notiz von mir überflüssig, wenn sich nicht eine kleine Abweichung bei mir gezeigt hätte. Ich habe nämlich auch Protocatechusäure als Product der Einwirkung von Kalihydrat auf Sulfoxybenzoësäure erhalten, und somit bleibt die ursprüngliche Frage vollständig ohne Erledigung, aber zu gleicher Zeit bildet sich eine andere Säure und zwar in etwas grösserer Menge als die Protocatechusäure.

Diese neue Säure ist etwas schwerer löslich in Wasser, als die Protocatechusäure und sie lässt sich sehr leicht durch Krystallisation davon trennen. Sie bildet grosse, compacte, scheinbar quadratische Krystalle, zuweilen auch quadratische Tafeln. Diese Krystalle enthalten Krystall-

wasser, das erst bei etwa 140° entweicht. Die Säure schmilzt bei 189° und giebt keine Reaction mit Eisenchlorid. Wenn in der Zwischenzeit keine Untersuchung über diese Säure erscheint, so werde ich mir erlauben über sie zu berichten, sobald ich sie in grösserer Menge dargestellt habe.

Was nun die Frage über die Constitution der Protocatechusäure betrifft, so sind die Thatsachen jetzt gerade wie vorher, und wir sind gezwungen anzunehmen, entweder, dass eine moleculare Umlagerung hier stattfindet, oder dass die angenommene 1,3 Stellung der substituirenden Gruppen entweder in der Oxybenzoësäure oder dem Brenzcatechin nicht richtig ist. Ich bin zur letzteren Ansicht geneigt, aber da Barth Untersuchungen über diesen Gegenstand unternommen hat, fühle ich mich nicht berechtigt, diese Ansicht experimentell zu prüfen.

Es handelt sich übrigens hier um eine grössere Frage, als blos um die Constitution der Protocatechusäure, nämlich: um das Stattfinden der molecularen Umlagerung in aromatischen Verbindungen überhaupt. Für die Beurtheilung der Constitutionsformeln ist es von der grössten Wichtigkeit zu wissen, bei welchen Reactionen wir berechtigt sind, anzunehmen, dass die relative Stellung der substituirenden Gruppen erhalten bleibt. Wenn die oft besprochene Umsetzung von Brenzcatechin in Hydrochinon (um nur an ein Beispiel zu erinnern) sich durch weitere, vorsichtige Untersuchungen bestätigen sollte, so würde sich daraus die Werthlosigkeit vieler Formeln ergeben. Die Bildung von Hydrochin und Brenzcatechin aus Oxysalicylsäure durch einfaches Erhitzen lässt es eigentlich wunderbar erscheinen, dass aus anderen Körpern

durch Erhitzen und durch Schmelzen mit Kalihydrat nur ein einzelnes und immer dasselbe von diesen Producten erhalten wird.

Eine Wiederholung derjenigen Versuche, die als Resultat ergeben haben, dass ein aromatischer Körper direct in einen isomeren übergeht, scheint mir geboten zu sein. Man würde dann wenigstens schliesslich wissen, welche Reactionen für die Beurtheilung der Formeln zu benutzen sind.

6. Ueber isomere Sulfosalicylsäuren.

Von **Demselben.**

Mit einer Untersuchung über die Dioxybenzoësäuren beschäftigt, suchte ich zunächst nach neuen Ausgangspunkten für ihre Darstellung. Ich nahm deshalb das Studium der Sulfosalicylsäure auf und fand bald, dass das Product der Einwirkung von Schwefelsäure auf Salicylsäure ein Gemisch von zwei isomeren Sulfosäuren ist.

Die Sulfosalicylsäure wurde zuerst von Mendius durch Einleiten von Schwefelsäureanhydrid in Salicylsäure dargestellt. Er hat sie zu gleicher Zeit genauer untersucht. Zu ihrer Darstellung ist es einfacher, reine Salicylsäure in englischer Schwefelsäure aufzulösen. Man braucht nur sehr kurze Zeit gelinde zu erwärmen, um die Säure vollkonmen in Auflösung zu bringen. Dabei färbt sich die Schwefelsäure ziemlich stark. Die Masse wird mit Calciumcarbonat neutralisirt, die Lösung vom Gyps abfiltrirt und mit Kaliumcarbonat gefällt. Die so erhaltene Lösung der Kaliumsalze ist ziemlich stark braun gefärbt. Wird sie mit Thierkohle behandelt und auf die nöthige Concentration gebracht, so

scheidet sich zuerst ein in schönen, langen, dünnen Säulen krystallisirendes Salz aus, das noch schwach gelb gefärbt ist. Durch nochmaliges Umkrystallisiren erhält man dieses Salz in vollkommen reinem Zustand. Die Analyse gab folgende Zahlen: H^2O — 10,83%; K — 26,59%. Hiernach ist die Formel des Salzes $C^7H^4O^6SK^2 + 2H^2O$; berechnet: H^2O — 10,91%; K — 26,53%. Das Krystallwasser geht erst bei 190° vollständig weg; über 200° erhitzt, fängt das Salz an sich zu zersetzen. Dieses ist wahrscheinlich dasselbe Salz, welches von Mendius beschrieben ist und welches auch zwei Molecüle Krystallwasser enthält.

Die Mutterlauge von diesen Säulen liefert beim Eindampfen noch einige Male dieselben Krystalle, ganz frei von Beimengungen. In den letzten Krystallisationen aber zeigte sich ein Salz von ganz anderem Aussehen, zusammen mit den säulenförmigen Krystallen. Dieses bildet grosse, compacte, gut ausgebildete, augenscheinlich quadratische Krystalle, Es ist ausserordentlich leicht löslich in Wasser, und beim Umkrystallisiren erscheint es wieder, entweder in der ursprünglichen Form, oder als grosse quadratische Tafeln. Die Analyse ergab: H^2O—8,37%; K—26,60%. Die Formel ist also $C^7H^4O^6SK^2 + 1^1/_2H^2O$ (berechnet H^2O—8,41%; K—26,53%). Das Krystallwasser geht bei 180° weg und bei 190° fängt Zersetzung des Salzes an.

Diese beiden Salze behalten ihre characteristischen Formen bei wiederholtem Umkrystallisiren und sind unzweifelhaft als Salze verschiedener Säuren anzusehen.

Ein vorläufiger Versuch über die Einwirkung von schmelzendem Kalihydrat auf sie hat gezeigt, dass die Einführung der OH-Gruppe in

diese Säuren nicht so leicht bewirkt werden kann, als in Verbindungen, die weniger substituirende Gruppen enthalten. Es erfordert langes Erhitzen und eine höhere Temperatur, als für die Reaction gewöhnlich angewandt wird. Durch vorsichtiges Arbeiten aber gelingt es, Producte in hinreichender Menge für eine Untersuchung zu erhalten. Ich werde sobald wie möglich die beiden Säuren in grösserer Menge darstellen. Eine davon wird aller Wahrscheinlichkeit nach die bekannte Oxysalicylsäure sein.

7. Ueber die Oxydation der Toluolsulfosäuren.

Von **Demselben.**

In der Correspondenz aus Göttingen in den Berliner Berichten (IV. Jahrgang S. 680) befindet sich eine Notiz darüber, dass Hübner und Terry beabsichtigen, Toluolsulfosäuren zu oxydiren. Da ich mir die Oxydation wenigstens der Paratoluolsulfosäure vorbehalten habe (Zeitschrift für Chemie 1871, S. 199) und schon einige Zeit damit beschäftigt bin, so erlaube ich mir meine Resultate hier kurz anzugeben, obwohl ich nicht die Absicht hatte, etwas darüber zu publiciren, bis die Untersuchung zum Abschluss gebracht werden konnte.

Da die rohe Toluolsulfosäure aus Ortho- und Para-Säure besteht, so unterwarf ich gleich das Gemisch der beiden Kaliumsalze der Einwirkung von saurem chromsaurem Kalium und Schwefelsäure in bestimmten Verhältnissen, in der Hoffnung, dass die Ortho-Säure vollständig verbrennen würde (Fittig, Zeitschr. für Chemie 1871, S. 179). Die Oxydation, einmal eingeleitet durch gelindes Erwärmen auf dem Wasserbade,

geht rasch von selbst vor sich. Die Flüssigkeit wird sehr heiss und schäumt etwas; eine Gasentwickelung findet statt bis die Operation zu Ende ist. In etwa einer Stunde hört die Entwickelung auf und die Oxydation ist vollendet. Nun wird mit Wasser verdünnt, das Chromoxyd und die überschüssige Schwefelsäure mit Schlämmkreide gefällt und abfiltrirt. Aus dem Filtrat wird die überschüssige Chromsäure mit Barytwasser gefällt und die Lösung, nach dem Filtriren, zur Trockne eingedampft. So erhält man eine weisse Salzmasse, bestehend aus Kalihydrat und den Kalisalzen der neuen Sulfosäuren. Um die Säuren zu isoliren, wird die Masse mit Schwefelsäure angesäuert und mit Alkohol ausgezogen.

Auf diese Weise habe ich eine Säure erhalten, die in jeder Beziehung mit der früher von mir beschriebenen Parasulfobenzoësäure übereinstimmt. Das saure Baryumsalz wurde dargestellt und so die Säure von anderen leicht löslichen Beimengungen getrennt. Die einzige Substanz, die ich sonst in der Lösung habe finden können, ist ein viel leichter lösliches Baryumsalz, das nicht sehr gut krystallisirt. Ich halte dieses für das saure Baryumsalz der Orthosulfobenzoësäure, doch habe ich es noch nicht analysirt.

Werden die Kaliumsalze mit Kalihydrat geschmolzen, so erhält man reine Paraoxybenzoë- und daneben Salicylsäure, was darauf deutet, dass die Methylgruppe in beiden Toluolsulfosäuren oxydirt wird und dass die Ortho-Säure nicht verbrannt wird. Meine Versuche hierüber sind noch nicht entscheidend, da die Salicylsäure von unoxydirter Toluolsulfosäure herrühren kann. Ich kann aber hinzufügen, dass ich einen Versuch in der Weise ausgeführt habe, dass ich

einen grossen Ueberschuss von chromsaurem Kalium genommen und damit zwei Tage gekocht habe. Die Kaliumsalze, so erhalten, gaben mit Kalihydrat geschmolzen auch Paraoxybenzoësäure und Salicylsäure. Ich werde diesen Punkt, der einiges Interesse bietet, in der nächsten Zeit entscheiden.

Von der Parasulfobenzoësäure habe ich folgende Salze untersucht: Das saure Natriumsalz, durch Neutralisiren und Fällen der Lösung des sauren Baryumsalzes mit kohlensaurem Natrium und Zusatz von Salzsäure zu der Lösung, dargestellt, krystallisirt in prachtvoll glänzenden, sternförmig gruppirten, langen Säulen, die ziemlich leicht löslich in Wasser sind.

Das neutrale Baryumsalz ist viel leichter löslich, als das saure Salz und krystallisirt in kleinen verästelten Nadeln, die wieder zu Warzen vereinigt sind.

Das neutrale Calciumsalz ist ein amorphes Pulver, das etwas leichter löslich in kaltem, als in heissem Wasser ist und deshalb durch Kochen seiner concentrirten kalten Lösung abgeschieden wird.

Die freie Säure ist in Wasser sehr leicht löslich und krystallisirt aus einer sehr concentrirten Lösung in schönen farblosen Nadeln. Sie ist nicht zerfliesslich und schmilzt über 200°.

Ich möchte zum Schluss bemerken, dass ich beabsichtige, Xylolsulfosäure und Mesitylensulfosäure auf dieselbe Weise zu behandeln, um so wo möglich eine oxyzweibasische und eine oxydreibasische Säure zu erhalten.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juli 1871.

(Fortsetzung.)

Abhandlungen der historischen Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Bd. XI. Abth. 2. München 1869. 4.

M. Haug, Brahma und die Brahmanen. Ebd. 1871. 4.

Almanach der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1871. Ebd. 8.

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Science fisiche e matematiche. Vol. I. Pisa 1871. 8.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 2. 1871.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1870. VI. Folge. Bd. 4. Prag 1871. 4.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1870. Hft. 1. 2. Ebd. 1871. 8.

Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. 1869—1870. Ebd. 1871. 8.

Observations de Poulkova publiées par Otto Struve. St. Pétersbourg 1870. 4.

Jahresbericht am 29. Mai 1870 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. Ebd. 1870. 8.

M. M. Nyrén, détermination du coefficient constant de la précession au moyen d'étoiles de faible éclat. Ebd. 1870. 4.

Tabulae refractionum in usum speculae Puliorensis congestae. Ebd. 1870. gr. 8.

H. Gyldén. Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. (Mémoires de l'Académie Imp. VII sèrie T. XVI Nr. 10. — 1871.) Ebd. 1871. 4.

Quintino Sella, sulle condigione dell' Industria mineraria nell' Scuola di Sardegna. (Mit Atlas). 4.

Repertorium für Meteorologie, herausg. von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. 1. 2. St. Petersburg 1870. 4.

Annales de l'Observatoire Physique Central de Russie. Année 1866. Ebd. 1870. 4.

Dr. Grotefend und Amtsrichter Fiedeler, Nachtrag zum Urkundenbuche der Stadt Hannover. Hannover. 1871. 8.

Smithsonian contributions to knowledge. Vol. XVII. Washington 1871. 4.

Smithsonian Report. Ebd. 1871. 8.

Walter Wells, the Water-Power of Maine. Augusta 1869. 8.

Fourth Report of the Commissioner of Fisheries of the State of Maine for the year 1870. Ebd. 1870. 8.

F. V. Hayden, U.S. geological survey of wyoming and contiguous territory. Washington 1871. 8.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey showing the progress of the Survey during the year 1867. Ebd. 1869. 4.

24. Jahresbericht der Staats-Ackerbaubehörde von Ohio. Columbus, Ohio 1870. 8.

Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1869. Washington 1870. 8.

Monthly Reports of the Department of Agriculture for the year 1870. Ebd. 1871. 8.

Department of Agriculture. Report on the diseases of cattle in the United States. Ebd. 1869. 8.

The complete wock of Count Rumford. Vol. I. Boston 1870. 8.

The American Ephemeris and Nautical Almanac for the year 1870. Washington 1870. 8.

E. T. Oox first Annual Report of the Geological Survey of Indiana, the during made year 1869. Indianapolis 1869. 8.

Second Annual Report of the Board of Indian Commissioners. Washington 1870. 8.

Maps and colored section referred to in the Report of State Geologist of Indiana. 1869.

Announcement of the Wagner Free Institute of Science for the collegiate year 1870—1871. Philadelphia 1870. 8.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XIV. New series. Part. I. II. Ebd. 1870. 4.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten
von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

30. August. № 17. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.

Von
Felix Klein.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie von Gauss, Lobatchefsky, Bolyai und die verwandten Betrachtungen, welche von Riemann und von Helmholtz über die Grundlage unserer geometrischen Vorstellungen angestellt worden sind. Sie sollen indess nicht etwa die philosophischen Speculationen weiter verfolgen, welche zu den genannten Arbeiten hingeleitet haben; vielmehr ist ihr Zweck, die mathematischen Resultate dieser Arbeiten, so weit sie sich auf Parallelentheorie beziehen, in einer neuen, anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen. Der Weg hierzu führt durch die projectivische Geometrie, deren

Unabhängigkeit von der Frage nach der Parallelentheorie dargethan wird. Nun kann man, nach dem Vorgange von Cayley, eine allgemeine projectivische Massbestimmung construiren, welche sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als sogenannte Fundamentalfläche bezieht. Diese projectivische Massbestimmung ergibt, je nach der Art der dabei benutzten Fläche zweiten Grades, ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorien. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sondern sie deckt geradezu deren inneres Wesen auf. —

I. Die verschiedenen Parallelentheorieen.

Das elfte Axiom des Euklid ist, wie bekannt, mit dem Satze gleichbedeutend, dass die Summe der Winkel im Dreiecke gleich zwei Rechten sei. Nun gelang es Legendre zu beweisen [1]), dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht grösser sein kann, als zwei Rechte; er zeigte ferner, dass, wenn in einem Dreiecke die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, dass dann ein Gleiches bei jedem Dreiecke der Fall ist. Aber er vermochte nicht zu zeigen, dass die Winkelsumme nicht möglicherweise kleiner ist, als zwei Rechte.

Eine ähnliche Ueberlegung scheint den Ausgangspunkt von Gauss' Untersuchungen über diesen Gegenstand gebildet zu haben. Gauss

1) Dieser Beweis, so wie der sich auf den nämlichen Gegenstand beziehende Beweis von Lobatschefsky setzt die unendliche Länge der Geraden voraus. Lässt man diese Annahme fallen (vgl. den weiteren Text), so fallen auch die Beweise, wie man daraus deutlich übersehen mag, dass dieselben sonst in gleicher Weise für die Geometrie auf der Kugel gelten müssten.

besass die Auffassung, dass es in der That unmöglich sei, den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme mit zwei Rechten zu beweisen, dass man vielmehr eine in sich consequente Geometrie construiren könne, in der die Winkelsumme kleiner ausfällt. Gauss bezeichnete diese Geometrie als Nicht-Euklidische[1]; er hat sich mit ihr viel beschäftigt, leider aber, von einigen Andeutungen abgesehen, Nichts über dieselbe veröffentlicht. In dieser Nicht-Euklidischen Geometrie kommt eine gewisse, für die räumliche Massbestimmung characteristische, Constante vor. Ertheilt man derselben einen unendlichen Werth, so erhält man die gewöhnliche Euklidische Geometrie. Hat aber die Constante einen endlichen Werth, so hat man eine abweichende Geometrie, für die beispielsweise folgende Gesetze gelten: Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als zwei Rechte, und zwar um so mehr, je grösser die Fläche des Dreiecks ist. Für ein Dreieck, dessen Ecken unendlich weit entfernt sind, ist die Winkelsumme gleich Null. — Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden kann man zwei Parallele zu der Geraden ziehen, d. h. Linien, welche die Gerade auf der einen oder anderen Seite in einem unendlich fernen Punkte schneiden. Die durch den Punkt gehenden Geraden, welche zwischen den beiden Parallelen verlaufen, schneiden die gegebene Gerade gar nicht.

Auf eben diese Nicht-Euklidische Geometrie ist Lobaschefsky[2], Professor der Mathematik

1) vergl. Sartorius v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss p. 81. Sodann einige Briefe in dem Briefwechsel von Gauss und Schumacher.

2) Im Kasan'schen Boten 1829. — Schriften der Universität Kasan 1836—38. — Crelle's Journal t. XVII.

an der Universität zu Kasan, und, einige Jahre später, der ungarische Mathematiker J. Bolyai[1]) geführt worden, und haben dieselben den Gegenstand in ausführlichen Veröffentlichungen behandelt. Indess blieben diese Arbeiten ziemlich unbekannt, bis man durch die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher, die 1862 erfolgte, auf dieselben aufmerksam gemacht wurde. Seitdem verbreitete sich die Auffassung, dass nunmehr die Parallelentheorie vollkommen erledigt, d. h. in ihrer realen Unbestimmtheit erkannt sei.

Aber diese Auffassung muss wohl einer wesentlichen Modification unterliegen, seit im Jahre 1867 nach Riemann's Tode dessen Habilitationsvorlesung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" erschienen ist, und bald darauf Helmholtz in diesen Nachrichten (1868 Nr.) seine Untersuchungen: „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" veröffentlichte.

In Riemann's Schrift ist darauf hingewiesen, wie die Unbegränztheit des Raumes, die als Erfahrungsthatsache gegeben ist, nicht auch nothwendig dessen Unendlichkeit mit sich führt. Es wäre vielmehr denkbar und würde unserer Anschauung, die sich immer nur auf einen endlichen Theil des Raumes bezieht, nicht widersprechen, dass der Raum endlich wäre und in

1837. (Géométrie imaginaire). — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. — Pangéométrie. Kasan 1855. (Die Pangéométrie findet sich in italienischer Uebersetzung im t. V des Giornale di Matematiche 1867).

1) In einem Appendix zu W. Bolyai's Werke: Tentamen juventutem . . . . . Maros Vasarhely. 1832. Eine italienische Uebersetzung desselben im t. VI. des Giornale di Matematiche. 1868.

sich zurückkehrte: die Geometrie unseres Raumes würde sich dann gestalten wie die Geometrie auf einer in einer Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen gelegenen Kugel von 3 Dimensionen. — Diese Vorstellung, die sich auch bei Helmholtz findet, würde mit sich bringen, dass die Winkelsumme im Dreiecke (wie beim gewöhnlichen sphärischen Dreiecke) grösser[1]) ist, als zwei Rechte, und zwar in dem Masse grösser als das Dreieck einen grösseren Inhalt hat. Die gerade Linie würde alsdann keine unendlich fernen Punkte haben, und man könnte durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden überhaupt keine Parallele ziehen.

Eine auf diese Vorstellungen gegründete Geometrie würde sich in ganz gleicher Weise neben die gewöhnliche, Euklidische Geometrie stellen, wie die soeben erwähnte Geometrie von Gauss, Lobatchefsky, Bolyai. Während letztere der Geraden zwei unendlich ferne Punkte ertheilt, gibt diese der Geraden überhaupt keine (d. h. zwei imaginäre) unendlich ferne Punkte. Zwischen beiden steht die Euklidische Geometrie als Uebergangsfall; sie legt der Geraden zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte bei.

Einem in der neueren Geometrie gewöhnlichen Sprachgebrauche folgend, sollen diese drei Geometrieen bezüglich als hyperbolische oder elliptische[2]) oder parabolische Geometrie im Nachstehenden bezeichnet werden, je nachdem die beiden unendlich fernen Punkte der

1) Die entgegenstehenden Beweise von Legendre unn Lobatchefsky setzen, wie bereits bemerkt, die Unendlichkeit des Raumes voraus.

2) Die gewöhnliche Sphärik ist hiernach als eine »elliptische« Geometrie zu bezeichnen.

Geraden reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.

II. Versinnlichung der dreierlei Geometrieen durch die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung.

Das Bedürfniss, die sehr abstracten Speculationen, welche zur Aufstellung der dreierlei Geometrieen geführt haben, zu versinnlichen, hat dahingeführt, Beispiele von Massbestimmungen aufzusuchen, die als Bilder der genannten Geometrieen aufgefasst werden könnten, und damit zugleich die innere Folgerichtigkeit jeder einzelnen in Evidenz setzten.

Die parabolische Geometrie bedarf keiner solchen Versinnlichung, da sie mit der Euklidischen zusammenfällt und uns als solche geläufig ist.

Man hat nun für die elliptische und die hyperbolische Geometrie Bilder angegeben, welche die Art dieser Geometrieen an Objecten demonstriren, die im Sinne der Euklidischen Massbestimmung gemessen werden. Dieselben erläutern indessen nur den planimetrischen Theil der fraglichen Geometrieen. Beltrami, dem man die betreffende Versinnlichung der hyperbolischen Geometrie verdankt [1]), hat nachgewiesen, dass etwas Analoges für den Raum nicht möglich ist. Das Bild für den planimetrischen Theil der elliptischen Geometrie, ist, wie man ohne Weiteres sieht, die Geometrie auf der Kugel, überhaupt die Geometrie auf den Flächen von constantem positiven Krümmungsmasse. Die hyperbolische Geometrie dagegen findet ihre Interpretation auf den Flächen von constantem

1) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiene t. VI. 1868.

negativen Krümmungsmasse. Diese letztere Interpretation bringt leider, wie es scheint, nie das gesammte Gebiet der Ebene zur Anschauung, indem die Flächen mit constantem negativen Krümmungsmasse wohl immer durch Rückkehr-Curven etc. begränzt werden.

Ich will nun hier zunächst für die dreierlei Geometrieen sowohl in der Ebene als im Raume Bilder aufstellen, welche ihre Eigenthümlichkeiten vollkommen übersehen lassen. Sodann werde ich zeigen, dass diese Bilder nicht nur Interpretationen der genannten Geometrieen sind, sondern dass sie deren inneres Wesen darlegen und also ein deutliches Verständniss derselben mit sich führen.

Die fraglichen Bilder betrachten als Object der Massbestimmung die Ebene resp. den Raum selbst und benutzen nur eine andere Massbestimmung, als die gewöhnliche, welche, im Sinne der projectivischen Geometrie, als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Massbestimmung erscheint. Es ist diese verallgemeinerte Massbestimmung im Wesentlichen von Cayley aufgestellt worden [1]; bei ihm sind nur die leitenden Gesichtspunkten ganz anderer Art, als die hier vorliegenden. Cayley construirt diese Massbestimmung, um zu zeigen, wie die (Euklidische) Geometrie des Masses als ein besonderer Theil der projectivischen Geometrie aufgefasst werden kann. Er betrachtet dabei des Näheren nur die Ebene. Er zeigt, wie man in der Ebene auf Grund der projectivischen Vorstellungen eine

1) Im sixth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. t. 149. Vergl. die Fiedler'sche Uebersetzung von Salmon's Kegelschnitten, 2. Aufl. (Leipzig 1860), oder auch Fiedler: Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen (Leipzig 1862).

Massbestimmung treffen kann, die sich auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt als „absoluten“ Kegelschnitt bezieht. Degenerirt dieser Kegelschnitt in ein imaginäres Punktepaar, so hat man eine Massbestimmung, wie die von uns (in der Euklidischen Geometrie) angewandte ist; man erhält geradezu die gewöhnliche Massbestimmung, wenn man die beiden imaginären Fundamentalpunkte mit zwei bestimmten Punkten der Ebene, nämlich den beiden Kreispunkten, zusammenfallen lässt.

Diese allgemeine Cayley'sche Massbestimmung soll hier kurz auf den Raum übertragen werden, wobei ich mich, gegenüber der Cayleyschen Auseinandersetzung, einer mehr geometrischen Darstellungsweise bediene.

Sei eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als „fundamentale“ Fläche gegeben. Zwei gegebene Raumpunkte bestimmen durch den Durchschnitt ihrer Verbindungslinie mit der Fläche zwei Punkte der letzteren. Die beiden gegebenen Punkte haben zu diesen beiden ein gewisses Doppelverhältniss, und der mit einer willkürlichen Constanten[1]) c multiplicirte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses soll die Entfernung der beiden gegebenen Punkte genannt werden. Analog, wenn zwei Ebenen gegeben sind, so lassen sich durch die Durchschnittslinie derselben zwei Tangentialebenen an die Fundamentalfläche legen. Dieselben bestimmen mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhält-

1) Cayley definirt die Entfernung zweier Punkte durch eine Formel, in der dieser Constanten ein particulärer Werth $\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\right)$ beigelegt ist. Ebenso ist es mit der gleich zu nennenden Constanten c^1.

niss. Der mit einer willkürlich zu wählenden Constanten c^1 multiplicirte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses ist es, den wir als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichnen.

Gemäss diesen Definitionen sind die Punkte der Fundamentalfläche von allen übrigen Punkten unendlich fern; die Fundamentalfläche ist also der Ort der unendlich entfernten Punkte. Ebenso sind die Tangentialebenen der Fundamentalfläche solche Ebenen, welche mit einer beliebigen Ebene einen unendlich grossen Winkel bilden. — Eine Entfernung gleich Null von einander haben diejenigen Punkte, deren Verbindungslinie eine Tangente der Fläche ist. Einen Winkel gleich Null schliessen miteinander solche Ebenen ein, deren Durchschnittslinie die Fläche berührt. — Unter einer Kugel ist ein Fläche zweiten Grades zu verstehen, welche die Fundamentalfläche nach einer ebenen Curve berührt. Das Centrum der Kugel ist der Pol der Ebene. — An Stelle der sechsfach unendlich vielen Bewegungen, welche die gewöhnliche Massbestimmung ungeändert lassen, tritt jetzt ein Cyclus von ebenso vielen linearen Transformationen. Die Fundamentalfläche geht nämlich, wie überhaupt eine Fläche zweiten Grades, durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Dieselben zerfallen in zwei, sechsfach unendliche Classen, je nachdem sie die beiden Systeme gradliniger Erzeugender der Fläche vertauschen oder nicht. Die Transformationen der letzteren Art sind hier gemeint. Die Transformationen der ersteren Art lassen allerdings auch die Massunterschiede ungeändert, da sie, gleich den anderen, die Doppelverhältnisse nicht ändern, deren Logarithmen die Massunterschiede sind.

Sie entsprechen aber nicht den Bewegungen des Raumes, sondern denjenigen Transformationen desselben, welche räumliche Figuren in beliebig gelegene symmetrisch congruente Figuren umwandeln.

Aus dieser allgemeinen Massbestimmung ergibt sich durch einen Gränzübergang eine Massgeometrie, gleichartig der gewöhnlichen parabolischen, wenn die Fundamentalfläche zweiten Grades in einen imaginären Kegelschnitt ausartet. Ist dieser Kegelschnitt insonderheit der unendlich ferne imaginäre Kreis, so erhält man geradezu die gewöhnliche Massgeometrie.

Aber die allgemeine projectivische Massbestimmung ergibt bei passender Wahl der Fundamentalfläche auch eine Massgeometrie, welche die Vorstellungen der elliptischen, andererseits eine, welche die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie darlegt; und sind dies die Bilder für die elliptische und die hyperbolische Geometrie, von denen im Vorstehenden die Rede war.

Zu einer Massgeometrie entsprechend der elliptischen Geometrie gelangt man, wenn man die Fundamentalfläche imaginär nimmt. Es hat dann ersichtlich keine gerade Linie reelle unendlich ferne Punkte, so dass die Gerade wie eine geschlossene Curve von endlicher Länge ist. Des Näheren wird man genau zu den (trigonometrischen) Formeln hingeleitet, wie sie die elliptische Geometrie anzunehmen hat. Es sind dies die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, in welche für den Radius der Kugel die Constante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$ eintritt.

Zu einer Geometrie entsprechend der hyber-

bolischen wird man geführt, wenn man die Fundamentalfläche reell und nicht geradlinig nimmt und auf die Punkte in deren Innerem achtet. Diese Beschränkung auf das Innere der Fundamentalfläche ist naturgemäss. Denn gesetzt, man befände sich im Inneren der Fläche und man könne nur vermöge solcher linearer Raumtransformationen seinen Ort im Raume wechseln, die, bei der getroffenen Massbestimmung, die Bewegungen des Raumes vorstellen. Dann würde man niemals aus dem Inneren der (für die Massbestimmung) unendlich fernen Fläche zweiten Grades hinausgelangen können. Jenseits der Fundamentalfläche befände sich dann noch ein Raumstück, von dessen Vorhandensein man Nichts weiss, und dass sich nur dadurch bemerkbar macht, dass sich nicht je zwei in einer Ebene verlaufende Gerade schneiden, wenn man nicht ein solches Raumstück supponirt. — Beschränkt man sich nun auf Constructionen, die nicht aus dem Inneren der Fläche hervortreten, so gelten für sie beim Gebrauche der betreffenden Massbestimmung ganz diejenigen Gesetze, welche die hyperbolische Geometrie für die Raumconstructionen überhaupt aufstellt. Jede Gerade hat z. B. zwei reelle unendlich ferne Punkte, denn jede durch das Innere der Fläche gehende Gerade schneidet die Fläche in zwei reellen Punkten. Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden zwei Parallele ziehen: diejenigen beiden Linien, welche den Punkt mit den beiden Schnittpunkten der gegebenen Geraden und der Fundamentalfläche verbinden. Ein Dreieck mit unendlich fernen Ecken, d. h. ein Dreieck, dessen Eckpunkte auf der Fundamentalfläche liegen, hat die Winkelsumme Null. Denn je zwei Linien, welche sich auf der Fun-

damentalfläche schneiden (je zwei Parallele) schliessen einen Winkel gleich Null ein u. s. w. Endlich repräsentirt die Constante c, mit der der Logarithmus des betr. Doppelverhältnisses multiplicirt werden muss, um die Entfernung zweier Punkte zu geben, die oben erwähnte in der hyperbolischen Geometrie vorkommende characteristische Constante.

III. Unabhängigkeit der projectivischen Geometrie von der Parallelentheorie. Begründung der dreierlei Massgeometrieen.

Im Vorstehenden sind für die elliptische und hyperbolische Massgeometrie in der allgemeinen Cayley'schen Massbestimmung adäquate Bilder gefunden, indem wir die Fundamentalfläche einmal imaginär, das andere Mal reell und nicht geradlinig nahmen. Aehnlicherweise hatten wir ein Bild für die gewöhnliche, parabolische Geometrie, wenn die Fundamentalfläche in einen imaginären Kegelschnitt degenerirte. Aber dieses Bild ging in den Gegenstand, den es versinnlichte, d. h. in die parabolische Geometrie, selbst über, wenn wir den fundamentalen Kegelschnitt mit einem bestimmten Kegelschnitte, dem unendlich fernen imaginären Kreise, zusammenfallen liessen. Aehnlich nun gehen die Massgeometrieen, welche wir resp. als Bilder der elliptischen und hyperbolischen Geometrieen aufgestellt haben, in diese Geometrieen selbst über, wenn man die fundamentale Fläche derselben mit einer bestimmten (der unendlich fernen) Fläche zweiten Grades coincidiren lässt.

Man gewinnt diese Ueberzeugung, indem man bemerkt, dass die projectivische Geometrie unabhängig ist von der Frage nach der Parallelen-

theorie [1]). In der That, um die projectivische Geometrie zu entwickeln und ihre Geltung in einem beliebig gegebenen begränzten Raume nachzuweisen, genügt es, in diesem Raume Constructionen zu machen, die nicht über den Raum hinausführen und nur sogenannte Lagenbeziehungen betreffen. Die Doppelverhältnisse (die einzig festen Elemente der projectivischen Geometrie) dürfen dabei natürlich nicht, wie dies gewöhnlich geschieht, als Streckenverhältnisse definirt werden, da dies die Kenntniss einer Massbestimmung voraussetzen würde. In von Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage [2]) sind aber die nöthigen Materialien gegeben, um ein Doppelverhältniss als eine reine Zahl zu definiren. Von den Doppelverhältnissen mögen wir sodann zu den homogenen Punkt- und Ebenen-Coordinaten aufsteigen, die ja auch Nichts Anderes sind, als die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse, wie dies v. Staudt ebenfalls gezeigt [3]) und noch neuerdings Herr Fiedler wieder aufgenommen hat [4]). Unentschieden bleibt dabei, ob sich zu sämmtlichen reellen Werthen der Coordinaten auch entsprechende Raumelemente finden lassen. Ist dies nicht der Fall, so steht Nichts im Wege, den betreffenden Coordinatenwerthen entsprechend zu den wirklichen Raumelementen uneigentliche hinzuzufügen.

1) Es ist dies auch leicht hinterher zu verificiren. Denn unter Zugrundelegung der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie kann man in ganz ähnlicher Weise, wie man es bei der parabolischen Geometrie zu thun pflegt, die projectivische Geometrie aufbauen.

2) §. 27. n. 393.

3) Beiträge §. 29. n. 411.

4) Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zürich. XV. 2. (1871).

Dies geschieht in der parabolischen Geometrie, wenn wir von der unendlich fernen Ebene reden. Unter Zugrundelegung der hyperbolischen Geometrie würde man ein ganzes Raumstück zu adjungiren haben. Dagegen würde bei der elliptischen Geometrie eine Adjunction uneigentlicher Elemente nicht Statt finden.

Ist so die projectivische Geometrie entwickelt, so wird man die allgemeine Cayley'sche Massbestimmung aufstellen können. Dieselbe bleibt, wie vorhin geschildert, durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen, die wir als Bewegungen des Raumes bezeichneten, ungeändert.

Nunmehr wende man sich der Betrachtung der thatsächlichen Bewegungen des Raumes und der durch sie begründeten Massbestimmung zu. Man übersieht, dass die sechsfach unendlich vielen Bewegungen ebenso viele lineare Transformationen sind. Dieselben lassen überdies eine Fläche, die Fläche der unendlich fernen Punkte ungeändert. Nun giebt es aber, wie sich leicht beweisen lässt, keine anderen Flächen, die durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, als die Flächen zweiten Grades und ihre Ausartungen. Die unendlich fernen Punkte bilden also eine Fläche zweiten Grades, und die Bewegungen des Raumes subsumiren sich unter diejenigen sechsfach unendlichen Cyclen linearer Transformationen, welche eine Fläche zweiten Grades ungeändert lassen. Hiernach ist ersichtlich, wie sich die thatsächlich gegebene Massbestimmung unter die allgemeine projectivische subsumirt. Während letztere eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades benutzt, ist diese bei ersterer ein für allemal gegeben.

Die Art dieser der thatsächlichen Massbestimmung zu Grunde liegenden Fläche zweiten Grades kann nun noch näher bestimmt werden, wenn man beachtet, dass eine Ebene durch fortgesetzte Drehung um eine beliebige in ihr im Endlichen gelegene Axe in die Anfangslage zurückkommt. Es sagt dies aus, dass die beiden Tangentialebenen, welche man durch eine im Endlichen gelegene Gerade an die Fundamentalfläche legen kann, imaginär sind. Denn wären sie reell, so fänden sich in dem betr. Ebenenbüschel zwei reelle unendlich ferne Ebenen (d. h. Ebenen, welche mit allen anderen einen unendlich grossen Winkel bilden) und dann könnte keine in einem Sinne fortgesetzte Rotation eine Ebene des Büschel's in die Anfangslage zurückführen.

Damit nun diese beiden Ebenen imaginär sind, oder, was dasselbe ist, damit der Tangentenkegel der Fundamentalfläche, der von einem Punkte des (uns durch die Bewegungen zugänglichen) Raumes ausgeht, imaginär sei, sind nur drei Fälle denkbar:

1. Die Fundamentalfläche ist imaginär. Dies ergibt die elliptische Geometrie.

2. Die Fundamentalfläche ist reell, nicht geradlinig und umschliesst uns. Die Annahme der hyperbolischen Geometrie.

3. (Uebergangsfall). Die Fundamentalfläche ist in eine imaginäre Curve ausgeartet. Die Voraussetzung der gewöhnlichen, parabolischen Geometrie.

So sind wir denn gerade zu den dreierlei Geometrieen hingeleitet, welche man, wie unter I. berichtet, von ganz anderen Betrachtungen ausgehend aufgestellt hat.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juli 1871.

(Fortsetzung.)

Proceedings of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. Vol. XI. Nr. 83. 84. 85. 8.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1870. Nr. 1. 2. 3. Philadelphia 1870. 8.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. VIII. 8.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogie at Harvard College. Cambridge, Mass. Vol. II. Nr. 1. 2. 3.

Illustrated Catalogue of the Museum of Comparative Zoölogie at Harvard College. Nr. III. Cambridge 1870. gr. 8.

Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. Vol. I. Part 2. Vol. II. Part 1. New-Haven 1867 to 1871. 8.

Appendix to Benj. Anderson's journey to Musadu. New-York 1870. 8.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. 4.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XIII. Nr. 15—23. 8.

Proceedings of the American Association for the Advancement of Science. 18 Meeting held at Salem. Mass. Vol. XVIII. 1869. Cambridge 1870. 8.

To-Day, a paper printed during the fair of the Essex Institute and Oratorio Society at Salem. Mass. From Oct 31st to Nov. 4th. 1870. Nr. 1—4. 4.

Proceedings and Communications of the Essex Institute. Vol. VI. Part. 2. 1868—71. Salem 1871. 8.

Bulletin of the Essex Institute. Vol 2. Nr. 1—12.

W. H. Dall, verschiedene Separatabdrücke aus Amerikanischen Journalen. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten
von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

13. September. № 18. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen.

Von

E. B. Christoffel, corresp. Mitgliede.

Sei F eine einfach zusammenhängende, über die Ebene der rechtwinkligen Coordinaten x, y ausgebreitete ebene Fläche, K ihre Randcurve, $x+iy=z$.

Ferner sei von einer zweiten, auf rechtwinklige Coordinaten X, Y bezogenen Ebene E derjenige Theil, auf welchem $Y>0$ ist, und $X+iY=Z$.

Wenn es alsdann gelingt, die beiden Flächen F und E in den unendlich kleinen Theilen ähnlich und zwar so aufeinander abzubilden, dass jedem Puncte der einen ein und auch nur ein einziger, mit jenem sich allenthalben stetig ändernder Punct der andern entspricht, so sind, auf das Innere beider Flächen beschränkt, die Grössen Z und z völlig bestimmte Functionen von einander, deren, einem Puncte m von F zugeordnete Werthe Z_m und z_m heissen mögen.

Ist nun o ein zweiter Punct von F und Z'_0 die Conjugirte von Z_0, so ist

$$w(m/o) = \frac{Z_m - Z_0}{Z_m - Z'_0}$$

eine Function von z_m, die innerhalb F nur im Puncte o, und dort zur ersten Ordnung $= 0$, aber in keinem Puncte m von F unstetig wird, letzteres weil einem Puncte von F stets nur ein Punct von E, also niemals der ausserhalb E liegende Punct Z'_0 entsprechen kann. Nähert sodann m sich einem Puncte μ von K, so nähert sich sein Bild M auf E dem entsprechenden Puncte M auf dem Umfange dieser Fläche, d. h. es wird $Y = 0$, mithin im Ausdrucke von w der Nenner die Conjugirte des Zählers, also Mod $w(\mu/o) = 1$.

Sind daher ξ, η die reellen Bestandtheile von $\log w$,

$$\log w(m/o) = \xi(m/o) + i\,\eta(m/o),$$

so hat $\xi(m/o)$ die in meiner ersten Abhandlung über die stationären Temperaturen (Brioschi's Annalen I. pag. 91 und art. IV) geforderten Eigenschaften und stellt zugleich die einzige Function dar, welche diese Eigenschaften besitzt.

Wird daher wie am angeführten Orte eine Function v angenommen, welche nebst ihren ersten Derivirten in F bis an K hinan einwerthig und stetig ist, und berechnet man nun die Grösse

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=\varphi,$$

und bezeichnet den Werth, welchen v in einem Puncte μ von K erlangt, durch ψ_μ, so folgt, wie in jener Arbeit (art. I) nachgewiesen ist,

$$v_0=\frac{1}{2\pi}\left(\int\psi_\mu\frac{d\xi(\mu/o)}{dp_\mu}ds_\mu+\int\varphi_m\,\xi(m/o)\,dF_m\right),$$

wo ds_μ das den Punct μ enthaltende Element von K, dp_μ zu ds_μ senkrecht und aus F hinausgerichtet ist.

Subtrahirt man $\xi\,(m/o)$ vom Logarithmus der positiven Entfernung (mo) der beiden Puncte m, 0, so erhält man eine Function G^0_m von x, y welche, wenn F einblättrig ist, innerhalb F stetig und an ihrem Rande K entlang jenem Logarithmus gleich ist. Diese Function hat Herr Neumann in seiner schönen Abhandlung im 59. Bande des Borchardt'schen Journals als Green'sche Function bezeichnet und zur Grundlage seiner Untersuchungen gemacht, welche zunächst nicht einfach-, sondern zweifach zusammenhängende einblättrige Flächen F voraussetzen.

Für einfachzusammenhängende und einblättrige Flächen stehen also beide Functionen $\xi\,(m/o)$, G^0_m in einer sehr einfachen Beziehung zueinander, indem

$$\xi\,(m/o)=\log\text{Mod}\left(\frac{Z_m-Z_0}{Z_m-Z'_0}\right),$$

$$G^0_m = \log \mathrm{Mod} \left((z_m - z_0) \frac{Z_m - Z'_0}{Z_m - Z_0} \right)$$

ist. Aber es tritt ein tiefgreifender Unterschied zwischen beiden hervor, wenn die Lösung der obigen Aufgabe direct, also nicht durch Vermittelung meiner Function ξ, an die Bestimmung von G geknüpft wird.

In der That werden zu diesem Zwecke statt der Variabeln x, y die neuen Variabeln X, Y eingeführt, und nun zeigt sich sofort, dass die Schwierigkeiten, welche die Ermittelung von G auf diesem Wege darbietet, nur davon herrühren können, dass man den log mod $(z_m - z_0)$ als Function von X_m, Y_m, X_0, Y_0 suchen oder doch wenigstens untersuchen muss. Ist $z_m - z_0 = F(Z_m/Z_0)$, so folgt

$$G_m^0 = \log \mathrm{Mod} \left(F(Z_m/Z_0) \frac{Z_m - Z'_0}{Z_m - Z_0} \right),$$

und dies, nicht die obige Form ist es, in welcher man den Ausdruck der Green'schen Function G mit der von mir eingeführten Function ξ vergleichen muss, wenn man die Beziehung zwischen beiden vollständig erkennen will.

In der letzten Zeit ist mehrfach Werth darauf gelegt worden, den Ausdruck von v für den Fall zu verificiren, wo F eine einblättrige Kreisfläche und nicht v gegeben ist, sondern $\varphi = 0$ und ψ am Rande K entlang einwerthig, allenthalben endlich und nur in einzelnen Puncten

unstetig, im Uebrigen willkürlich gegeben ist [1]).

Eine solche Verification ist schon im Jahre 1851—52 von Dirichlet in seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen gegeben worden; ich selbst habe sie mit Angabe der Quelle, ebenso wie andere Verificationen ähnlicher Art, die zum Theil von Dirichlet, zum Theil von mir selbst herrühren, in denjenigen Vorlesungen, die ich zur Einleitung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu halten pflege, wiederholt vorgetragen; zuerst während der Jahre 1860—62 an der Berliner Universität, dann bis zum Wintersemester 1866—67 am Züricher Polytechnikum. Von da an habe ich die Behandlung des noch einfachern Falles vorgezogen, wo F selbst eine Halbebene ist, weil dieser meiner oben erwähnten Abhandlung, welche damals erschienen ist, unmittelbar zu Grunde liegt.

Halten wir an der Voraussetzung, dass $\varphi = 0$ also

$$v = \frac{1}{2\pi} \int \psi \frac{d\xi}{dp} ds$$

ist fest, wo dann alles was zu verificiren ist, bis auf die Grenzbedingung $v = \psi$ in die Augen springt, so gestaltet sich diese Verification, conform der von Dirichlet herrührenden Darstellung, wie folgt.

1) H. A. Schwarz: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für die Fläche eines Kreises. (Züricher Vierteljahrsschrift, XV. Jahrgang, 1870.

F. E. Prym: Zur Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$. (Borchardt's Journal 73).

Statt K bloss in positive Elemente ds zu zerlegen, zählen wir an K entlang Bögen s wie Abscissen, welche in der sogenannten positiven Umlaufsrichtung wachsen, so dass, wenn alle Zunahmen positiv sind, dp zu ds liegt wie dx zu dy und wie dX zu dY. Dann ist an K entlang

$$\frac{d\xi}{dp}\,ds = \frac{d\eta}{ds}\,ds = d\eta = \frac{d\eta}{dX}\,dX = -\frac{d\xi}{dY}\,dX,$$

also da $Y = 0$ zu setzen ist:

$$\frac{d\xi}{dp}\,ds = \frac{2\,Y_0\,dX}{(X-X_0)^2+Y_0^2} = 2\,d\,\mathrm{arctg}\,\frac{X-X_0}{Y_0},$$

wie am Schlusse des art. IV. meiner oben erwähnten Arbeit. Ist daher, als Function von X aufgefasst,

$$\psi = \Psi(X),$$

so wird

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int \Psi(X)\,d\,\mathrm{arctg}\,\frac{X-X_0}{Y_0},$$

erstreckt von $X = -\infty$ bis $X = +\infty$.

Sei r der Punct von K, in den o eintreten soll, R sein Bild auf der X-Axe. Wir beschränken uns auf den Fall, wo o längst der Normale in K eintritt, nicht der Vereinfachung wegen, für welche hierdurch nichts gewonnen wird, sondern um die folgende Untersuchung so wiederzugeben, wie sie seit Jahren gegeben worden ist. Es ist also zu untersuchen, was aus v_0 wird wenn, während Y_0 durch positive Werthe gegen Null convergirt, X_0 ungeändert bleibt.

Zu dem Zwecke werden die folgenden Intervalle gebildet:

$$-\infty < X < X_0 - \delta,\ X_0 - \delta < X < X_0,$$
$$X_0 < X < X_0 + \varepsilon,\ X_0 + \varepsilon < X < \infty.$$

Werden die über diese Intervalle erstreckten Integrale der positiven Grösse

$$\frac{d\eta}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\,d\,\operatorname{arctg}\frac{X - X_0}{Y_0}$$

durch a, b, c, d; geeignete Zwischenwerthe von Ψ' innerhalb derselben durch A, B, C, D bezeichnet, so folgt $v_0 = Aa + Bb + Cc + Dd$. Nimmt man aber den arcus stetig und, was am bequemsten ist, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ an, so wird

$$a = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta}{Y_0}\right)$$

$$b = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{Y_0}$$

$$c = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{Y_0}$$

$$d = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{Y_0}\right).$$

Wenn man nun das positive Y_0 abnehmen lässt, so steht nichts im Wege, die willkürlich angenommenen positiven Grössen δ, ε ebenfalls abnehmen zu lassen. Richtet man dies aber so

ein, dass $\frac{\delta}{Y_0}$, $\frac{\varepsilon}{Y_0}$ über alle Grenzen wachsen, so wird an der Grenze:

$$a = 0,\ b = \tfrac{1}{2},\ c = \tfrac{1}{2},\ d = 0$$

und

$$B = \psi(X_0 - 0),\ C = \psi(X_0 + 0).$$

Da ferner nach Voraussetzung ψ niemals unendlich wird, so gibt es endliche Grenzen, unter denen A, D bleiben, also wird $Aa = 0$, $Dd = 0$, mithin

$$\lim v_0 = \tfrac{1}{2}(\psi(X_0 - 0) + \psi(X_0 + 0)),$$

d. h. $= \psi_r$ selbst, wenn ψ in r stetig bleibt, sonst gleich dem arithmetischen Mittel aus den letzten Werthen ψ_r^+, ψ_r^-, welche ψ_μ, bevor es unstetig wird, erlangt, wenn μ in der Richtung eines negativen oder eines positiven Umlaufes in r eintritt. —

Die Abhandlung des Herrn Prym erledigt diese Frage aus einem allgemeinern Gesichtspuncte, indem die Eintrittsrichtung von o willkürlich gelassen wird. Ist zunächst $RO = R$, und der Neigungswinkel von R gegen die positive X-Axe $= \Theta$, so findet man, wenn R bei unveränderlichem Θ gegen Null convergirt,

$$\lim R \frac{dv}{dR} = 0$$

$$\lim \frac{dv}{d\Theta} = \frac{1}{\pi}(\psi_r^- - \psi_r^+).$$

Wenn daher in der Fläche F die Strecke $ro = \varrho$ und θ der Winkel ist, den die Richtung eines positiven Umlaufes in r mit ϱ bildet, so ist nach den allgemeinen Abbildungsgesetzen $\frac{dR}{R} = \frac{d\varrho}{\varrho}$ und, wenn K in r eine Ecke besitzt, die nach F hin den Winkel α fasst, $\frac{d\Theta}{\pi} = \frac{d\theta}{\alpha}$, mithin ist, wenn ϱ bei unveränderlichem θ gegen Null convergirt:

$$\lim \varrho \frac{dv}{d\varrho} = 0$$

$$\lim \quad \frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\alpha} (\psi_r^- - \psi_r^+).$$

Solange ψ stetig ist, ist an K entlang $v = \psi$. Wird ψ in r unstetig, so ist v in r unbestimmt. Lässt man nämlich den Punct o einen um r mit dem unendlich kleinen Halbmesser ϱ beschriebenen Kreisbogen durchlaufen, der über F von den grössern zu den kleinern s führt, so durchläuft v, weil es innerhalb F stetig ist, alle Werthe von ψ_r^+ bis ψ_r^-; der Ausdruck von $\frac{dv}{d\theta}$ lehrt dass, wenn o den Winkel θ zurückgelegt hat,

$$\psi = \psi_r^+ + \frac{\theta}{\alpha} (\psi_r^- - \psi_r^+)$$

geworden ist, was mit dem eleganten, von Herrn Prym für eine Kreisfläche F gefundenen Resultate übereinstimmt.

Die ersten Derivirten

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{x - x_r}{\varrho} - \frac{dv}{\varrho d\theta} \cdot \frac{y - y_r}{\varrho}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{y - y_r}{\varrho} + \frac{dv}{\varrho d\theta} \cdot \frac{x - x_r}{\varrho}$$

werden in r stets unendlich, wenn ψ in r unstetig ist; damit sie in andern Puncten von K nicht unendlich werden, reicht die Stetigkeit von ψ allein nicht hin.

Dass dieselben an K entlang im Allgemeinen aufhören zu existiren hat, wie ich aus der Abhandlung des Herrn Schwarz ersehe, zuerst Herr Weierstrass bemerkt. —

Ich habe die vorangehende Untersuchung nicht so sehr darum ausführlich mitgetheilt, um in dieser Frage den historischen Thatbestand herzustellen; meine Hauptabsicht war vielmehr diese, wozu ich im Folgenden übergehe, an der Frage nach dem Umfange der Bedingungen, welche man der Function v auferlegen kann, den heutigen Standpunct der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen nachzuweisen und die nothwendige Uebersicht durch die Gegenüberstellung mit einer Aufgabe aus älterer Zeit zu erleichtern.

Will man nämlich von Untersuchungen der vorliegenden Art den vollen Nutzen für die Einsicht in die Lehre von den Functionen $(u + iv)$ einer veränderlichen Grösse $x + iy$ ziehen, so ist es nothwendig, die Willkür mit welcher über die an K entlang zu gebende Function ψ verfügt werden kann, ihrem vollen Umfange nach festzustellen.

Dies wird durch die obige Verification nicht erreicht, da z. B. die Beschränkung, dass ψ nicht unendlich werden dürfe, offenbar aufgehoben werden kann, wofern nur das Unendlichwerden von ψ auf einzelne Puncte und in diesen so beschränkt wird, dass $\psi\, d\eta$ nicht aufhört, die Integration zu gestatten. Es ist also sicher, dass wenigstens ein Theil der Beschränkungen, die sich bei der obigen Verification als nothwendig herausgestellt haben, nur aus den dabei benutzten Hülfsmitteln entspringt.

Dahin gehört auch die Bedingung, dass ψ in keinem messbaren Theile von K überall unstetig sein darf; diese Einschränkung ist bei Riemann (art. 19 seiner Inauguraldissertation) mit Rücksicht auf seine vorangehenden Untersuchungen zwar geboten, aber dennoch nicht wesentlich.

Endlich gehört hierhin die Voraussetzung, dass v zweite Derivirten habe was, wenn $u + iv$ als Function von $x + iy$ definirt wird, nicht gefordert ist und eine Folge aus weniger weit gehenden Bedingungen ist.

In der That findet der folgende Satz statt, dessen Beweis ich einer andern Gelegenheit vorbehalte:

Erster Lehrsatz.

1) In Bezug auf die Fläche F wird vorausgesetzt, dass die complexen Variabeln Z, z in eine solche Abhängigkeit von einander versetzt werden können, vermöge deren die Flächen F und E in der oben verlangten Weise aufeinander abgebildet werden.

2) Sodann wird für die ganze Ausdehnung der Fläche F eine Function v von x, y verlangt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

A. Die Function v ist innerhalb F einwerthig und bleibt bis zum Eintritt in K stetig.

B. Innerhalb F hat v erste Derivirten

$$\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy};$$

dieselben sind einwerthig und stetig bis zu jedem noch messbaren, wenn auch noch so kleinen Abstande von K.

C. Innerhalb F existiren zwei, stetige oder unstetige Functionen von x, y:

$$v''_x, v''_y$$

mit den folgenden Eigenschaften:

α. Beide gestatten die Integration über jeden messbaren Theil von F.

β. Jede von ihnen gestattet innerhalb F allenthalben die Integration nach der als Index angehängten Variable, und zwar ist:

$$\int_a^m v''_x \, dx = \left(\frac{dv}{dx}\right)_m - \left(\frac{dv}{dx}\right)_a$$

$$\int_b^m v''_y \, dy = \left(\frac{dv}{dy}\right)_m - \left(\frac{dv}{dy}\right)_b.$$

γ. Die Summe

$$v''_x + v''_y = s$$

nimmt in jedem messbaren, wenn auch

noch so kleinen Theile von F sowohl positive als auch negative Werthe an, wenn sie in demselben nicht allenthalben $= 0$ ist.

D. An K entlang ist eine stetige oder unstetige, aber einwerthige Function φ gegeben. Die Differenz

$$v - \psi = \delta$$

gestattet die Integration über jedes messbare Stück von K, aber das Resultat dieser Integration ist stets $= 0$.

3) I. Wenn alsdann auch die Function ψ die Integration über jeden messbaren Theil von K gestattet, so gibt es eine und auch nur eine Function v, welche den vorstehenden Bedingungen genügt, und ihr Werth im Puncte o von F ist

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \int \psi_\mu \frac{d\xi\,(\mu/o)}{dp_\mu}\, ds_\mu.$$

II. Wenn dagegen ψ die Integration über keinen, oder doch nicht über jeden Theil von K gestattet, — z. B. wenn jeder noch so kleine, messbare Theil von K Puncte enthält, in denen ψ unendlich wird — so ist die Function v selbst dann, wenn eine solche existirt, durch die oben gestellten Bedingungen nicht mehr genügend definirt, und es kann daher in einem solchen Falle nicht mehr die Rede davon sein, mit *diesen* Bedingungen allein, und von

diesen bekannten Werthen ψ aus, eine *bestimmte* Function v durch stetige Fortsetzung mittelst der *partiellen Differentialgleichung* C. γ. entstehen zu lassen.

Durch den Satz I. ist für alle Fälle, wo ψ der Integration über K fähig ist, die Darstellung von v wirklich zurückgeführt auf die Lösung des zuerst erwähnten Abbildungsproblems in der Weise dass, so oft die Lösung des letztern für eine Fläche F gefunden ist, die Darstellung von v durch die obige Formel wirklich gesichert ist, und z. B. die Existenz zweiter und aller höhern Derivirten innerhalb F unmittelbar folgt. Wie der Ausdruck von v zu modificiren ist, wenn dieser Function innerhalb F solche Unstetigkeiten vorgeschrieben werden, deren die Functionen von $x + iy$ oder ihre reellen Bestandtheile fähig sind, bedarf keiner Auseinandersetzung.

In der gleichen Weise lässt sich die in der letzten Nummer[1]) von Herrn Heine besprochene Frage, welche Dirichlet durch Zurückführung auf eine Minimumsaufgabe behandelte, mittelst der Green'schen Function auf eine wesentlich einfachere Aufgabe zurückführen, und zwar in der bestimmten Weise, dass stets mit der Lösbarkeit der letztern zugleich die der allgemeinsten Aufgabe dargethan ist, und die directe Untersuchung dieser, welche selbst dem Dirichlet'schen Princip nicht mehr zugänglich sein würde, überflüssig wird. Diese Reduction, welche für einfachere Voraussetzungen längst bekannt ist, beruht auf dem folgenden, alle Fälle umfassenden Satze:

1) Nro. 16 vom 16. August.

Zweiter Lehrsatz.

1) Es sei J ein einfacher beliebig zusammenhängender, auf rechtwinklige Coordinaten x, y, z bezogener Raum, S seine Oberfläche. In Bezug auf die Gestalt derselben wird vorausgesetzt, dass jedem Puncte o von J eine (sogenannt einfache) Belegung von S zugeordnet werden kann, welche im äussern Raume nach dem Newton'schen Gesetze überall die nämliche Anziehung ausübt, wie eine in o concentrirte Masseneinheit. Das Potential dieser von der Lage des Punctes o abhängigen Belegung sei in einem Puncte $m = W(m/o)$ und, wenn die positive Entfernung beider Puncte durch (mo) bezeichnet wird,

$$w(m/o) = W(m/o) - \frac{1}{(mo)}.$$

Dies ist diejenige Function, welche in der Lehre vom Potential als die Green'sche bezeichnet wird.

2) Es wird für die ganze Ausdehnung des Raumes J eine Function v verlangt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

A. Die Function v ist innerhalb J einwerthig und bleibt bis zum Eintritt in S stetig.

B. Innerhalb J hat v erste Derivirten

$$\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz};$$

dieselben sind einwerthig und stetig bis zu jedem noch messbaren, wenn auch noch so kleinen Abstande von S.

C. Innerhalb J existiren drei stetige oder unstetige Functionen

$$v''_x,\ v''_y,\ v''_z$$

mit den folgenden Eigenschaften:

α. Jede von ihnen gestattet die Integration über jeden messbaren Theil von J.

β. Innerhalb J gestattet allenthalben v''_x die Integration nach x, v''_y die nach y, v''_z, die nach z, und zwar ist:

$$\int_a^m v''_x\,dx = \left(\frac{dv}{dx}\right)_m - \left(\frac{dv}{dx}\right)_a$$

$$\int_b^m v''_y\,dy = \left(\frac{dv}{dy}\right)_m - \left(\frac{dv}{dy}\right)_b.$$

$$\int_c^m v''_z\,dz = \left(\frac{dv}{dz}\right)_m - \left(\frac{dv}{dz}\right)_c$$

γ. Die Summe

$$v''_x + v''_y + v''_z = s$$

nimmt in jedem messbaren, wenn auch noch so kleinen Theile von J sowohl positive als auch negative Werthe an, wenn sie in demselben nicht allenthalben $= 0$ ist.

D. An S entlang ist eine stetige oder unstetige, aber einwerthige Function ψ gegeben. Die Differenz

$$v - \psi = \delta$$

gestattet die Integration über jedes messbare Stück von S, aber das Resultat dieser Integration ist stets $= 0$.

3) Wenn alsdann die Function ψ die Integration über jeden messbaren Theil von S gestattet, so gibt es eine und auch nur eine einzige Function v, welche den vorstehenden Bedingungen genügt, und ihr Werth in einem beliebigen Puncte o von J ist:

$$v_0 = \frac{1}{4\pi} \int \psi_\mu \frac{dw(\mu/o)}{dp_\mu} dS_\mu.$$

In dieser, unter einfachern Voraussetzungen längst bekannten Formel bedeutet dS_μ ein den Punct μ enthaltendes Element von S, dp_μ das Element der über dS_μ nach Aussen errichteten Normale; die Integration ist über alle Elemente von S zu erstrecken.

Wenn ψ die Integration nicht über jeden Theil von S gestattet, so wird der vorstehende Ausdruck illusorisch. Für diesen Fall gelten Bemerkungen wie im vorigen Satze unter II. Die ersten und bis jetzt einzigen Beispiele, welche diesem Falle analog sind und eine Vorstellung von Bedingungen gewähren können, welche in diesem Falle zu den obigen hinzukommen können, sind in den art. X und namentlich XI meiner Abhandlung über die einwerthigen Potentiale behandelt worden (Borchardt's Journal 64).

Die oben gegebene Definition von $W(m/o)$

ist nur eine Umschreibung, um an andere bekannte Sätze zu erinnern. In Wirklichkeit ist, wie man weiss, $W(m/o)$ derjenige besondere Fall von v, wo auch die Bedingung B bis an S selbst hinan erstreckt, C durch die Gleichung

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0$$

für's Innere von J, und D durch die Bedingung ersetzt wird, dass in jedem Puncte μ von S:

$$v_\mu=\frac{1}{(\mu o)}$$

sein soll. Wenn also die Lösbarkeit dieser speciellen Aufgabe dargethan ist, so ist auch unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes die Existenz und der Ausdruck von v sicher gestellt.

Abgesehen von dem Interesse, welches Untersuchungen über die Zulässigkeit von Beweismitteln gewähren können, ist es daher nach den vorstehenden Sätzen nicht mehr nothwendig, die Frage nach der Existenz der Functionen v in möglichster Allgemeinheit zu behandeln.

Es genügt vielmehr, zunächst bei den Potentialen, die Existenz der Function W zu untersuchen oder, was genau das nämliche leistet, die Möglichkeit der im zweiten Satze geforderten Belegung von S darzuthun. (Vergl. Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die Kräfte u. s. w. artt. 29 bis 34 und art. 36).

Da ferner auch die Green'sche Function G_m des Herrn Neumann, nach der in dessen Abhandlung zu Grunde gelegten Auffassung, und

wie man auch aus ihrer Definition leicht findet, für eine einblättrige Fläche F angesehen werden kann als Potential einer Anziehung, die von einer Belegung der Randkurve K herrührt und zwischen zwei Puncten ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist, so ist für solche Flächen die Frage nach der Existenz der Functionen v unter den Voraussetzungen I des ersten Satzes erledigt, wenn man entweder die Lösbarkeit des Abbildungsproblems, oder die Existenz einer der Functionen ξ, G, oder endlich die Möglichkeit beweist, einem jeden Puncte o im Innern von F eine Belegung der Randcurve K zuzuordnen, welche nach jenem Anziehungsgesetze ausserhalb F gerade so wirkt, wie eine in o concentrirte Masseneinheit.

In beiden Fällen ist also die Frage nach der Existenz der Function v und der Lösbarkeit der secundären Probleme, auf welchen die Darstellung von v beruht, zurückgeführt auf die Frage nach der Existenz einer Belegung der Grenzkurve oder Grenzfläche, welche auf der Begrenzung ein vorgeschriebenes Potential erzeugt, also einer Function, welche nur an der Begrenzung entlang existirt und auszuwählen ist aus der Gesammtheit aller derjenigen Functionen, welche die Integration über jeden Theil der Begrenzung gestatten ohne irgend einer andern Einschränkung zu unterliegen.

Berlin, 31. August 1871.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

September 1871.

Verhandlungen der Kaiserl. Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 35. Dresden 1870. 4.
Transactions of the Zoological Society of London. Vol. VII. Part. 3. 4. 5. London 1870. 71. 4.
Proceedings of the Scientific Meetings of the Zoological Society of London for the year 1870. Part. I. II. III. Ebd. 8.
Dr. M. Neumayr, die Cephalopoden-Fauna der Oolithe von Balin bei Krakau. Herausg. von der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien. 1871. 4.
Dr. E. Bunzel, die Reptilfauna der Sosau-Formation in der neuen Welt bei Wiener Neustadt. Herausgeg. von der k. k. geol. Reichsanstalt. Ebd. 1871. 4.
Jahrbuch des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. XXIII u. XXIV. Wiesbaden 1869. 70. 8.
Berichte des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereins in Innsbruck. Jahrg. 1. Hft. 1 u. 2. Innsbruck 1870. 71. 8.

Berichtigung.

Auf Seite 392 muss es heissen:

$$(15)\qquad \lambda(x+n) = \lambda(x)\left\{1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{T_{x+k-1}}{L_{x+k-1}} + \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{x+k-1}}{L_{x+k-1}}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T_{x+k-1}}{L_{x+k-1}}\right)^2 \dots\right\}.$$

Ferner auf Seite 393

$$17)\qquad [w_{x+k-1}] = \frac{[W]}{1-(k-1)\,[W]}.$$

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

20. September. №. 19. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber das Reflexionsprisma.

(Mit einer Figurentafel.)

Von

J. B. Listing.

Das Reflexionsprisma, in welchem die durchgehenden Strahlen eine zweimalige Brechung und eine innere totale Reflexion erleiden, ist seit geraumer Zeit bei astronomischen Instrumenten in Anwendung, um dem Strahlenkegel eines Fernrohrobjectivs eine Ablenkung von 90 Grad zu ertheilen und dadurch für jede Elevation des Objectivtheils des Fernrohrs eine constante, z. B. horizontale Lage des Oculartheils zu gewinnen. Nachgehends hat sich die Zahl der Verwendungen des Reflexionsprismas sehr vergrössert, wobei zum Theil die durch die Reflexion bewirkte Umkehrung einer Dimension des Bildes, d. h. dessen Perversion*) einen Hauptzweck bildete. Wir erinnern u. a. an den Prismenkopf der Camera obscura, das Zeichenprisma, das Spec-

*) Ueber die genauer präcisirten Begriffe von Inversion und Perversion vgl. Vorstudien zur Topologie, Göttingen 1847. S. 19.

troskop, das Stereoskop, das Pseudoskop und die in neuerer Zeit häufigeren Anwendungen zu mikroskopischen Zwecken, wie namentlich bei der binocularen Einrichtung. Während nun bei Herstellung des Reflexions- oder Reversionsprismas in manchen Fällen eine leidliche Annäherung an die vorgeschriebene Form genügt, wie z. B. im Pseudoskop von Wheatstone, ist in anderen eine strengere Erfüllung gewisser Bedingungen unerlässlich, wie z. B. im Fernrohr und besonders im Mikroskop, wenn in ihnen die Correctheit der Bilder durch die Dazwischenkunft des Prismas nicht merklich beeinträchtigt werden soll. Ausser den erwähnten Bedingungen kann nach dem Zusammenhang gefragt werden zwischen der durch die Reflexion bewirkten Ablenkung der Strahlen und den Winkeln des Prismas sowie seinen Dimensionen und der linearen Oeffnung. Jene Bedingungen sowohl als dieser Zusammenhang scheinen, zumal im Interesse für die Fälle grösserer Präcision, eine genauere Erörterung zu verdienen.

Ohne auf die durch mehrfache innere Reflexionen bedingten Vorgänge einzugehen, welche namentlich für das dreiseitige gleichwinklige und das gleichschenklig rechtwinklige Prisma bereits früher von Reusch*) discutirt worden sind, legen wir der gegenwärtigen Betrachtung ein Prisma von gleichschenkligem dreiseitigen Hauptschnitt ABC (Fig. 1 der beifolgenden Tafel) zu Grund mit drei polirten ebenen Seitenflächen, unter der Annahme, dass das durchgehende Licht eine innere Reflexion an der Basis AB erleide, während es durch die Flanken AC, BC ein- und austrete.

*) Pogg. Ann. XCIII. S. 115 (1854).

Die Gleichheit der Winkel bei A und B ist an die hier durchweg zu stellende Bedingung des Achromatismus der mittelst des Reflexionsprismas erhaltenen katadioptrischen Bilder geknüpft. Unter constructiver Elimination der durch AB bewirkten Reflexion überzeugt man sich hiervon sofort, wenn man dem Querschnitt ABC (Fig. 1) das symmetrische Dreieck ABC' wo der Winkel $ABC' = ABC$, anfügt und dem Wege $LFGHM$ des Lichtstrahls den einfacheren $LFH'M'$ substituirt. Bei dem Durchgang durch eine von den beiden Flächen AC, BC' begrenzte Platte wird die Farbenzerstreuung nur dann Null sein, wenn deren Grenzflächen parallel sind, d. h. wenn ABC' auch $= BAC$. Dieser vicarirenden Parallelplatte, aus gleicher Substanz wie das Prisma bestehend, deren Dicke sich leicht aus den Dimensionen und Winkeln des Querschnittes ABC ergibt, werden wir uns noch mehrfach mit Vortheil bedienen.

Eine andere gleichfalls an den Achromatismus geknüpfte Bedingung — in untergeordneteren Fällen der Anwendung drei- oder mehrseitiger Prismen weniger beachtet — ist die des Parallelismus der Kanten. Auch hier bringt die vicarirende Platte sofort zur Evidenz, dass eine nicht genau prismatische, sondern pyramidale Gestalt des Prismas trotz der Gleichheit der Winkel A und B eine Ablenkung des durchgehenden Strahls im Sinne der Höhendimension des Prismas und somit eine geringe Farbenzerstreuung zur Folge haben würde. Ein mit pyramidaler Abweichung behaftetes Prisma besitzt keinen ebenen Hauptschnitt, d. h. keinen seine drei Kanten A, B, C zugleich senkrecht schneidenden Querschnitt, und die Summe der drei Kantenwinkel bietet einen Ueberschuss über 180^0

dar, analog dem sphärischen Excess eines Kugeldreiecks.

Für die nächsten Betrachtungen setzen wir beide Bedingungen — Gleichheit der beiden Winkel an der Basis und Parallelismus der Kanten — als erfüllt voraus. In der Ebene des Hauptschnittes ABC (Fig. 2) an welchem der Winkel $C = 2\alpha$, also $A = B = 90^0 - \alpha$, lassen wir vorerst homocentrisches paralleles Licht zur Seite AC eintreten. Es sei θ der Neigungswinkel der einfallenden Strahlen gegen die Basis AB, positiv wenn der Lichtstrahl $L'A$ in dem Winkelraum CAA', negativ wenn er innerhalb $A'AC'$ liegt, so dass 2θ die durch das Prisma bewirkte katadioptrische Ablenkung darstellt. Dieselbe Ablenkung würde ein einfacher Planspiegel unter der Incidenz $90^0 - \theta$, sofern θ positiv ist, bewirken. Da wir nur Strahlen berücksichtigen, welche nach dem Eintritt ins Prisma zur Basis AB gelangen, um daselbst sei es partiell oder total reflectirt zu werden, so können unter Umständen die Flanken AC und BC nur innerhalb der Grenzen AD und BE nutzbar sein und ein Theil DEC des Prismas als entbehrlich weggeschnitten werden *). Im gewöhnlichen Falle, wo der nutzbare Theil der Flanken bei A und B beginnt, wird dessen Grenze durch denjenigen Strahl LD bestimmt, welcher nach dem Eintritt bei D auf das Ende B der Basis gelangt. Die Grenze DE variirt aber offenbar mit θ, α und dem Brechungsverhältniss n des Prismas.

Wir ziehen DP und CR senkrecht zur Basis AB, sowie AQ senkrecht zu LD, und setzen $AB = a$, $DP = b$, $CR = c$, $AD = d$, $AQ = q$,

*) Das Prisma könnte alsdann zwischen D und E sogar mit einspringendem Winkel bis zu T ausgeschnitten werden.

wo dann a die Länge des Prismas, c seine volle Breite und, für einen gegebenen Richtungswinkel θ, b die effective oder Nettobreite, d die Flankenbreite und q die lineare Oeffnung oder Breite des durchgehenden parallelen Lichtbündels heissen mag. Als Höhe des Prismas betrachten wir seine Dimension in der Richtung der Kanten A und B, sofern es wie gewöhnlich noch durch zwei zum Hauptschnitt parallele unpolirte Flächen begrenzt ist.

Richten wir nun die Untersuchung zuvörderst auf den Spielraum, welcher an dem Prisma ABC (Fig. 3), stets unter Voraussetzung einmaliger innerer Reflexion an der Basis AB, dem Richtungswinkel θ offen steht. Durch die Eintrittsstelle D ziehen wir das Einfallsloth NN' und nennen e den Einfallswinkel LDN', r den Brechungswinkel BDN, γ den Neigungswinkel DBA des inneren Strahls gegen die Basis, dann hat man die einfachen Beziehungen

$$(1) \qquad \sin e = n . \sin r$$

$$(2) \qquad \theta = \alpha - e$$

$$(3) \qquad \gamma = \alpha - r$$

Für den senkrechten Eintritt, also für $e = 0$, wird $\theta = \alpha$. Für $\theta > \alpha$ wird e und somit r negativ und der einfallende Strahl fällt in den Winkelraum $N'DC$.

Dem Wachsthum von θ ist nun, je nach dem Werthe von α und n eine zweifache Grenze gesetzt. Sofern nämlich der an der einen Flanke eintretende Strahl nach der Reflexion an der Basis zum Austritt an der andern Flanke gelangen soll, darf einerseits γ nicht über 90^0 wachsen und andrerseits kann r den Grenzwinkel ω $(= \sin^{-1} \frac{1}{n})$ nicht überschreiten. Für Werthe von

$\alpha < 90^\circ - \omega$ findet also e seine Grenze bei -90°, d. h. bei streifender Incidenz, und θ wächst bis zu $90^\circ + \alpha$, γ bis zu $\alpha + \omega$. Je geringer der Ueberschuss von $90^\circ - \omega$ über α, desto näher an C liegen die Ein- und Austritte des durchgehenden Lichts, desto beschränkter wird die Breite desselben. Der austretende Strahl kreuzt sich in der Nähe von C mit dem eintretenden, indem die gesammte katadioptrische Ablenkung 2θ den Werth $180^\circ + 2\alpha$ annimmt. Für Werthe von $\alpha > 90^\circ - \omega$ kann γ bis zu 90° wachsen, e aber kann nur einen Werth e'' erreichen, der aus r mittelst (1) abgeleitet wird, wenn $r = \alpha - 90^\circ$ gesetzt wird. Die totale Ablenkung ist hier $2(e'' + \alpha)$ und bewirkt, da $e'' + \alpha > 90^\circ$, ebenfalls eine Kreuzung zwischen austretenden und einfallenden Strahlen. Für $\alpha = 90^\circ - \omega$ tritt Coincidenz des Grenzwerthes e'' mit der streifenden Incidenz ein oder es wird e und γ zugleich $= 90^\circ$. Einige berechnete Werthe für verschiedene Glassorten auf letzteren Fall bezüglich, stellen wir hier zusammen, wo C den Prismenwinkel $ACB = 2\alpha$ bedeutet.

n	ω	C
1.5	41°48′6	96°23′
1.525	40 58.9	98 2
1.55	40 10.7	99 39
1.575	39 24.5	101 11
1.6	38 40.9	102 38
1.625	37 59.0	104 2
1.65	37 18.3	105 23
1.675	36 39.4	106 41

Diese durchweg stumpfwinkligen Prismen gestatten also noch streifende negative Incidenz und würden diese Eigenschaft auch bei weniger stumpfen, bei rechten und bei spitzen Winkeln behalten. Der Richtungswinkel θ hat dann im-

mer den für alle Brechungsverhältnisse gleichen Grenzwerth $90^0 + \frac{1}{2}C$. Für grössere Winkel C aber nehmen e und θ im Grenzfall geringere Werthe e'' und θ'' an. Wir führen dies in einer Uebersicht numerischer Werthe θ'' der positiven Richtungswinkel für verschiedene Prismenwinkel und eine Reihe von verschiedenen Indexwerthen vor Augen.

Werthe von θ''

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)	(1.675)
30°	105°	105°	105°	105°	105°	105°	105°	105°
40	110	110	110	110	110	110	110	110
50	115	115	115	115	115	115	115	115
60	120	120	120	120	120	120	120	120
70	125	125	125	125	125	125	125	125
80	130	130	130	130	130	130	130	130
90	135	135	135	135	135	135	135	135
100	124 37′	128 36′	134 59′	140	140	140	140	140
110	114 21	116 1	117 45	119 36′	121 36′	123 45′	126 9′	128 54′
120	108 35	109 41	110 48	111 57	113 8	114 21	115 35	116 53

Beachten wir noch ein Paar besondere Fälle. Die Ablenkung 2θ kann 180^0 betragen, wo alsdann, wie in Fig. 3 angedeutet, das einfallende und das austretende Licht zur Basis AB senkrecht aber in entgegengesetzter Richtung verlaufen, wie bei einfacher Spiegelung unter senkrechter Incidenz. Den Werth 90^0 nimmt der Richtungswinkel θ an, wie aus (2) folgt, wenn $-e = 90^0 - \alpha$ oder $-e = 90^0 - \frac{1}{2}C$, welche Incidenz, da α stets $< 90^0$, immer negativ ist. Aus (1) finden wir $\sin r = \frac{1}{n} . \cos\alpha$ und aus dem so erhaltenen Werth von r mittelst (3) den Werth von $\gamma = \alpha - r$ Mehr noch ist der Fall von Interesse, wo der Strahl beide Flanken senkrecht durchdringt, wo also $e = 0$ und $\theta = \alpha$.

Dieser Fall dürfte bei Anwendungen des Reflexionsprismas bei weitem der frequenteste sein, zumal bei Prismen vom Winkel $C = 90^0$ aus Crown- oder Flintglas von den verschiedensten Brechungsverhältnissen, zumeist behufs einer Ablenkung von 90^0. Nicht unwichtig hierbei ist, sofern die oben erwähnte vicarirende Parallelplatte von dem durchgehenden Lichte nunmehr senkrecht durchdrungen wird, dass bei Strahlenbündeln von merklichen Graden der Divergenz oder Convergenz die Homocentricität in diesem Falle fast ganz unbeeinträchtigt bleibt, was streng genommen bei schiefen Incidenzen nicht der Fall, ein Punkt, der später noch näher zu besprechen sein wird.

Mit Werthen von θ unter α beginnen die positiven Incidenzen und nimmt θ bis zu Null ab, so wird $e = \alpha = \frac{1}{2} C$. Dies Stadium würde beim einfachen Planspiegel als streifende Incidenz die Grenze sein, bei dem Reflexionsprisma dagegen erlaubt θ, wie schon erwähnt, eine weitere Abnahme, einen Uebergang durch Null ins Negative.

Auch die negativen Richtungswinkel finden, wie die positiven, ihre Grenze durch eine zweifache Beschränkung. Insofern nämlich die positive Incidenz e bis zu 90^0 zuzunehmen gestattet, kann der negative Winkel θ den Grenzwerth $\alpha - 90^0$ erreichen. Insofern aber andererseits der innere Strahl von der Reflexion an der Basis nicht dispensirt werden darf, concurrirt die Bedingung, dass jetzt γ nur bis zu Null herab abnehmen oder, wie aus (3) folgt, dass r nicht $> \alpha$ werden darf. Nun kann auch hier r nicht grösser als der Grenzwinkel ω werden, woraus folgt, dass wenn $\alpha > \omega$, r seine Grenze bei ω, e bei 90^0, θ bei $\alpha - 90^0$ findet, dass dagegen, wenn

$\alpha < \omega$, die Grenze von r bei α, von e bei dem aus $\sin e^0 = n . \sin \alpha$ berechneten Werthe e^0 und die Grenze θ^0 von θ bei $\alpha - e^0$ liegt. Beispielsweise sei der Winkel C eines Flintglasprismas $= 80^0$, $n = 1.625$, dann ist, wie oben aufgeführt, $\omega = 37^0 59'$. Da also $\alpha = 40^0 > \omega$, so ist die Grenze des Richtungswinkels $= -50^0$ bei streifender Incidenz. Wäre aber $C = 70^0$, so fände sich $e^0 = 68^0 46'$ und $\theta^0 = -33^0 45'$. Für die negative Seite des Richtungswinkels stellen wir wiederum die verschiedenen Prismenwinkeln und Brechungsverhältnissen entsprechenden Grenzwerthe θ^0 übersichtlich zusammen.

Werthe von $-\theta^0$

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)	(1.675)
30°	7°51′	8°15′	8°39′	9° 3′	9°28′	9°52′	10°17′	10°41′
40	10 52	11 26	12 1	12 36	13 11	13 46	14 21	14 56
50	14 20	15 7	15 55	16 44	17 33	18 23	19 13	20 4
60	18 35	19 41	20 48	21 57	23 8	24 21	25 35	26 53
70	24 21	26 1	27 45	29 36	31 36	33 45′	36 9	38 54
80	34 37	38 36	44 59	50	50	50	50	50
90	45	45	45	45	45	45	45	45
100	40	40	40	40	40	40	40	40
110	35	35	35	35	35	35	35	35
120	30	30	30	30	30	30	30	30

Zwischenwerthe finden sich leicht durch einfache Interpolation. Die Incidenz wird aussen und innen zugleich streifend für $\alpha = \omega$. Die zugehörigen Prismenwinkel finden sich für die verschiedenen Indexwerthe durch Verdoppelung der oben unter ω aufgeführten Zahlen, z. B. für $n = 1.5$, $C = 83^0 37'$, für $n = 1.6$, $C = 77^0 22'$, und die Grenze θ^0 liegt auch in solchem Falle bei $\frac{1}{2} C - 90^0$.

Der Unterschied beider bisher betrachteten Grenzen gibt nun den ganzen für den Richtungswinkel θ disponibelen Spielraum oder seine

Amplitude, welche für verschiedene Werthe von C und n verschieden gross ausfällt. In einer (hier der Kürze wegen unterlassenen) Zusammenstellung der Werthe von $\theta''-\theta^0$, wie sie sich leicht durch Summirung der unter θ'' und $-\theta^0$ gegebenen Zahlen ausführen lässt, würden sich die Zahlen in jeder Columne um den Prismenwinkel von 90° symmetrisch vertheilt zeigen, derart dass, wenn θ einen beliebigen Winkel zwischen 0 und 90° bedeutet, den beiden Werthen $C = 90^0 \pm \theta$ derselbe Werth von $\theta''-\theta^0$ zukommt. Unter Vervollständigung der Columnen nach beiden Seiten bis zu den Prismenwinkeln 0° und 180° würden die Zahlen durchweg mit 90° beginnen und schliessen, von beiden Enden gegen die Mitte allmälig wachsen, anfangs mit geringerer, weiterhin mit grösserer Beschleunigung, um an zwei von der Mitte gleichweit entfernten Punkten auf 180° zu steigen, diesen Werth aber in dem ganzen dazwischen liegenden Intervall beizubehalten, so dass also im Allgemeinen die Veränderungen der Grösse $\theta''-\theta^0$ discontinuirlich sind. Das constante Intervall erstreckt sich um $2\omega - 90^0$ unter und über die Mitte und ist weiter für höhere Indices, enger für niedrigere. Es reicht z. B. für $n = 1.675$ von $C = 73^0$ bis 107°, für 1.5 von 84° bis 96°. Es verschwindet bei dem Brechungsverhältniss 1.4142, wo $\omega = 45^0$, so dass lediglich für den Prismenwinkel 90° die Amplitude noch 180° erreicht. Für Indices unter $\sqrt{2}$ bleibt auch die grösste immer noch zu $C = 90^0$ gehörende Amplitude unter 180° zurück.

Das rechtwinklige Reflexionsprisma erweist sich also gegenüber anderen Formen in der in Rede stehenden Beziehung als das bevorzugte, nur dass bei Prismen aus Glas oder stärker bre-

chenden Substanzen auch benachbarte Formen in einer mit dem Brechungsindex zunehmenden Breite an dem Vorzuge Theil nehmen.

Die Grenzen θ^0 und θ'' bezogen sich auf innere Reflexion schlechthin. Es bleibt also noch die, durch θ' zu bezeichnende, im Allgemeinen zwischen θ^0 und θ'' liegende Grenze des Richtungswinkels zu ermitteln, bei welcher der Uebergang zwischen partieller und totaler Reflexion Statt hat. Die Bedingung totaler Reflexion ist, dass $\gamma < 90^0 - \omega$. Die obigen Ausdrücke (1), (2), (3) zeigen, dass γ mit θ zugleich zu- und abnimmt. Die Totalreflexion, sofern sie vorhanden, wird also mit θ^0 beginnen und bis θ' reichen, so dass zwischen θ' und θ'' nur partielle Reflexion stattfindet. Setzen wir also für die Grenze θ' die Bedingung $\gamma = 90^0 - \omega$, so wird $r = \alpha + \omega - 90^0$. Dieser Werth von r heisse r' und der aus $\sin e = n . \sin r'$ berechnete Werth dez Incidenzwinkels e', dann ist $\theta' = \alpha - e'$. Auch hier macht sich eine zweite Beschränkung geltend, welche freilich in Fällen der Anwendung fast ohne Belang ist. Bei Werthen von $\alpha > 90^0 - \omega$ wird r' und e' stets negativ, also $-r' = 90^0 - \alpha - \omega$. Nun kann r, sei es positiv oder negativ, den Werth ω nicht übersteigen, woraus folgt, dass wenn $\alpha < 90^0 - 2\omega$ wird, e' den Grenzwerth -90^0 annimmt, so dass bei streifender negativer Incidenz $\theta' = \alpha + 90^0$ wird. Bei den in unseren Uebersichten der Berechnung unterworfenen Prismen ist dies nur der Fall für den Prismenwinkel $C = 30^0$ bei den höheren Flintglas-Indices 1.65 und 1.675. Es würde der Fall sein bei dem Prismenwinkel 20^0 für den Index 1.575 und höhere, mit $\theta' = 100^0$, und bei dem Prismenwinkel 10^0 für alle Indices grösser als 1.48, mit $\theta' = 95^0$. Wir lassen auch

hier die berechneten Werthe von θ' (sämmtlich positiv) für die früher gewählten Prismenwinkel C und Indices n übersichtlich folgen.

Werthe von θ'

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)	(1.675)
30°	70°11′	73°28′	77°15′	81°33′	86°22′	93° 3′	105°	105°
40	65 6	67 42	70 25	73 16	76 16	79 29	83 2′	87 3′
50	61 12	63 22	65 35	67 51	70 11	72 35	75 5	77 41
60	57 55	59 48	61 42	63 37	65 34	67 33	69 33	71 36
70	55 0	56 40	58 21	60 2	61 43	63 25	66 7	66 49
80	52 20	53 49	55 19	56 48	58 18	59 47	61 16	62 45
90	49 47	51 8	52 29	53 49	55 8	56 27	57 46	59 5
100	47 16	48 30	49 43	50 55	52 6	53 17	54 27	55 37
110	44 45	45 51	46 57	48 2	49 6	50 9	51 12	52 14
120	42 7	43 7	44 6	45 4	46 1	46 58	47 54	48 49

Indem also θ^0 die untere, θ' die obere Grenze der Amplitude des Richtungswinkels darstellt für innere Totalreflexion, stellt $\theta' - \theta^0$ den Betrag dieser Amplitude dar. Legen wir also die unter den Uebersichten $-\theta^0$ und θ' gegebenen Zahlen zusammen, so finden sich für die verschiedenen Formen und Substanzen des Reflexionsprismas die verschiedenen Beträge des Spielraums, welcher dem Richtungswinkel des durchgehenden total reflectirten Lichts gestattet ist, wie folgt.

Umfang $\theta' - \theta^0$

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)	(1.675)
30°	78° 2′	81°43′	85°54′	90°36′	95°50′	102°55′	115°17′	115°41′
40	75 58	79 8	82 26	85 52	89 27	93 15	97 23	101 59
50	75 32	78 29	81 30	84 35	87 44	90 58	94 18	97 45
60	76 30	79 29	82 30	85 34	88 42	91 54	95 8	98 29
70	79 31	82 41	86 6	89 38	93 19	97 10	101 16	105 43
80	86 57	92 25	100 18	106 48	108 18	109 47	111 16	112 45
90	94 47	96 8	97 29	98 49	100 8	101 27	102 46	104 5
100	87 16	88 30	89 43	90 55	92 6	93 17	94 27	95 37
110	79 45	80 51	81 57	83 2	84 6	85 9	86 12	87 14
120	72 7	73 7	74 6	75 4	76 1	76 58	77 54	78 49

Im Allgemeinen beträgt dieser Umfang für Reflexionsprismen aus Glas zwischen $\frac{4}{5}$ und $\frac{9}{7}$ eines rechten Winkels. Er erweitert sich stetig mit wachsendem Index langsamer bei flachen Prismen (mit stumpfem Winkel C), schneller bei steileren Prismen. Stetige Zunahme des Prismenwinkels hat abwechselnde Verengerungen und Erweiterungen zur Folge mit einem partiellen Minimum in der Nähe von 50°, einem partiellen Maximum in der Nähe von 80° Prismenwinkel, letzteres liegt bei niederen Indexwerthen näher bei 90, bei höheren näher bei 70°. Weitere Details in dieser Richtung würden nur von rein geometrischem Interesse sein.

Für die partielle Reflexion bedeutet θ' die untere, θ'' die obere Grenze, und ihr Umfang findet sich also in der Differenz $\theta'' - \theta'$. Eine umständliche Erörterung auch dieses Gebiets, welches in der Regel ausserhalb der Hauptfunction des Reflexionsprismas gelegen ist, darf füglich unterbleiben. Wir bemerken nur, dass der Umfang $\theta'' - \theta'$ im Allgemeinen bei flachen Prismen und niedrigem Index grösser, bei steilen Prismen und höherem Index geringer ausfällt, und im letzteren Fall durch Coincidenz von θ' mit θ'' ganz verschwinden kann, z. B. für $C = 30°$, $n = 1.65$ oder $= 1.675$, so dass hier die einmalige innere Reflexion an der Basis durchweg eine totale ist.

Manche bei praktischen Vorkommnissen auftauchende Fragen lassen sich leicht an der Hand unserer tabellarisch mitgetheilten Grenzwerthe θ'' und θ' für Glasprismen, wie sie in der Regel zur Anwendung kommen, erledigen. So gibt z. B. $\frac{1}{2}(\theta^0 + \theta')$ den Richtungswinkel θ für die Mitte des Gebietes der Totalreflexion, wofür wir nachstehende abgekürzte Uebersicht geben mit

Beifügung des zugehörigen Incidenzwinkels $e = \alpha - \theta$, welcher sich theils negativ (bei steileren Prismen), theils positiv (bei flacheren) herausstellt, während θ durchweg positiv bleibt:

C	(1.5)		(1.55)		(1.6)		(1.65)	
	θ	e	θ	e	θ	e	θ	e
30°	31°2	−16°2	33°8	−18°8	38°4	−23°4	47°9	−32°9
60	19.6	+10.4	20.5	+ 9.5	21.2	+ 8.8	22.0	+ 8.0
80	8.9	+31.1	5.7	+34.3	4.1	+35.9	5.6	+34.4
90	2.4	+42.6	3.7	+41.3	5.1	+39.9	6.4	+38.6
100	3.6	+46.4	4.9	+45.1	6.0	+44.0	7.2	+42.8
120	5.6	+54.4	7.5	+52.5	8.0	+52.0	9.0	+51.0

Oder, wie weit liegt der für senkrechten Durchgang durch die Flanken ($e = 0$) gültige Richtungswinkel $\theta = \alpha$ von der einen oder anderen Grenze der totalen Reflexion? Die Antwort darauf findet sich in den aus jenen Uebersichten für gegebene Werthe von C und n leicht zu ermittelnden Grössen, $\alpha - \theta^0$, $\theta' - \alpha$. Die erstere ist, da θ^0 durchweg negativ, stets positiv. Das positive Vorzeichen der zweiten aber bekundet die Möglichkeit, das negative die Unmöglichkeit der Anwendung des gegebenen Prismas unter senkrechter Emergenz. Z. B. ein starkbrechendes Crownglas-Prisma (1.55) vom Winkel von 100° gestattet keinen senkrechten Durchgang, während ein solcher möglich ist, wenn das Prisma bei gleicher Form aus schwachem Flint (1.575) besteht. Bei rechtwinkligen Reflexionsprismen liegt die Grenze θ' zumal bei Crownglas nur wenige Grade von α entfernt, welche Grenze an dem bekannten blauen Bogen sichtbar wird, den schon Newton besprochen hat, und welcher das dunklere Feld der Partialreflexion umsäumt, vorausgesetzt, dass das dieses Feld erfüllende einfach durchgehende und

zweimal gebrochene Licht wesentlich geringere Intensität habe, als das total reflectirte. Man darf es als einen glücklichen Zufall betrachten, dass für den Zweck einer Ablenkung von 90° unter senkrechter Emergenz das rechtwinklige Glasprisma selbst bei niederem Index noch keinen Conflict mit dem blauen Bogen veranlasst, so lange, wie in den gebrochenen Fernröhren der Ertel'schen sog. Universalinstrumente, die Randstrahlen bei grossem Gesichtsfeld 4 Grad Neigung gegen die Axe nicht übersteigen. Anders verhält sich die Sache bei Ocularen, wo diese Neigung beträchtlich grösser ist. Hier reichen selbst starke Flintglasprismen, wie unter obigen Werthen von θ' unter $n = 1.675$ für $C = 90^0$ die Ziffer $59^0 5'$ zeigt, nur so lange aus, als die halbe Winkelgrösse des Ocularfeldes 14° nicht übersteigt *). Man würde, will man keine andere Form, Incidenz oder Ablenkung des Prismas zulassen, unter Verzichtleistung auf die Totalreflexion die Basisfläche mit Silber belegen, um die Grenze θ' zu beseitigen, wobei natürlich ein beliebig niedriger Indexwerth, also Crownglas zulässig wäre. Die Einbusse an Lichtintensität durch den in das Silberbeleg transmittirten und absorbirten Theil gegenüber der totalen Reflexion dürfte in solchen Fällen fast ganz ohne Belang sein.

*) An dem Prismenocular eines Fraunhoferschen 4fussigen Refractors erinnere ich mich bei näherer Untersuchung die Basisfläche des kleinen rechtwinkligen Prismas mit Spiegelfolie belegt gefunden zu haben. Der berühmte Künstler, sicherlich nicht unbekannt mit der Totalreflexion an unbelegten Glasflächen, hat offenbar dadurch nur den blauen Bogen beseitigen wollen, der sonst weit in das über 40 Grad grosse Ocularfeld hineingeragt hätte.

Nach diesen Erörterungen über den Richtungswinkel und dessen disponibele Veränderungen innerhalb des Gebiets der Totalreflexion wenden wir uns jetzt zur Discussion über die Zusammenhänge der linearen Grössen a, b, c, d, q mit dem Index n, dem Prismenwinkel C und dem Richtungswinkel θ.

Wir haben bereits oben unter Voraussetzung des Falles, dass $\gamma < 90^0 - \alpha$ sei, in Fig. 2 AB durch a, DP durch b, CR durch c, AD durch d, AQ durch q bezeichnet. Ein Theil DC, EC der Flanken AC, BC wird in diesem Falle dem Lichte, welches durch das Prisma gehend nutzbar werden soll, unzugänglich, und der wirksame Theil der Flanken beginnt meist an der Basis bei A und B und reicht bis zu einem mit dem Richtungswinkel variabeln Grenzpunkt D oder E, der im Grenzfalle $\gamma = 90^0 - \alpha$ bis nach C rücken kann, wo alsdann die volle Flanke nutzbar wird. Sobald aber $\gamma > 90^0 - \alpha$, d. h. sobald r algebraisch kleiner wird als $2\alpha - 90^0$, so tritt eine untere Beschränkung der Flanke ein derart, dass wie in Fig. 4 der an der Flanke AC bei C eintretende Strahl im Prisma den Weg CSK einschlägt und bei K die mit dem Richtungswinkel variabele untere Grenze des wirksamen Theils CK der Flanke bestimmt. Der Brechungswinkel r unterliegt aber jedenfalls der Bedingung, dass er nicht über ω wachsen kann. Es werden also Prismen, deren Winkel $C < 90^0 - \omega$ von diesem Vorkommen einer unteren Flankenbeschränkung ganz eximirt sein. Diese steilen Prismen dürfen also nicht grössere als folgende Winkel bei verschiedenen Indexwerthen besitzen:

n	C
1.5	48°11′
1.525	49 1
1.55	49 49
1.575	50 35
1.6	51 19
1.625	52 1
1.65	52 42
1.675	53 21

und in Prismen mit grösseren Winkeln wird das Vorkommen der unteren Flankenbeschränkung eventuell noch durch die Grenze der Totalreflexion eludirt, worüber unsere oben gegebenen Uebersichten in gegebenen Fällen bequeme Auskunft ertheilen.

Wenden wir uns wieder zu dem ersteren der beiden unterschiedenen Fälle, nämlich $r < 90^0 - \alpha$ oder r algebraisch $> 2\alpha - 90^0$, in welchem der effective Theil der Flanke bis zur Basiskante reicht und welcher für die Anwendung der wichtigere ist. In Fig. 2 ziehen wir BF senkrecht zu AC. Dann ist $AF = a . \sin\alpha$, $BF = a . \cos\alpha$, $DF = BF . \tan r$ und $AF - DF = AD = d = a(\sin\alpha - \cos\alpha \tan r) = a . \sec r . \sin(\alpha - r)$ und da auch $2c = a \cot\alpha$, so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$(4) \qquad d = a \frac{\sin(\alpha - r)}{\cos r}$$

$$(5) \qquad q = a \frac{\sin(\alpha - r)}{\cos r} \cos e$$

$$(6) \qquad b = a \frac{\sin(\alpha - r)}{\cos r} \cos\alpha$$

$$(7) \qquad \frac{b}{c} = 2 \frac{\sin(\alpha - r)}{\cos r} \sin\alpha$$

von welchen (4) die lichte Breite der Flanke für solche Richtungswinkel bestimmt, bei welchen r nicht kleiner als $2\alpha - 90^0$, (5) die zugehörige lineare Oeffnung, (6) die gleichzeitige Nettobreite des Prismas und (7) das Verhältniss dieser Nettobreite zur vollen Breite CR.

Im Falle senkrechter Incidenz (bei recht- und spitzwinkligen Prismen), wo $e = 0$, $r = 0$, $\theta = \alpha$, wird

$$d = q = a.\sin\alpha$$
$$b = a.\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\frac{b}{c} = 2\sin\alpha^2$$

und im Falle directen (unabgelenkten) Durchganges, wo $\theta = 0$, $e = \alpha$, $\sin r = \frac{1}{n}\sin\alpha$:

$$d = a\sin\alpha\,(1 - \frac{1}{n}.\frac{\cos\alpha}{\cos r})$$
$$b = q = a\sin\alpha\cos\alpha\,(1 - \frac{1}{n}.\frac{\cos\alpha}{\cos r})$$
$$\frac{b}{c} = 2\sin\alpha^2\,(1 - \frac{1}{n}.\frac{\cos\alpha}{\cos r})$$

Diese Ausdrücke zeigen, wie der Fall $e = 0$ auf den $e = \alpha$ durch Hinzufügung des Factors $(1 - \frac{1}{n}.\frac{\cos\alpha}{\cos r})$ übergeführt wird, obwohl man sich bei dem numerischen Calcul der logarithmischen Bequemlichkeit wegen im letzteren Falle an die generellen Vorschriften (4) . . . (7) halten wird.

Den andern der beiden vorhin unterschiedenen Fälle betreffend, wo nämlich $\gamma > 90^0 - \alpha$

oder r algebraisch kleiner als $2\alpha - 90^0$ ist, so substituiren wir in Fig. 4 nach Anfügung des zum Querschnitt ABC des Prismas symmetrischen Dreiecks ABC' an der Aussenseite der Basis AB, dem inneren Strahl CSK unter Elimination der innern Reflexion den die vicarirende Parallelplatte $ACBC'$ geradlinig durchsetzenden Strahl CK'. Die nunmehr um BK verkürzte effective Flanke $CK = C'K'$ findet sich aus dem Dreieck $CC'K'$, worin der Winkel $CC'K' = \alpha$, $CK'C' = 90^0 - r$, also $C'CK' = 90 + r - \alpha$ und $CC' = 2c = a \cot \alpha$, mithin $C'K' : C'C = \sin(90^0 + r - \alpha) : \sin(90^0 - r) = \cos(\alpha - r) : \cos r$ oder, indem wir auch hier die entsprechenden Grössen mit $d (= CK)$, q, b bezeichnen:

$$(8) \qquad d = a \frac{\cos(\alpha - r)}{\cos r} \cot \alpha$$

$$(9) \qquad q = a \frac{\cos(\alpha - r)}{\cos r} \cot \alpha \cos e$$

$$(10) \qquad b = a \frac{\cos(\alpha - r)}{\cos r} \cot \alpha \cos \alpha$$

$$(11) \qquad \frac{b}{c} = 2 \frac{\cos(\alpha - r)}{\cos r} \cos \alpha$$

Für senkrechte Incidenz (bei recht- und stumpfwinkligen Prismen), wo $e = 0$, $r = 0$, $\theta = \alpha$. wird jetzt

$$d = q = a \frac{\cos \alpha^2}{\sin \alpha}$$

$$b = a \frac{\cos \alpha^3}{\sin \alpha}$$

$$\frac{b}{c} = 2 \cos \alpha^2$$

welche Ausdrücke eben sowohl als die entsprechenden des vorigen beider Hauptfälle für das die gemeinsame Grenze bezeichnende rechtwinklige Prisma ($\alpha = 45^0$) ergeben $d = q = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $b = \frac{a}{2}$ und $\frac{b}{c} = 1$.

Es tritt auch hier zwischen den beiden unterschiedenen Fällen die Erscheinung eines discontinuirlichen Ueberganges ein, der darauf beruht dass eine Gesammtheit paralleler in der Ebene des Prisma-Querschnitts durchgehender Strahlen bei allmälig wachsendem Richtungswinkel θ ihre Abgrenzung in der Breite eine Zeitlang nur durch die Basiskanten A, B und alsdann, sobald θ den Werth überschreitet, bei welchem $r = 2\alpha - 90^0$ wird, plötzlich durch die dritte Kante C allein erleidet. Beide Stadien kennzeichnen sich so, dass

$$\text{im ersten } \frac{d}{a} = \frac{\sin(\alpha - r)}{\cos r}$$

$$\text{im zweiten } \frac{d}{a} = \frac{\cos(\alpha - r)}{\cos r} \cot \alpha$$

ist, was sich auch so schreiben lässt:

im ersten Stadium, so lange $r > C - 90^0$

$$d = a(\tan\alpha - \tan r)\cos\alpha$$

$$q = a(\tan\alpha - \tan r)\cos\alpha\cos e$$

$$b = a(\tan\alpha - \tan r)\cos\alpha^2$$

$$\frac{b}{c} = 2(\tan\alpha - \tan r)\cos\alpha\sin\alpha$$

im zweiten Stadium, wenn $r < C - 90^0$

$$d = a(\cot\alpha + \tan r)\cos\alpha$$
$$q = a(\cot\alpha + \tan r)\cos\alpha\cos e$$
$$b = a(\cot\alpha + \tan r)\cos\alpha^2$$
$$\frac{b}{c} = 2(\cot\alpha + \tan r)\cos\alpha\sin\alpha$$

und beide Gruppen von Ausdrücken werden in der That identisch für den Uebergangsmoment wo $r = 2\alpha - 90^0$.

Bei numerischer Berechnung gegebener Fälle, hat man also vorab den für diesen Uebergangsmoment gültigen Werth von θ, den man den diakritischen Richtungswinkel nennen kann, zu bestimmen, und alsdann für Fälle, wo θ unter diesem Grenzwerth bleibt, die erste Gruppe, in gegentheiligen Fällen, die zweite Gruppe von Vorschriften — der bequemeren logarithmischen Rechnung wegen in den Ausdrucksweisen von (4)...(7) und von (8)...(11) — anzuwenden*). Wir geben den diakritischen Winkel berechnet für verschiedene Prismenwinkel, so weit er in

*) Die numerische Handhabung wird am bequemsten, wenn man so verfährt: zuerst sucht man, wofern die gegenwärtige Tabelle berechneter Werthe dies nicht überflüssig macht, den diakritischen Winkel, nämlich man sucht den Werth $\theta = \alpha + e$, wo $\sin e = n\cos C$, findet darauf durch Vergleichung mit θ', ob derselbe ins Gebiet der Totalreflexion fällt, d. h. ob er in Betracht kommt oder nicht. Sodann berechnet man d für das erste Stadium aus $d = a\frac{\sin(\alpha - r)}{\cos r}$ sowie eventuell für das zweite aus $d = a\frac{\cos(\alpha - r)}{\cos r}\cot\alpha$, und endlich mittelst dieses Werthes von d gleichförmig in jedem beider Stadien $q = d\cos e$, $b = d\cos\alpha$, $\frac{b}{c} = \frac{2d\sin\alpha}{a}$.

den Bezirk der Totalreflexion, d. h. zwischen die Grenzen θ^0 und θ' fällt.

Diakritischer Werth von θ.

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)	(1.675)
70°	—	—	—	—	—	—	—	—
75	—	—	—	—	—	—	62°46'8	63°11'5
80	—	—	—	55°52'3	56° 7'9	56°23'4	56 39.0	56 54.6
85	50° 0'7	50° 8'2	50°15'8	50 23.4	50 30.9	50 38.5	50 46.1	50 53.6
90	45 0.0	45 0.0	45 0.0	45 0.0	45 0.0	45 0.0	45 0.0	45 0.0
95	39 59.3	39 51.8	39 44.2	39 36.6	39 29.1	39 21.5	39 13.9	39 6.4
100	34 54.1	34 38.6	34 23.8	34 7.7	33 52.1	33 36.6	33 21.0	53 5.4
105	29 39.3	29 15.2	28 50.9	28 26.6	28 2.2	27 37.7	27 13.2	26 48.5
110	24 9.1	23 33.7	22 59.1	22 24.4	21 49.4	21 14.1	20 38.6	20 3.0
115	18 9.6	17 22.3	16 34.6	15 46.2	14 57.2	14 7.6	13 17.3	12 56.2
120	11 24.4	10 19.0	9 11.7	8 2.9	6 52.2	5 39.5	4 24.7	3 7.4

Bei rechtwinkligen Prismen fällt dieser Werth für alle Indices genau auf 45°, wobei zugleich senkrechter Durchgang $e = r = 0$. Bei steileren Prismen liegt er höher und zwar desto mehr, je stärker der Brechungsindex, erreicht aber mit spitzer werdendem Winkel C alsbald die Grenze θ', so dass Glasprismen von spitzerem Winkel als 75° nicht mehr von der Diakrise tangirt werden. Bei stumpfwinkligen oder flachen Prismen geht der diakritische Winkel unter 45° herab, desto mehr je grösser C und n werden. Für sehr flache Prismen, wie sie freilich bis jetzt kaum zur Anwendung gekommen, z. B. für $C = 120°$ nähert sich der diakritische Werth von θ der Mitte der Amplitude des Richtungswinkels für das Gebiet der Totalreflexion, so dass erst dann jene beiden Stadien ein nahezu gleichgrosses Terrain gewinnen, während in den meisten übrigen Fällen von minder flachen und von spitzwinkligen Prismen das erste Stadium hinsichtlich seiner Ausdehnung überwiegt, um

bei beträchtlich steilen Gestalten den ganzen Umfang $\theta'-\theta^0$ in Anspruch zu nehmen. Schon bei rechtwinkligen Prismen umfasst das zweite Stadium nur $4\frac{3}{4}$ bis 14 Grad, je nach dem Index, während das erste sich auf 90° erstreckt.

In Bezug auf die Nettobreite b ist oben bemerkt worden, dass wenn $\frac{b}{c}<1$ der Theil DEC (Fig. 2) des Prismas als entbehrlich wegfallen kann, wie auch zur Raumersparniss in der Construction des Apparats, welchem das Prisma einverleibt werden soll, so wie zur Oeconomisirung des Materials, aus dem es verfertigt wird, in der That vielfach geschieht. Die Bemerkung bezog sich stillschweigend auf den vorwiegend frequenteren Fall des ersten jener beiden Stadien. Jetzt muss hinzugefügt werden, dass $\frac{b}{c}<1$ auch innerhalb des zweiten Stadiums vorkommt, dass dann aber das Prisma nicht etwa an der Basisseite der ganzen Länge nach verschmälert, d. h. mit einer verringerten Breite c versehen werden, sondern nur an den Basiskanten bei A und B (Fig. 4) etwa bis KS oder KT beschnitten werden dürfte. Es hat also b in diesem Falle nur die Bedeutung der auf die Breite CR des Prismas projicirten lichten Breite der Flanke.

Statt ausgedehnterer Mittheilung berechneter Werthe der Lineargrössen d, q, b für Prismen aus Glas von den bisher aufgeführten acht Brechungsverhältnissen und für zehn verschiedene Prismenwinkel 30, 40, u.s.w. bis 120 Grad unter verschiedenen Richtungswinkeln, welche begreiflich einen beträchtlichen Raum in Anspruch nehmen würde, mögen hier nur für die Beispiele

des gleichseitigen und des rechtwinkligen Prismas sowohl aus Crown mit 1.525 als aus Flint mit 1.625 einige numerische Werthe aufgeführt werden, wobei wir die Länge der Basis durchweg $= 100$ setzen.

1. *Gleichseitiges* Reflexionsprisma aus *Crownglas* (1.525). Wir haben $\alpha = 30^0$, $a = 100$, $c = 86.60$, Spielraum des Richtungswinkels von -19^0 bis $+59^0$, ohne diakritischen Winkel. Es ergibt sich alsdann, mit Hinzufügung von e, r und γ oder $\alpha - r$:

θ	e	r	$\alpha - r$	d	q	b	$b:c$
-10^0	$+40$	$24^0 56'$	$5^0\ 4'$	9.74	7.46	8.44	0.097
0	$+30$	19 8	10 52	19.95	17.27	17.27	0.200
$+10$	$+20$	12 58	17 2	30.07	28.26	26.04	0.301
$+20$	$+10$	6 33	23 27	40.07	39.46	34.70	0.401
$+30$	0	0	30 0	50.00	50.00	43.30	0.500
$+40$	-10	-6 33	36 33	59.93	59.02	51.90	0.599
$+50$	-20	-12 58	42 58	69.93	65.72	60.56	0.699
$+55$	-25	-16 5	46 5	74.98	67.95	64.93	0.750

2. *Gleichseitiges* Reflexionsprisma aus *Flintglas* (1.625). Es ist $\alpha = 30^0$, $a = 100$, $c = 86.60$, Spielraum von θ zwischen -24^0 und $+67^0$, ohne diakritischen Winkel.

θ	e	r	$\alpha - r$	d	q	b	$b:c$
-10^0	$+40^0$	$23^0 18'$	$6^0 42'$	12.70	9.73	11.00	0.127
0	$+30$	17 55	12 5	22.00	19.05	19.05	0.220
$+10$	$+20$	12 9	17 51	31.36	29.46	27.15	0.314
$+20$	$+10$	6 8	23 52	40.69	40.08	35.24	0.407
$+30$	0	0	30 0	50.00	50.00	43.30	0.500
$+40$	-10	-6 8	36 8	59.31	58.41	51.36	0.593
$+50$	-20	-12 9	42 9	68.65	64.51	59.45	0.686
$+60$	-30	-17 55	47 55	78.00	67.55	67.55	0.780
$+65$	-35	-20 40	50 40	82.67	67.72	71.60	0.827

3. *Rechtwinkliges* Reflexionsprisma aus *Crownglas* (1.525). Hier ist $\alpha = 45^0$, $a = 100$, $c = 50$, Spielraum des Richtungswinkels zwischen -45^0 und $+51^0$, diakritischer Werth desselben $= 45^0$.

θ	e	r	$\alpha - r$	d	q	b	$b:c$
— 20°	+65°	36°28′	8°32′	18.46	7.80	13.04	0.261
— 10	+55	32 29	12 31	25.68	14.73	18.16	0.363
0	+45	27 38	17 22	33.71	23.83	23.83	0.477
+ 10	+35	22 6	22 54	42.01	34.41	29.70	0.594
+ 20	+25	16 5	28 55	50.32	45.60	35.58	0.712
+ 30	+15	9 46	35 14	58,53	56.02	41.39	0.827
+ 40	+ 5	3 17	41 43	66.66	66.41	47.14	0.943
+ 45	0	0	45 0	70.71	70.71	50.00	1.000
+ 50	— 5	— 3 17	48 17	66.66	66.41	47.14	0.943

4. *Rechtwinkliges* Reflexionsprisma aus *Flintglas* (1.625). Es ist $\alpha = 45^0$, $a = 100$ $c = 50$, Spielraum von θ zwischen -45^0 und $+56^0$ und dessen diakritischer Werth $+45^0$.

θ	e	r	$\alpha - r$	d	q	b	$b:c$
— 20°	+65°	33°54′	11° 6′	23.20	9.80	16.40	0.328
— 10	+55	30 16	14 44	29.44	16.88	20.82	0.416
0	+45	25 48	19 12	36.54	25.84	25.84	0.517
+ 10	+35	20 40	24 20	44.04	36.07	31.14	0.623
+ 20	+25	15 5	29 55	51.67	46.82	36.53	0.731
+ 30	+15	9 10	35 50	59.30	57.28	41.93	0.839
+ 35	+10	6 8	38 52	63.11	62.15	44.63	0.893
+ 40	+ 5	3 5	41 55	66.91	66.66	47.31	0.946
+ 45	0	0	45 0	70.71	70.71	50.00	1.000
+ 50	— 5	— 3 5	48 5	66.91	66.66	47.31	0.946
+ 55	—10	— 6 8	51 8	63.11	62.15	44.63	0.893

Dem rechtwinkligen Prisma pflegt man unter Anwendung senkrechten Durchganges, wo die volle Flanke oder Kathetenfläche in Wirksamkeit gesetzt wird, die Höhe $h = d$ zu geben, d. h. der Kathetenfläche quadratische Form zu ertheilen, wodurch zugleich $h = q$ d. h. dem

durchgehenden Lichtbündel ein quadratischer Querschnitt erwächst. Ueberhaupt wird man h, wenn nicht andere Rücksichten mitsprechen, nach q bemessen und diese Höhe wenigstens so gross machen, als der grösste bei der Anwendung des Prismas vorkommende Werth von q. Durch b und a nebst C sind Figur und Dimensionen des Hauptschnittes bestimmt. Die hier mit aufgeführten Winkel e und r aber kommen in Betracht falls über den vermöge des Durchgangs durch die Seitenflächen des Prismas eintretenden Lichtverlust Rechenschaft gefordert wird. Ohne auf letztere Frage, welche sich zugleich mit dem Polarisationszustande des durchgehenden Lichts zu beschäftigen hätte und welche einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben muss, bei gegenwärtiger rein geometrisch-optischen Discussion einzugehen, bemerken wir nur beiläufig, dass der Lichtverlust bei Glasprismen im günstigsten Falle d. h. für senkrechte Emergenz je nach dem Brechungsindex 8 bis 12 Procent beträgt.

Auf die genaue Herstellung vorgeschriebener Dimensionen des Reflexionsprismas kommt es in der Praxis bei weitem weniger an als auf die Erfüllung der oben gestellten Bedingungen hinsichtlich der Winkel zwischen seinen drei Flächen, und so dürfte in concreten Fällen eine bequeme Linear-Construction behufs Bestimmung der Grössen d, q, b für gegebene Werthe von a, C, n und θ eine hinreichende Auskunft gewähren.

In Fig. 5 seien zwei Halbkreise über einer geraden Linie mit Radien, deren Verhältniss $BG:BH = 1:n$, beschrieben. Auf diesen Kreisen zählen wir die die Winkel e und r messenden Bogen von dem auf H^0H' senkrechten Ra-

dius BH an, e auf GG^0, r auf HH^0. Zu jedem beider Bogen findet man den ihm zugehörigen anderen durch seine Projection parallel BH auf den andern Kreis, so dass wenn z. B. $e = GV$, der ihm zugehörige Bogen $r = HW$ ist, wenn VW parallel zu BH, indem in der That die diesen Bogen zugehörigen Radien BV und BW sich umgekehrt wie die Sinus der Winkel, welche diesen Radien mit dem als Einfallsloth betrachteten Radius BH bilden, d. h. wie $n:1$ verhalten, im Einklang mit dem Snellius'schen Gesetz.

Soll nun für ein Reflexionsprisma vom Winkel C, Index n, Basis a unter gegebenem Richtungswinkel θ die lichte Flanke d, die lineare Oeffnung q und die Nettobreite b ermittelt werden, so trage man — wir gebrauchen Bogen und Winkel promiscue — $\frac{1}{2}C$ oder α von H nach O ab und trage in der Richtung OB unterhalb der Halbkreise die Basislänge a in BA auf, an welcher man den Querschnitt ACB des Prismas vollendet, so wie das dazu symmetrische Dreieck $AC'B$. Es zählt alsdann θ von U ab, positiv nach G', negativ nach G^0, während e und r von G und H ab positiv nach G^0, H^0, negativ nach G', H' zählen. Dann ergibt sich beispielsweise für $\theta = UV$, also für $e = GV$, $r = HW$ und durch Verlängerung von WB der Grenzpunkt D auf der Flanke AC, also $d = AD$. Eine Senkrechte von D auf AB gibt $b = DP$. Eine Senkrechte von D auf eine durch A parallel mit VB gezogene Linie gibt $q = DQ$. Eine Senkrechte von C auf die Basis stellt $c = CR$ die ganze Breite des Prismas dar. Die Construction beruht auf $DBA = WBU$ $= \alpha - r = \gamma$.

Unsere Figur entspricht ungefähr dem Falle

$C = 80^0$, $n = 1.6$, $a = 50$ Millim. und $\theta = +10^0$. In praktischen Vorkommnissen wird man die Verzeichnung der Halbkreise in 3 bis 4 mal so grossem Maassstabe, die Basis AB in doppelter bis fünffacher natürlicher Grösse ausführen.

Zugleich ist die Construction, wie bei einiger Aufmerksamkeit erhellen wird, ohne dass dies im Einzelnen nachzuweisen nöthig wäre, geeignet, die früheren Zusammenhänge in Betreff des Richtungswinkels übersichtlich zu veranschaulichen, wobei wir nur andeuten wollen, dass wenn UO' und BO'' rechtwinklich zu OB gezogen werden, die Grenzen θ^0, θ', θ'' mit den drei Punkten O, O', O'', diese bei beliebiger Veränderung von α oder GU in gegenseitig fester Entfernung gedacht, in unmittelbarem Connex stehen. Auch würde die Verlängerung von CB bis zum Kreise H, falls sie in die Region OO' der Totalreflexion trifft, und der projective Uebergang von da auf den Kreis G daselbst den Punkt finden lassen, bis zu welchem von U ab der diakritische Winkel reicht. Zwischen diesem Endpunkt und dem Projectivpunkte von O' würde sich dann der Bezirk des zweiten der vorhin besprochenen Stadien ergeben. Wäre nun BJ die Richtung eines in diese Region fallenden Radius, so hätte man ihr parallel CK' und von C' durch den Schnittpunkt S die Linie $C'K$ zu ziehen, um in CK für diesen Fall des zweiten Stadiums d zu finden, woraus sich wiederum nach Analogie q durch Projection von CK auf CK' und b durch Projection von CK auf CR finden würde.

So lange wir, wie bisher bloss parallele Strahlen durch das Prisma treten lassen, dürfte man sich vorstellen, dass die Wirkung des Reflexionsprismas der einer bloss katoptrischen an

einem ebenen Spiegel gleichkommen, welcher, wie Fig. 6 erläutert, durch die Punkte S, S', S'' hindurchgeht, in welchen sich ein- und austretender Strahl nach erforderlicher Verlängerung treffen, und welcher mit der Basis parallel von ihr um RS absteht. In der That würde die ledigliche Reflexion der einfallenden Strahlen L', L, L'' an der Spiegelebene $S'SS''$ dieselben Strahlen M', M, M'' ergeben, wie die katadioptrische Wirkung des Prismas und die Ablenkung des gesammten Strahlencomplexes wäre in beiden Fällen gleich dem doppelten Richtungswinkel. Für senkrechten Durchgang fällt die auf solche Weise dem Prisma substituirte Spiegelfläche mit der Basis zusammen, ihre Distanz RS wächst mit positivem Incidenzwinkel e oder für Richtungswinkel welche von α bis θ^0 abnehmen. Bei $\theta = 0$ ist $RS = \frac{1}{2}b$, und kommt dem Werthe c gleich für die Grenze θ^0, wenn dieselbe $= \alpha - 90^0$. RS wird negativ oder die Spiegelebene liegt auf der Aussenseite der Basis für negative Incidenzen also für wachsende Richtungswinkel zwischen α und 90^0. Von hier ab geht diese Distanz aus dem Negativen durchs Unendliche ins Positive über, um bei der oberen Grenze θ'' bis gegen c abzunehmen und diesen Werth selbst zu erreichen, falls $\theta'' = \alpha + 90^0$. Die äquivalente Spiegelfläche würde somit, jederzeit parallel zur Basis, je nach Umständen in irgend welcher, sogar unendlicher Entfernung vor oder hinter der Basis ihren Platz finden. Die Anwendbarkeit dieser Substitution würde aber lediglich auf den Fall parallelen Lichts beschränkt sein, wo — nach der in der Dioptrik geläufigen Ausdrucksweise — Bild- und Objectpunkt der homocentrischen Strahlen beide in unendlicher Ferne liegen, und in dieser letzte-

ren Rücksicht würde sogar die Feststellung eines bestimmten Platzes für die der Basis parallele Spiegelebene überflüssig werden, sofern die Ablenkung des an ihr reflectirten Lichts übereinstimmend mit der wirklichen Leistung des Prismas bei jedem Werth von RS gleich 2θ sein würde.

Wir werden hierdurch auf die Frage nach dem Verhalten des Reflexionsprismas gegenüber nicht parallelen homocentrischen Lichts geführt.

Schon oben ist darauf hingewiesen worden, wie das Reflexionsprisma neben der katoptrischen Wirkung einer an der Stelle der Basisfläche befindlichen Spiegelebene eine dioptrische Wirkung einer Planparallelplatte von bestimmter Dicke ausübt, welche das Licht unter der Incidenz e durchdringt.

Die Planparallelplatte stellt einen Specialfall aus der Dioptrik der Linsen dar, wenn wir die beiden Krümmungsradien der Linsenflächen unendlich gross annehmen. Während nun bekanntlich die Brennweite für eine solche Biplanlinse unendlich wird, ist das sog. Interstitium, oder die Entfernung zwischen ihren Hauptpunkten $s^0 = t(1 - \frac{1}{n})$, wenn n den Brechungsindex und t die Dicke der Platte bezeichnet, welche Grösse die Bedeutung hat, dass der Concurrenzpunkt eines homocentrischen Strahlenkegels von geringer Angularweite, wenn er eine Planparallelplatte bei senkrechter Emergenz seiner Axe durchdringt, eine Verschiebung im Sinne des Fortschritts der Strahlen längs der Normale der Platte um das Interstitium s^0 erleidet. In diesem Falle senkrechter Incidenz eines Strahlenkegels von mässiger Apertur aber wird die Homocen-

tricität des Lichtbündels nicht merklich beeinträchtigt. Eine Gesammtheit von Objecten, nah oder fern, unter nahe senkrechter Incidenz durch eine 24 Millim. dicke Flintglasplatte vom Index 1.6 betrachtet, werden dem Auge also um 9 Millimeter angenähert in so gut wie vollständig abweichungsfreien virtuellen Bildern erscheinen von gleicher Lineargrösse mit den Objecten. Ebenso wird der Einfluss einer in ein Fernrohr zwischen Objectiv und Ocular eingeschalteten 30 Millim. dicken Platte von Crownglas (1.5) mit parallelen zur Fernrohraxe senkrechten Planflächen bloss darin bestehen, dass das Ocular um 10 Millim. ausgezogen werden muss, um dieselben Objecte wie vorher mit gleicher Deutlichkeit einzustellen. Aplanatismus sowie Angularvergrösserung bleiben ungeändert. Im ersten Beispiel war es ein reelles Object, welches ein virtuelles Bild, im zweiten ein virtuelles Object, welches ein reelles (dem Fernrohrocular dargebotenes) Bild vermöge des Durchgangs der Strahlen durch die Planplatte ergab.

Gehen wir zu dem allgemeineren Fall schiefer Incidenz über und lassen eine Planparallelplatte, deren Grenzflächen AB und $A'B'$ (Fig. 7), Dicke t, Index n, von einem Lichtstrahl $LDD'M$ unter der Incidenz e durchdringen und bestimmen auch hier die den Hauptpunkten analogen Punkte E und E' als auf den Grenzen einer idealen Platte von der Dicke EE' gelegen, durch welche der Lichtstrahl den Weg $LEE'M$ einschlagen würde, wobei, wie wenn der Index der idealen Platte unendlich gross wäre, der innere Strahl in einer zur Platte normalen Richtung verliefe. Bezeichnen wir das auf die Incidenz e bezügliche Interstitium EE' der Platte $ABA'B'$ durch ε, so finden wir leicht aus der Betrach-

tung des Dreiecks DCE, worin der Winkel bei C gleich dem Brechungswinkel r, bei D gleich $e-r$, bei E gleich 180^0-e, und CD, CE proportional der Weglänge des inneren Strahls in der wirklichen und in der idealen Platte sind, $CE:CD = \sin(e-r):\sin e = s:t.\sec r$, woraus

$$s = \frac{t}{\cos r}.\frac{\sin(e-r)}{\sin e} = t(1-\frac{\tan r}{\tan e})$$

oder, unter Berücksichtigung von (1):

$$(12) \qquad s = t(1-\frac{1}{n}.\frac{\cos e}{\cos r})$$

und dieser Werth von s geht in den obigen s^0 über für $e = r = 0$, während bei streifender Incidenz, wo $e = 90^0$, $r = \omega$, das relative Interstitium der Dicke t der Platte gleich wird.

Ist $E'H$ senkrecht zu dem einfallenden Strahl LD, so ist $E'H = s.\sin e$ die Verschiebung, welche in der Einfallsebene der austretende Strahl $D'M$ aus seiner ursprünglichen Lage LD ohne Richtungsänderung erfährt. Für eine Gesammtheit paralleler Strahlen besteht die Wirkung der Parallelplatte lediglich in dieser Verschiebung; Bild und Object liegen beide in derselben Richtung in unendlicher Entfernung.

Um ferner die Wirkung auf einen mässig breiten homocentrischen divergenten oder convergenten Strahlenkegel zu ermitteln, betrachten wir zuerst den Vorgang der Brechung an Einer brechenden Ebene.

Es sei AB (Fig. 8) die ebene Grenzfläche einer unterhalb befindlichen durchsichtigen Substanz vom Brechungsindex n. Ausserhalb in P befinde sich ein Objectpunkt, von welchem ein

divergenter Strahlenkegel von geringer Angularöffnung unter schiefer Incidenz bei CC' auf die brechende Ebene AB einfalle. Die unterhalb AB verlaufenden gebrochenen Strahlen werden rückwärts verlängert, um den Ort ihrer Concurrenz zu ermitteln. Während nun bei dem Vorgang der Reflexion am Planspiegel die Strahlenkegel bei jeder Incidenz ihre Homocentricität nach der Reflexion bewahren, ist dies bei der Refraction nicht der Fall. Der gebrochene Strahlenkegel ist mit einer planatischen Abweichung behaftet und zwar so, dass die Concurrenzpunkte im Allgemeinen auf zwei conjugirten diakaustischen Flächen liegen, von denen die eine die Rotationsfläche einer diakaustischen Curve ist mit einer Spitze in V, die andere bloss in einer auf der zu AB normalen Rotationsaxe VV' der ersteren Fläche liegenden geraden Linie besteht. Die diakaustische Curve ist im vorliegenden Fall einer brechenden Planfläche die Evolute einer Hyperbel oder einer Ellipse, jenachdem $n >$ oder < 1, deren Centrum in A, grosse Axe in AV, Brennpunkt in P liegt und deren Excentricität gleich dem Brechungsverhältniss ist. Der gebrochene Strahlenbündel ergibt nun für solche Strahlen, welche in der Einfallsebene (Primärebene) liegen, einen Concurrenzpunkt an der Berührungsstelle Q' auf der ersten Fläche, für Strahlen, welche in einer zur Einfallsebene senkrechten Ebene (Secundärebene) verlaufen, einen Concurrenzpunkt an der Berührungsstelle Q'' auf der zweiten Fläche, und sämmtliche Strahlen gehen sehr nahe durch zwei kleine zur Axe des Strahlenkegels senkrechte gerade Linien, „Focallinien“ genannt, die erste in Q' senkrecht zur Primärebene, die zweite in Q'' senkrecht zur Secundärebene, so dass also die Querschnitte des

Bündels bei Q' und Q'' nahezu kleine gerade Linien, zwischen Q' und Q'' kleine Flächen von nahe elliptischer Form und nahe mitten zwischen Q' und Q'' eine kleine Kreisfläche, den „kleinsten Abweichungskreis“ darstellen, dessen Durchmesser als Mass der Nicht-Homocentricität vorliegender Art oder der *Anacentricität* angesehen werden kann. Ein Auge im zweiten Mittel in O mit runder Pupille oder ein Fernrohr mit kreisförmiger Objectivöffnung würde also das Object P in der Richtung CQ' aber nicht vollkommen scharf sehen. Vermittelst eines vor das Auge oder das Objectiv des Fernrohrs gehaltenen schlitzförmigen Diaphragmas würde das Bild zur Schärfe gebracht werden können und zwar am scheinbaren Platze Q', wenn die Schlitzrichtung in die Primärebene gestellt, am Platze Q'', wenn dieselbe um 90 Grad gedreht würde*) Nach dieser allgemeinen Orientirung lässt sich

*) Versuche dieser Art, die ich mittelst Fernrohrs, vor seinem Objectiv mit spaltförmiger Blende versehen, angestellt habe an Wasser, in welchem sich in 400 Millimeter Tiefe ein Object befand, und wo die Verstellung des Oculars bei grossen Incidenzwinkeln bis zu mehreren Centimetern reichte, gaben eine vollständige experimentelle Bestätigung. Es ist also nicht zutreffend zu sagen, dass das Auge — ohne weitere Bedingungen — das Bild in solchen Fällen sei es am Orte des ersten Anacentrums, sei es am Orte des zweiten erblicke. Die letztere Angabe macht u. a. Lamé (*Cours de physique* II. 139, 178); die erstere ist bei den graphischen Constructionen der darstellenden Optik von Engel und Schellbach ausschliesslich zu Grunde gelegt, desgleichen in Herschel's „*on light*“ und vielen älteren Schriften, während bereits Newton lange vor Malus' Untersuchungen über die kaustischen Flächen den Ort des gesehenen Bildes mitten zwische beide Vereinigungsstellen setzte, denen spätere englische Schriftsteller die Benennung „*focal lines*“ beilegten.

die Untersuchung auf die Bestimmung der Plätze Q' und Q'' der beiden Focallinien für die Primär- und Secundärebene beschränken.

Wir setzen $CP = p$, $CQ' = q'$, $CQ'' = q''$, den Einfallswinkel $= e$, Brechungswinkel $= r$, und ziehen CD senkrecht zu CP und CE senkrecht zu CQ'. Gehen wir von den Richtungen PC, $Q'C$, welche mit der Normale AV die Winkel e und r bilden, durch kleine Augmente dieser Winkel zu den Richtungen PC' und $Q'C'$ über, so gibt die Gleichung $\sin e = n \sin r$ durch Differentiation $\cos e\, de = n \cos r\, dr$ oder

$$\frac{de}{dr} = n . \frac{\cos r}{\cos e}.$$

Da nun aber $CD = CC' \cos e$, $CE = CC' \cos r$ und $CD = p\, de$, $CE = q' dr$, so ist auch

$$\frac{de}{dr} = \frac{q'}{p} . \frac{\cos e}{\cos r}$$

folglich

$$\frac{q'}{p} = n . \frac{\cos r^2}{\cos e^2}$$

oder

$$q' = np . \frac{\cos r^2}{\cos e^2} \tag{13}$$

Für Strahlen in der Secundärebene aber ist

$$q'' = np \tag{14}$$

wo (13) die erste, (14) die zweite Focallinie des anacentrisch gebrochenen Strahlenbündels bestimmt. Der letzte Ausdruck, unabhängig von e und r, zeigt dass das secundäre Anacentrum

stets auf der durch den Objectpunkt P zur brechenden Fläche gezogenen Normale PA liegt*).

Betrachten wir jetzt den Durchgang eines Strahlenkegels von mässiger Apertur durch eine Planparallelplatte, so falle zuerst von einem reellen Objectpunkte P (Fig. 9) divergentes Licht

*) Die Approximation dieser Bestimmung reicht bis zu Grössen der zweiten Ordnung der Kleinheit. Geht man hierin weiter, so erweisen sich die Focallinien als von geraden Linien abweichend; die erste, zur Primärebene senkrechte, als ein kleines Stück eines Kreisbogens, die zweite, senkrecht zur Secundärebene, als eine durch eine sehr gestreckte ∞ förmige Curve begrenzte kleine Fläche. Diese Dissimilarität der Focallinien anacentrischer Strahlenkegel ist zumeist mit der schiefen und excentrischen Incidenz an sphärischen sowohl zurückwerfenden als brechenden Flächen verknüpft. Flächen mit ungleichen Krümmungsradien oder solche mit Krümmungen von ungleichen Zeichen (difflexe Flächen) bewirken unter senkrechtem Einfall Anacentricität mit similären und geradlinigen Focallinien. Beispiele sind cylindrische und sattelförmige Spiegelflächen, Linsen mit einer oder zwei cylindrischen Seiten, so wie das astigmatische Auge. — Im Falle senkrechter Incidenz, wo q' und q'' gleich werden und also bei der obigen Annäherung Homocentricität resultiren würde, bleibt noch eine erst bei Berücksichtigung kleiner Grössen höherer Ordnung erkennbare und für Strahlenkegel grösserer Apertur merkliche Abweichung übrig, vermöge welcher die centralen Strahlen des Lichtkegels eine Concurrenz in der beiden diakaustischen Flächen gemeinsamen Spitze V, die übrigen aber ringförmige auf der ersten und punktförmige auf der zweiten Fläche liegende Concurrenzlinien ergeben in rings um die Axe VV' symmetrischer Vertheilung. Die Querschnitte des Lichtbündels, statt wie im obigen Falle der Anacentricität Ellipsen, die sich an zwei Orten auf Focallinien zusammenziehen und dazwischen einen Uebergang durch die Kreisform darbieten, sind jetzt durchweg kreisförmig, unter ihnen ein kleinster Abweichungskreis mit hellerem Centrum und ringsum gleichförmig hellerem Rande. Diese Art von Nicht-Homocentricität kann man als *pericentrische* bezeichnen.

in der Richtung PC auf die Platte $ABA'B'$. Die erste Brechung bei C ergibt in der Primärebene das Bild Q', in der Secundärebene das Bild Q''. Nach der zweiten Brechung bei D erwächst in der Primärebene aus Q' das virtuelle Bild P', in der Secundärebene aus Q'' das virtuelle Bild P''. Wir bezeichnen CP durch p, CQ' durch q', CQ'' durch q'', DP' durch p', DP'' durch p'', die Dicke CF der Platte durch t. Dann ist nach (13) und (14) für den Eintritt bei C

$$q' = np \cdot \frac{\cos r^2}{\cos e^2}, \qquad q'' = np$$

Da nun $CD = t.\sec r$, so ist, sofern man nur Strahlen in der Primärebene betrachtet, vermöge (13), wo n durch $\frac{1}{n}$, q' durch p' und p durch q' zu ersetzen, so wie r und e zu vertauschen,

$$p' = \frac{1}{n}(q' + t\sec r)\frac{\cos e^2}{\cos r^2}$$

und, insofern man nur Strahlen in der Secundärebene betrachtet, vermöge (14), wo wiederum n durch $\frac{1}{n}$, q'' durch p'' und p durch q'' zu ersetzen,

$$p'' = \frac{1}{n}(q'' + t\sec r)$$

also durch Substitution der vorherigen Werthe von q' und q''

$$(15) \qquad p' = p + \frac{t}{n} \cdot \frac{\cos e^2}{\cos r^3}$$

$$(16)\qquad p'' = p + \frac{t}{n \cos r}$$

wo (15) das primäre, (16) das secundäre Anacentrum durch die Entfernung von der Austrittsstelle D des in der Axe des Lichtbündels verlaufenden Strahles bestimmt, der vor und nach dem Durchgang die parallelen Richtungen PC und DM besitzt.

Der Objectpunkt P erfährt durch die dioptrische Wirkung der Platte von der Dicke t und dem Index n bei der schiefen Incidenz e eine *Versetzung* in einem primären Anacentrum nach P', in einen secundären nach P''. Die Versetzung des zweiten geschieht nach der zur Platte gezogenen Normale im Sinne des durchgehenden Lichts und kann in einen longitudinalen Theil PH und in einen lateralen HP'' zerlegt werden. Für die Versetzung des ersten Anacentrums ist der laterale Theil eben so gross, und nur der longitudinale um die anacentrische Strecke $P'P''$ grösser als für das zweite Anacentrum. Nun überzeugt man sich leicht mittelst der Ausdrücke (15), (16) und (12), dass wenn man den longitudinalen Theil PH der Versetzung durch h, den lateralen HP'' durch k, die Strecke $P''P'$ zwischen beiden Focallinien durch l $(= p'' - p')$ bezeichnet und das relative Interstitium der Platte durch ε, sich ergibt

$$(17)\qquad h = t \,.\, \frac{\sin(e-r)}{\sin r} \cot e = \varepsilon \,.\, \cos e$$

$$(18)\qquad k = t \,.\, \frac{\sin(e-r)}{\sin r} = \varepsilon \,.\, \sin e$$

$$(19)\qquad l = \frac{t}{n \cos r}\left(1 - \frac{\cos e^2}{\cos r^2}\right) = t\left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{\tan r^2}{\cos r},$$

dass also die Versetzung $PP'' = \varepsilon$, gleich dem relativen Interstitium, gerichtet normal zur Platte im Sinne des durchgehenden Lichts, dass die Strecke l (da n hier stets > 1) positiv, somit die longitudinale Versetzung von P' oder $h + l$ grösser als die longitudinale Versetzung von P'' ist, und dass endlich diese Grössen von p d. h. von der Entfernung des Objectpunktes von der Platte unabhängig sind, vielmehr nur von t, n und e abhängen.

Die letzterwähnte Unabhängigkeit der durch die Platte bewirkten dioptrischen Versetzung von dem Orte, wo wir dieselbe dem von dem reellen Objectpunkt P aus divergirenden Strahlenkegel in den Weg stellen mögen, könnte die besondere Betrachtung auch des Falles eines convergenten durch die Platte gehenden Lichtbündels überflüssig machen. Gleichwohl sei dieser Fall, weil er für die Anwendung in dioptrischen und katoptrischen Vorrichtungen mindestens von gleichem Interesse sein dürfte wie der vorige, noch besonders erörtert.

Stellen wir (Fig. 10) eine Parallelplatte $ABA'B'$ von der Dicke t und dem Index n einem von L nach dem virtuellen Objectpunkte P convergirenden Strahlenkegel unter der Incidenz e in den Weg, bezeichnen für die erste Brechung bei C die Entfernung CP durch p, CQ' durch q', CQ'' durch q'', wo Q' das primäre, Q'' das secundäre Anacentrum in Folge des Eintritts bei C bedeutet, und ebenso für die zweite Brechung bei D, wo durch Strahlen in der Primärebene aus Q' das erste Anacentrum in P', durch Strahlen in der Secundärebene aus Q'' das zweite Anacentrum in P'' hervorgeht, DP' durch p', DP'' durch p'', so führt uns die frühere Betrachtung der Brechung an Einer Ebene, auf

den jetzigen Fall angewendet, wo P' sowie Q' und Q'' im zweiten Mittel liegen, und somit p, q', q'' als negativ zu betrachten sind, auf

$$-q = -np\frac{\cos r^2}{\cos e^2}$$

$$-q'' = -np$$

und die Betrachtung der zweiten Brechung bei D unter Berücksichtigung von $CD = t.\sec r$ auf

$$-p' = -\frac{1}{n}(q' - t\sec e)\frac{\cos e^2}{\cos r^2}$$

$$-p'' = -\frac{1}{n}(q'' - t.\sec e)$$

oder auf

$$-p' = -p + \frac{t}{n}.\frac{\cos e^2}{\cos r^3}$$

$$-p'' = -p + \frac{t}{n\cos r}$$

welche gleichlauten mit (15) und (16) bis auf die Zeichen von p, p', p'', da jetzt die Punkte P, P', P'' auf der Seite des austretenden Lichtes liegen, während sie im vorigen Fall auf der Seite des eintretenden Lichts gelegen waren.

Auch hier ist die Versetzung $PP'' = \varepsilon$, gerichtet normal zur Platte und im Sinne des von C nach D durchgehenden Lichts. Bezeichnen wir wiederum HP'' durch h, PH durch k, $P''P'$ duch l, so finden sich für h, k, l auch hier die in (17), (18), (19) aufgeführten Werthe.

Kehren wir die Figur 10 in ihrer Ebene um 180° um und fassen dann ihren Zusammenhang mit Figur 9 ins Auge. Dort wie hier verläuft jetzt das Licht von oben nach unten und kann

als convergenter Strahlenkegel oberhalb P (der auf den Kopf gestellten Figur 10), als divergenter Strahlenkegel unterhalb P (der Figur 9) betrachtet werden. Vereinigt man beide Figuren in eine so dass beide Punkte P coincidiren und die Richtungen CP der Fig. 10 und PC der Fig. 9 in Eine gerade Linie fallen, und setzt in der ganzen Figur t, n und e als gleich voraus, so muss offenbar auch Coincidenz in den Punkten P' und P'' eintreten, während dem ganzen kegelförmigen Strahlenbündel, dessen Vereinigungspunkt in P liegt, einmal die Platte auf der divergenten Seite unterhalb P, das anderemal auf der convergenten Seite oberhalb P, hier wie dort in gleicher Lage in den Weg gestellt erscheint, die Versetzungen PP' und PP'' so wie ihre longitudinalen und lateralen Theile h, k, l bleiben in beiden Fällen dieselben. Man dürfte die Platte parallel mit sich selbst aus der ersten allmälig in die zweite Stellung rücken, wobei auch der Uebergangsfall eintreten würde, dass der Concurrenzpunkt innerhalb der Platte fiele, ihre dioptrische Wirkung hinsichtlich der Versetzung würde während dieses Vorganges unverändert dieselbe sein, wodurch abermals die Unabhängigkeit dieser Wirkung von dem Platze, den die Platte auf dem Wege des Strahlenkegels einnimmt, evident wird.

Trotz der Unabhängigkeit der Grössen h, k, l von dem Orte der Platte äussert indess dieser Ort einen obwohl geringen Einfluss auf die Ausdehnung der Focallinien, den Ort und die Grösse des kleinsten Abweichungskreises.

Während in den beiden betrachteten Fällen, nämlich eines divergenten in die Platte einfallenden Strahlenkegels die positive Strecke l von dem zweiten Anacentrum P'' zum ersten P' im

Sinne der Lichtbewegung führt, wird was die Lage dieser Punkte zur Platte in beiden Fällen betrifft, bei dem divergenten Strahlenbündel (Fig. 9) das erste Anacentrum P', bei dem convergenten Bündel (Fig. 10) das zweite P'' der Platte näher liegen, so dass also, wenn p die Entfernung des Objectpunktes von der Eintrittstelle C in die Platte bedeutet, p und l im ersten Falle mit ungleichen, im zweiten mit gleichen Zeichen erscheinen. Nehmen wir jetzt die Gestalt des einfallenden Strahlenkegels von kreisförmiger Basis an, deren Durchmesser bei C gleich u sei, ferner die Grösse der primären Focallinie bei P' gleich u', der zweiten bei P'' gleich u'' und den Durchmesser des zwischen P' und P'' befindlichen kleinsten Abweichungskreises $= u^0$, endlich die Distanz dieses kleinsten Abweichungskreises, dessen Ort durch P^0 bezeichnet sei, von P' und P'' bezw. gleich l' und l'', so ergibt eine leichte Ueberlegung an den in der Primär- und Secundärebene liegenden Längsschnitten des anacentrischen Strahlenbündels, wenn man noch zur Abkürzung $\frac{l}{p}$ mit λ und die angulare Oeffnung des Strahlenkegels $\frac{u}{p}$ mit φ bezeichnet, die folgenden Ausdrücke

$$u' = \varphi l, \qquad u'' = \varphi l \cdot \frac{1}{1 \mp \lambda}, \quad \frac{u'}{u''} = 1 \mp \lambda$$

$$l' = l \cdot \frac{1 \mp \lambda}{2 \mp \lambda}, \quad l'' = l \cdot \frac{1}{2 \mp \lambda}, \quad u^0 = \varphi l \cdot \frac{1}{2 \mp \lambda},$$

wo sich das obere Zeichen auf den Fall eines divergenten, das untere auf den eines convergenten Strahlenkegels bezieht. Diese Relationen,

in welchen φ, λ, u', u'', u^0 meist nur kleine Grössen sind, zeigen dass sich u' und u'' sowie l' und l'' desto mehr der Gleichheit nähern, dass u^0 desto näher der Hälfte von u' oder u'' kommen und P^0 desto näher der Mitte zwischen P'' und P' liegen wird, je kleiner λ oder je grösser p im Vergleich mit l ist.

Die im Bisherigen gegebene ausführliche Erörterung der anacentrischen durch eine Planparallelplatte verursachte Abweichung möge nun durch ein Paar numerische Beispiele vervollständigt werden.

1. Beispiel. Ein achromatisches Fernrohr sei in horizontaler Stellung auf einen in kurzer Distanz befindlichen leuchtenden Punkt eingestellt. Als Object dient ein durch helles Tageslicht durchleuchteter feiner Nadelstich in einem schwarzen Schirm. Das Objectiv habe die Oeffnung von 81 Mm. Die Entfernung des Objects von dem Objectiv sei 6 Meter. Eine Wanne mit verticalen parallelen Glaswänden, gefüllt mit reinem Wasser, werde erst quer vor das Objectiv gestellt und darauf gleichsam um eine verticale Axe linksum so gedreht, dass die Normale der Glaswände, statt wie vorher nach dem Object. jetzt nach einem weit nach links gelegenen Punkt des Horizonts gerichtet sei. Der Incidenzwinkel, der Betrag dieser Drehung, sei 60°, die Dicke der Wanne (incl. Glaswände) sei 88 Mm. Es darf bemerkt werden, dass die Präcision bei der Verwirklichung eines solchen Versuchs in der Beschaffung einer solchen Wanne mit genau ebenen Glaswänden von etwa 1 Decimeter Höhe und 2¾ Decimeter Länge fast unüberwindliche Schwierigkeiten finden würde, und dass dieses Beispiel mehr als ein schematisches zu betrachten ist, in welchem Grössen, sonst nur

von geringem Betrag, erheblichere Werthe annehmen.

Wir berechnen mit $e = 60^0$ nach (1) den Brechungswinkel mit $n = 1.334$ und finden $r = 40^0 28'8$. Das Interstitium s^0 (für senkrechten Durchgang ist nahe $\frac{1}{4}$ der Dicke t, nämlich $= 22.033$ Mm., das relative Interstitium aber (für $e = 60^0$) finden wir aus (12) $s = 44.367$. Aus (17) und (18) finden wir nun die durch die Platte bewirkte Versetzung nämlich $h = 22.318$ Mm. und $k = 38.567$ Mm., so dass also das secundäre (durch eine vor das Objectiv gebrachte verticale Spaltöffnung als scharfes, abweichungsfreies Bild auftretende) Anacentrum um h genähert, um k nach rechts gerückt erscheint. Aus (19) finden wir $l = 49.251$ Mm., um so viel liegt das primäre Anacentrum (durch eine horizontale Spaltöffnung scharf gesehen) diesseits des secundären. Die laterale Versetzung k würde sich sei es durch messbare Winkeldrehung des Instruments, sei es durch ein Ocularmikrometer bestimmen und verificiren lassen. Nicht so in Betreff von h und l. Das Fernrohrobjectiv habe eine Brennweite von 975 Mm. (3 Fuss) dann würde die Versetzung h nur 0.84 Mm. und l nur 0.89 Mm. Verstellung des Oculars veranlassen, welche Grössen versuchsweise zu ermitteln, um aus ihnen h und l abzuleiten, so gut wie unthunlich sein würde. Genug, dass der scharfen Rechnung zufolge, wenn das anfänglich auf den Lichtpunkt scharf eingestellte Ocular, nunmehr um 0.84 Mm. ausgezogen wird, das Bild sich als eine kleine scharfe horizontale Lichtlinie (zweites Anacentrum) und nach weiterem Auszug um 0.89 Mm. als kleine horizontale Lichtlinie (erstes Anacentrum) darstellen würde. So weit ist das Ergebniss unabhängig von dem

Platze, den die Wanne zwischen dem Lichtpunkt und dem Objectiv einnimmt. Die Wanne stehe ganz nah vor dem Objectiv, nämlich mit der Mitte ihrer rectangulären Basis 14 Centimeter vor dem Objectiv und 2 Centimeter ($\frac{1}{5}k$) links von der Fernrohraxe, so dass der Einfallspunkt des Axenstrahls rund 20 Centimeter vor dem Objectiv liegt. Zur Bestimmung von φ ist die Objectivöffnung $u = 81$ Mm. zu dividiren durch 5978, indem das Objectiv von dem Objectpunkt aus gesehen um 22 Mm. angenähert erscheinen würde. Es findet sich $\varphi = 0.01355$ ($= 46'58''$), somit aus (20) $u' = \varphi l = 0.667$ Mm. Zur Bestimmung von λ ist $p = 5800$, also $\lambda = \frac{l}{p} = 0.00849$ und $1 - \lambda = 0,99151$, woraus $u'' = 0,573$ Mm. Ferner finden wir $l' = 24,52$, $l'' = 24,73$ Mm. und $u^0 = 0.335$ Mm. Die Focallinien sind also $\frac{2}{3}$ Millimeter lang, der Durchmessser des kleinsten Abweichungskreises $\frac{1}{3}$ Mm. Daneben ist in Millimetern $u'' - u' = 0.006$, $\frac{1}{2}(l'' - l) = 0.105$ und $u^0 - \frac{1}{4}(u'' + u') = 0.00005$. Steht dagegen die Wasserwanne in der Nähe des Objects unter gleicher Incidenz von 60^0 so dass $p = 30$ Centimeter, so würde man aus (20), wobei φ denselben Werth 0.01355 behielte, finden: $u' = 0.667$ — ebensogross wie vorher —, und da jetzt $\lambda = 0\,07439$, $1 - \lambda = 0,9256$ und $2 - \lambda = 1.9256$, $u'' = 0.783$ Mm. sowie $l' = 23.674$, $l'' = 25.577$ und $u^0 = 0.377$ Mm., während das halbe Mittel von u' und u'' gleich 0,363 Mm. ist. Durch einen Platzwechsel der Wasserschicht um $5\frac{1}{2}$ Meter aus der Nähe des Objectivs in die Nähe des Objects ist also nur die secundäre Focallinie um 0.058 Mm. und der kleinste Abweichungskreis um 0.013 Mm. grösser geworden und letz-

terer, anfänglich 0.096 Mm. diesseits der Mitte zwischen beiden Focallinien gelegen, um weitere 0.85 Mm. diesseits gerückt. Die kleinen Verstellungen des Oculars würden die beiden Focallinien wahrnehmbar machen, welche unter Voraussetzung einer 40maligen Vergrösserung des Fernrohrs etwa erscheinen würden wie dem blossen Auge der halbe Monddurchmesser. Die schärfste Einstellung auf den kleinsten Abweichungskreis würde ein Lichtscheibchen gewähren von etwa 9maligem Durchmesser des Jupiters zur Zeit seiner Opposition, oder etwa $\frac{4}{7}$ der Distanz des bekannten kleinen Sterns Alkor von seinem grösseren Nachbar ζ (Mizar) des grossen Bären. Bringen wir endlich unser Auge an die Stelle des Fernrohrobjects, so werden die angegebenen Grössen in den Phasen der durch die 88 Mm. dicke Wasserschicht und Durchgangsschiefe von 60^0 verursachten Anacentricität nicht etwa bloss 40mal kleiner, sondern, sofern die Pupille fast nur einen 25mal kleineren Durchmesser hat, etwa 1000 mal geringer, d. h. durchaus unmerklich ausfallen. Dies Beispiel gibt aber auf palpable Weise kund, wie gering selbst unter Anwendung gewissermassen heroischer Mittel die in Rede stehende Aberration ausfällt.

2. Beispiel. In den Tubus eines Mikroskops bringt man eine Planparallelplatte in der Neigung von 45 Grad oder, was abgesehen von der die Homocentricität nicht afficirenden Reflexion dasselbe ist, ein rechtwinkliches Reflexionsprisma unter dem Richtungswinkel Null. Die Dicke der Platte sei 32 Mm., oder die Basislänge des Prismas 45.25 Mm., der Brechungsindex 1.515. Die Apertur des Lichtkegels, welche im vorigen Beispiel kaum $\frac{1}{75}$ war, nehmen wir hier möglichst gross und setzen dessen Breite beim Austritt aus

der letzten Objectivlinse = 9 Mm., seine Länge = 180 Mm., also $\varphi = \frac{1}{20}$ (= 2°57′). Bei mittleren und starken Objectiven ist die Austrittsöffnung und somit φ erheblich geringer, $\frac{1}{25}$ bis $\frac{1}{40}$ wie namentlich bei älteren französichen Mikroskopen. Bestimmen wir jetzt die anacentrischen Elemente, so finden wir für $e = 45^0$, $r = 27^0 49'4$ und hieraus mittelst (12) in Millim. $s = 15.113$, sowie mittelst (17), (18), (19) $h = 10.686$, $k = 10.686$, $l = 8.615$. Wir verlängern das Rohr am Ocularauszug um die longitudinale Versetzung von 10.686 Mm, wodurch die angulare Apertur von 2°57′ des convergenten Lichtkegels conservirt bleibt. Der lateralen Versetzung k im Falle der Platte muss eine gleichgrosse seitliche Verschiebung des Oculars entsprechen; bei dem Prisma wird dieselbe compensirt. Das Ocular zeigt jetzt — die Wahrnehmbarkeit vorausgesetzt — die secundäre Focallinie in der Richtung des Hauptschnitts von Platte oder Prisma und, wenn um 8.616 Mm. ausgezogen, die primäre Focallinie in 90 Grad davon verschiedener Richtung. Nahe mitten zwischen beiden Ocularstellungen erscheint das Bild in kleinster anacentrischer Abweichung. Ohne Ocularverschiebung in der beim Mikroskop gewohnten Verstellung des Objects gegen das Objectiv oder des ganzen Rohrs gegen das feste Object wird der anacentrische Ausschlag statt 8.6 Mm. je nach der Brennweite des Objectivs einen verschiedenen aber sehr viel kleineren Betrag geben. Um ihn relativ gross zu erhalten, nehmen wir ein schwaches Objectiv von der Brennweite 18 Mm. an, setzen dessen zweiten Brennpunkt ganz nahe an der letzten Fläche liegend und finden die mittelst der feinen Einstellung des Instruments zu durchlaufende Strecke = 0.043, deren Hälfte etwa auf das Bild kleinster Abwei-

chung führen würde. Bis dahin ist der Platz, den wir im Raume zwischen Objectiv und Ocular der Platte oder dem Prisma anweisen, irrelevant. Zur scharfen Bestimmung der Anacentritäts-Phasen aber nehmen wir jetzt an, die Mitte der Platte oder des Prismas liege auf der halben Höhe des Lichtkegels, genauer 90 Mm $+ \frac{1}{2}h =$ 95 Mm. von dem longitudinal um h versetzten secundären Anacentrum entfernt, dann ist die Länge des anacentrischen Strahlenbündels von dem Austritt aus Platte oder Prisma bis zum secundären Anacentrum $=$ 90 Mm., also $\lambda = 0.095726$, $1 + \lambda = 1.095726$. Hieraus erhalten wir in Millimetern

$$l' = 4.504, \quad l'' = 4.111$$
$$u' = 0.00580, \quad u'' = 0.00530$$
$$u^0 = 0.00277$$

wobei $\frac{1}{2}(l' + l'') = 4.3075$, kaum um 0.2 Mm. (0.1965) von l' und l'' verschieden und $\frac{1}{4}(u' + u'') = 0.00277$, bis zur 5. Decimale des Millimeters mit u^0 übereinstimmend. — Anacentrische Phasen von 3 bis 5 oder 6 Mikra (Tausendtel des Millimeters) welche selbst durch die stärksten Oculare unerkennbar sind, werden durch die bei den besten Mikroskopen unbeseitigten Reste der sphärischen Aberration, ja schon durch ganz geringe Grade von Astigmatismus des Auges vollkommen maskirt. In der That konnte bei Versuchen dieser Art mit einem vorzüglichen Winkel'schen Mikroskop selbst Hrn. Winkel's sehr geübtes Auge an einem geeigneten Object (Lepisma saccharinum) keinen anacentrischen Einfluss auf die Definition erkennen. Wir erinnern noch ausdrücklich, dass bei dieser Frage nur die Ocularvergrösserung und die Breite des Strahlenkegels beim Austritt aus dem Objectiv, nicht aber die Stärke oder die Kürze der Brennweite des letzteren massgebend ist und

somit die Wahl eines schwächeren gut corrigirten Objectivs mit möglichst vollkommener Definition sowohl wegen der grösseren Linearöffnung der letzten Linse als wegen des unerheblichen Einflusses des Deckglases indicirt ist.

Diese Beispiele, welche sich leicht noch durch andere nicht minder instructive vermehren liessen, genügen zur Begründung der Ansicht, dass die aus schiefer Incidenz bei dem Reflexionsprisma erwachsende Beeinträchtigung des Aplanatismus in den meisten wirklichen Vorkommnissen als unerheblich oder unmerklich zu betrachten sind und dass die Scheu, welche Künstler in derartigen Fällen gegen andern als senkrechten Durchgang durch die Flanken des Reflexionsprismas zu hegen pflegen, zwar theoretisch motivirt, in der Praxis aber als eine so gut wie belanglose Mikrologie angesehen werden darf*).

*) Eine ebenso willkommene als in der fraglichen Beziehung interessante von J. W. Stephenson in London neuerdings getroffene Einrichtung des binocularen Mikroskops mit aufrechtem Doppelbilde enthält drei Reflexionsprismen zwischen Objectiv und beiden Ocularen. Zwei derselben, rechtwinklig und abgestumpft, mit ihren Basisflächen gegen einander gekehrt, theilen den aus dem Objectiv austretenden Strahlencomplex gleichmässig und pervertiren zugleich jeden für je ein Auge bestimmten Theil in der Dimension der Breite. Der Richtungswinkel ist 2 Grad, wodurch eine Binocularparallaxe von 8 Grad erzielt wird, welche bei der Wenham'schen Einrichtung (ohne aufrechte Bilder) minder bequem 12 Grad zu sein pflegt. Die Incidenz ist also $e = 43^0$. Das dritte Prisma vom Winkel 75°, mit seinem Hauptschnitt senkrecht zu den Hauptschnitten der beiden andern, pervertirt die beiden Lichthälften in der Dimension der Höhe, unter senkrechter Incidenz, somit unter dem Richtungswinkel 37½ Grad, so dass bei verticaler Objectivaxe und horizontalem Tisch, die Augenaxen des Beobachters unter 15° Neigung gegen den Horizont abwärts gerichtet sind. („On an erecting binocular Microscope“ — read before the

Nachdem wir im Bisherigen an der Planparallelplatte den anacentrischen Einfluss auf das durchtretende homocentrische divergente oder convergente Licht mit derjenigen Ausführlichkeit, welche der Gegenstand zu verdienen scheint, erörtert und dadurch die genaue Einsicht in den dioptrischen Theil der Leistung des Reflexionsprismas gewonnen haben, mag nun noch in Kürze seine katadioptrische Wirkung auch im Falle eines in beliebiger Entfernung befindlichen reellen oder virtuellen Objectpunktes untersucht werden. Diese katadioptrische Wirkung ist offenbar die Combination einer Reflexion an einem in der Basisebene befindlichen Planspiegel, wo für die Incidenz der oben ausführlich besprochene Umfang $\theta' - \theta^0$ freisteht, mit der zweimaligen Refraction an einer Planparallelplatte von gleichem Index n und der Dicke $t = a.\cos\alpha$. Einem gegebenen Objectpunkt P entspreche das von der als Planspiegel wirkenden Basis reflectirte Bild Q. Dem durch die Platte gesehenen Objectpunkt Q entspreche das secundäre Anacentrum Q''. Für einen mittleren Strahl des durchgehenden Strahlenkegels, welcher auf der Mitte (R in Fig. 2 und 6) der Basis seine Reflexion erfährt, und dem Richtungswinkel θ entsprechen mag, findet man die Incidenz $e = \alpha - \theta$ und daraus mittelst (1) den Brechungswinkel r. Nun findet sich das zu e gehörige Interstitium aus (12):

$$\varepsilon = a.\cos\alpha\left(1 - \frac{\tan r}{\tan e}\right)$$

und hieraus die beiden ersten Theile der dioptrischen Versetzung $h = \varepsilon.\cos e$, $k = \varepsilon.\sin e$.

Roy. Micr. Soc. Jun. 8, 1870 — Monthly Microscopical Journal. Vol. IV. p. 62.)

Legt man den Platz von P durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y fest, wobei x in der Richtung der Basis von R, ihrer Mitte, positiv sei nach der Seite der Eintrittsflanke, y positiv auf der Seite der Kante C. Dann hat Q die Coordinaten x und $-y$ und Q'' die Coordinaten $x-\varepsilon\cos\alpha$ und $-y+\varepsilon\sin\alpha$. Setzen wir nun das Bild von P in die Mitte zwischen beide Anacentra, was in allen Vorkommnissen nach dem Vorherigen hinreichend genau ist, so liegt, wenn wir das primäre Anacentrum von Q durch Q' bezeichnen und Q^0 in der Mitte zwischen Q' und Q'' angenommen wird, das durch das Prisma gesehene Bild in Q^0, dessen Coordinaten sind, wenn l aus (19) entnommen wird,

$$x-\varepsilon\cos\alpha-\tfrac{1}{2}l\cos\theta$$
$$-y+\varepsilon\sin\alpha+\tfrac{1}{2}l\sin\theta,$$

wodurch der Platz des Bildes gegen das Prisma festgelegt ist.

Diese Ortsbestimmung des Bildes für ein in endlicher Entfernung liegendes reelles oder virtuelles Object, welcher sich noch verschiedene andere Formen geben liessen, zeigt dass der Zusammenhang zwischen Bild und Object in diesem Falle nicht mehr streng durch den lediglich katoptrischen Vorgang darstellbar ist. Die einfachste Auffassungsweise der katadioptrischen Wirkung des Reflexionsprismas bleibt vielmehr die, dass wir mittelst desselben das plankatoptrische Bild durch die vicarirende Platte von der Dicke $a.\cos\alpha$ unter dem Incidenzwinkel $\alpha-\theta$ betrachten, und dass somit die wesentliche mit der Perversion verbundene katoptrische Versetzung modificirt wird durch die accessorische dioptrische Versetzung lateral um k,

longitudinal zum primären Anacentrum um $h+l$, zum secundären Anacentrum um h und zum Bilde kleinster Abweichung um

$$h+\frac{l}{2+\lambda}$$

wofür in den meisten Fällen mit ausreichender Genauigkeit $h+\frac{1}{2}l$ gesetzt werden darf. Die obigen Ausdrücke (12), (17), (18), (19) enthalten die Vorschriften zur Berechnung der eben erwähnten Grössen h, k, l aus den gegebenen a, α, n und θ. Der in irgend einer Form festgelegte Platz des gegebenen Objects wird erforderlich, sobald auf die kleine Grösse λ, welche im Fall eines virtuellen Bildes negativ zu nehmen ist, Rücksicht genommen werden soll; und zur Bestimmung der Grösse des kleinsten Abweichungskreises

$$\varphi\frac{l}{2+\lambda}$$

wofür wiederum $\frac{1}{2}\varphi l$ gesetzt werden kann, bedarf es noch der in Theilen des Radius ausgedrückten Angularapertur φ des durchgehenden Lichtkegels.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

4. October. № 20. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve.

Von

A. Brill in Darmstadt.

Vorgelegt von A Clebsch.

Ich beabsichtige im Nachfolgenden zwei Sätze zu beweisen, welche für die Theorie der Curven von allgemeinem Geschecht, insofern dieselben mit Büscheln combinirt werden, von Nutzen sind. Insbesondere lassen sich, wie die beigefügten Beispiele zeigen, gewisse Eigenschaften der Raumcurven, wie sie neuerdings Herr Zeuthen*) in eingehender Weise behandelt hat, mit Hilfe jener Sätze leicht und ohne Zuziehung fremder Elemente untersuchen.

Der eine derselben besteht in der schon von Herrn Cayley durch Induction**) gefundenen Erweiterung des berühmten Correspondenzsatzes von Herrn Chasles für Curven von allgemeinem Geschlecht. Ein Beweis desselben scheint nicht bekannt zu sein. Derselbe ergiebt sich indess

*) Annali di mat. Ser. II, T. III, p. 175.
**) Comptes rendus T. LXII, p. 586.

unmittelbar aus dem anderen jener beiden Sätze, welcher die Ausdehnung eines Satzes über Punctsysteme auf einer geraden Linie enthält, der sich in folgender Weise aussprechen lässt:

Wenn zwischen zwei Puncten x und u einer Geraden (x und u kann man etwa als Abstände von einem festen Punct auffassen) eine Relation $p(xu) = 0$ besteht, vermöge deren irgend einem Punct u p_1 Puncte x, dem Punct x p_2 Puncte u entsprechen*); wenn ferner vermöge einer zweiten Beziehung $q(xu) = 0$ dem u q_1 Puncte x, dem x q_2 Puncte u entsprechen (Correspondenz $(q_1 q_2)$), so ist im Allgemeinen die Zah der jenen beiden Beziehungen genügenden Punctepaare, nach einem bekannten Satz der Algebra:

$$A_{p,q} = p_1 q_2 + q_1 p_2.$$

Wir beginnen mit der Ausdehnung dieses Satzes auf Punctsysteme von Curven.

I.

Wenn an Stelle der Geraden eine Curve f vom Geschlecht p tritt, so wird einer Beziehung zwischen 2 Puncten x und u der Curve durch eine Gleichung $p(x_1 x_2 x_3, u_1 u_2 u_3) = 0$ zwischen den (homogenen) Coordinaten derselben ausgedrückt. Statt dieser Beziehung sei es gestattet wieder die abgekürzte $p(xu) = 0$ einzuführen.

Einem Punct u entspricht jetzt eine Curve, welche f in p_1 Puncten schneiden möge. Ebenso entspricht einem Punct x eine Curve, für welche p_2 die Zahl der Schnittpuncte sei. Zunächst möge $p(xu) = 0$ durch Zusammenfallen von x mit u im Allgemeinen nicht erfüllt werden. Besteht alsdann eine zweite Beziehung $q(xu) = 0$,

*) Herr Chasles bezeichnet eine solche Beziehung kurzweg als Corespondenz $(p_1 p_2)$.

für welche die Zahl der Schnittpuncte mit f bezw. durch q_1 q_2 bezeichnet wird, so ist die Zahl derjenigen Punctepaare x, u auf f, welche zugleich beiden Bedingungen genügen, wiederum $A_{p,q} = p_1 q_2 + q_1 p_2$.

Wenn dagegen die beiden Beziehungen p und q (wir wollen sie als Curven in den Coordinaten x auffassen) durch Zusammenfallen von x mit u identisch erfüllt werden, indem p im Punct u etwa einen b fachen, q einen c fachen Punct besitzt, so substituire man statt einer derselben, z. B. statt $q(xu) = 0$ eine andere:

$$\pi(xu) = p(xu) + \varepsilon . \delta p(xu) = 0^{*})$$

wo ε eine sehr kleine Grösse ist, $\delta p(xu) = 0$ eine Beziehung, welche, übrigens von demselben Grad in den Coordinaten x und u wie $p(xu)$, nur nicht durch Zusammenfallen von x mit u befriedigt wird.

So oft nun die Curve p mit f und q ausserhalb u einen weiteren Schnittpunct x gemeinsam hat, schneiden sich auch f, q und die (der Curve p selbst sehr nahe liegende) variirte Curve π in einem (dem x nahe benachbarten) Punct. Indessen besitzen f, q und π ausser diesen Schnittpuncten, deren Zahl wir eben suchen, noch folgende.

1. So oft $\delta p(xx) = 0$ die Curve f schneidet, haben jene 3 Curven c Schnittpuncte gemeinsam. Denn $p(xx)$ und $q(xx)$ verschwinden identisch. Die Zahl aller diesem Fall entsprechenden Schnittpuncte ist $= c(p_1 + p_2)$.

2. Die variirte Curve π besitzt in der Nähe von u mit f noch b Schnittpuncte gemeinsam, welche von der Auflösung des b fachen Punctes von p herstammen. So oft nun für eine beson-

*) vgl. Clebsch u. Gordan, Theor. d. Abel'schen Funct. 3. Cap.

dere Lage von u einer der übrigen Schnittpuncte von q mit f in die Nähe des c fachen Punctes, welchen q in $x=u$ besitzt, rückt (die Zahl dieser Fälle sei Q), passirt derselbe, indem u weiter rückt, jene b Schnittpuncte von π mit f und giebt so zu je b gemeinsamen Schnittpuncten von π, f, q Veranlassung. Die Zahl aller diesem Fall entsprechenden Schnittpuncte ist somit $= b.Q$.

Die Zahl $A_{p,q}$ derjenigen Punctepaare x, u, welche gleichzeitig den beiden Beziehungen p und q genügen, ist nach Vorstehendem:

$$A_{p,q}=p_1 q_2+q_1 p_2-c(p_1+p_2)-b\,Q.$$

Existirt auf f auch noch ein fester Punct a, in welchem $p(xu)=0$, als Function von x betrachtet, einen β_1 fachen, als Function von u einen β_2 fachen Punct besitzt; ebenso $q(xu)=0$ beszw. einen γ_1 und γ_2 fachen Punct, so hat man ausser den Lösungen $x=u$ diejenigen Paare, von denen ein Punct nach a fällt, aus der Zahl $A_{p,q}$ auszuschliessen. Man variire alsdann p durch Zufügung eines Gliedes $\varepsilon.\delta p(xu)$, welches weder für $x=a$, noch $u=a$ verschwindet, übrigens von demselben Grad in x und u wie p ist. Alsdann sind wegen a noch in Abzug zu bringen die Schnittpuncte mit f von:

1. $\delta p(x,a)=0$, p_1 an der Zahl, darunter $p_1-\beta_1$ Paare x, a, d. h. solche, für welche x von a verschieden ist. Jedes dieser Paare ist γ_2 fach zu nehmen, weil in a γ_2 Puncte u vereinigt gedacht werden müssen; sie zählen also für: $\gamma_2(p_1-\beta_1)$ Schnittpunctepaare x, a.

2. $\delta p(a,u)=0$, liefert $\gamma_1(p_2-\beta_2)$ Schnittpunctpaare u, a.

3. $q(a',u)=0$, wo a' ein dem Punct a be-

nachbarter Punct von f ist, liefert $\beta_1(q_2-\gamma_2)$ Paare u, α.

4. $q(x, \alpha') = 0$ liefert $\beta_2(q_1-\gamma_1)$ Paare x, α.

5. Die Paare α, α, an der Zahl $\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2$. Denn zwischen den Tangenten in dem Punct α bestehn zwei Correspondenzen $(\beta_1\beta_2)$ und $(\gamma_1\gamma_2)$. Daher die Zahl der den Beiden genügenden Tangentenpaare $= \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2$*) ist.

6. Endlich sind noch diejenigen Glieder in dem Ausdruck $A_{p,q}$, welche von dem Zusammenfallen der Puncte x und u herrühren, um die nach α fallenden Schnittpuncte zu vermindern. Von den Q mögen k nach α fallen.

Man erhält demnach endlich, nach einer kleinen Zusammenziehung:

$$A_{p,q} = (p_1-\beta_1)(q_2-\gamma_2)+(q_1-\gamma_1)(p_2-\beta_2) - c(p_1-\beta_1+p_2-\beta_2) - b(Q-k). \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Für $\beta_1, \gamma_2, \ldots$ sind Summen solcher Grössen zu setzen, wenn mehrere feste Puncte wie α auf f vorhanden sind.

Man kann dann der Formel 2) noch eine andere Form geben, wenn man $p_1 - \Sigma\beta_1 - b$ wieder kurzweg mit p_1, $q_1 - \Sigma\gamma_1 - c$ mit q_1 etc. $Q-k$ mit Q vertauscht, nämlich:

$$A_{p,q} = p_1q_2+q_1p_2+b(q_1+q_2)-bQ \ldots 3)$$

oder mit Rücksicht darauf, dass man statt $p(x\,u)$ auch $q(x\,u)$ hätte variiren können:

$$A_{p,q} = p_1q_2+q_1p_2+c(p_1+p_2)-cP \ldots 3)$$

wo P für die Beziehung p dasselbe ist was Q für q; oder endlich, wie sogleich gezeigt werden soll:

$$A_{p,q} = p_1q_2+q_1p_2-2bcp, \ldots 3^a)$$

wo p das Geschlecht der Curve f ist.

*) Diese Zahl wird modificirt, wenn die einzelnen Zweige der Curven p und q sich gegenseitig berühren.

Man hat also den S a t z:

Z w i s c h e n z w e i P u n c t e n e i n e r C u r v e f b e s t e h e e i n e B e z i e h u n g (wir wollen sie durch $(p_1 p_2)$ bezeichnen) vermöge deren einem Punct x p_2 (mit x bewegliche) Puncte u, von denen keiner nach x fällt, und einem Punct u p_1 eben solche Puncte x, von denen keiner nach u fällt, entsprechen, und welche, als Curve aufgefasst, in dem Punct u einen $b$fachen Punct besitzt; b e s t e h t a l s d a n n z w i s c h e n x und u n o c h e i n e z w e i t e ä h n l i c h e B e z i e h u n g $(q_1 q_2)$, für welche c die Vielfachheit des Punctes u ausdrückt, s o i s t $A_{p,q}$ (3ª) d i e Z a h l d e r P u n c t e p a a r e x, u, w e l c h e g l e i c h z e i t i g b e i d e n B e d i n g u n g e n g e n ü g e n.

Schnittpuncte, welche in singuläre Puncte a von f fallen, sind als nicht „frei bewegliche" zu betrachten. Die Zahl der Fälle, in welchen sowohl der Punct x wie der entsprechende u nach a gerückt ist, wird dann sehr oft nicht $= \beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2$ (s. d. Note S. 511), und $A_{p,q}$ wird durch einen von der Zahl derjenigen Doppel- und derjenigen Rückkehrpuncte, welche gleiches Verhalten zeigen, abhängenden linearen Ausdruck modificirt werden. Diese Beschränkung fällt indess weg, wenn f eine Raumcurve ohne Doppel- und Rückkehrpuncte ist, sowie ferner für eine grosse Gattung von Aufgaben über ebene Curvenbüschel, wenn alle Doppel- und Rückkehrpuncte der gegebenen Curve Basispuncte desselben sind. In anderen Fällen lassen sich die Coefficienten des zuzufügenden linearen Ausdrucks auf indirectem Weg bestimmen.

Der Beweis der Formel 3ª ergiebt sich durch

Vergleichung der beiden Ausdrücke 3. Denn es folgt:

$$\frac{Q-(q_1+q_2)}{c}=\frac{P-(p_1+p_2)}{b}=\text{const.}$$

wo const. bloss noch von den Constanten der Curve f abhängen kann. Man findet den Werth derselben durch Einsetzung eines besonderen Falles. Zwischen den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden besteht eine Beziehung $(p_1\ p_2) = (m-1, m-1)$, wenn m der Grad der Curve; ferner ist $P = 2\ (m+p-1)$ und $b = 1$; daher const. $= 2p$. Hieraus folgt 3^a^. Ferner ist:

$$P = p_1 + p_2 + 2pb\ \ldots\ldots\ 4).$$

Diese Formel giebt die Anzahl P der Puncte einer Curve f vom Geschlecht p, in welchen zwei vermöge der Beziehung $(p_1\ p_2)$ einander entsprechende Puncte x und u zusammenfallen. b ist die Vielfachheit des Punctes u, und die Art des Entsprechens ebenso wie für F. 3^a^ angenommen.

Der Ausdruck P unterscheidet sich von dem des Chasles'schen Correspondenzsatzes um das Glied $2pb$, welches sich auf Null reducirt, wenn das Geschlecht Null ist.

II. Anwendung auf Raumcurven.

Wir setzen der Kürze wegen die Formeln von Plücker als bekannt voraus; mit $d^{(M)}$, $\alpha^{(M)}$, $\tau^{(M)}$, $N^{(M)}$ möge bez. die Zahl der Doppelpuncte, Wendepuncte, Doppeltangenten und die Klasse einer ebenen Curve M. Ordnung ohne

Rückkehrpuncte bezeichnet werden, wenn man dieselben durch M und das Geschlecht p der Curve ausdrückt.

Gegeben sei eine Raumcurve M. Ordnung vom Geschlecht p. Es mögen zunächst einige Correspondenzen aufgestellt werden.

1) Von einem Punct x lassen sich $\alpha^{(M-1)}$ Schmiegungsebenen mit ebenso vielen Osculationspuncten u an die Curve legen. Dies giebt die Correspondenz $(p_1\, p_2) = (M - 3,\ \alpha^{(M-1)})$. Durch die u lässt sich eine Fläche legen, welche auch in x (b mal) schneidet. Wäre x ausserhalb der Curve gelegen, so existirten $\alpha^{(M)}$ Puncte; also sind: $\alpha^{(M)} - \alpha^{(M-1)} = 3 = b$ nach x gefallen, wenn x auf die Curve rückt.

Setzt man diese Werthe in 4) ein, so erhält man die Zahl der Wendungsberührebenen:

$$P = M - 3 + \alpha^{(M-1)} + 6p = 4M + 12p - 12.$$

2) Man erhält diese Zahl auch durch Aufstellung der Correspondenz zwischen den beiden Berührungspuncten einer Doppeltangentialebene: $(N^{(M-2)},\ N^{(M-2)})$; wenn man die Zahl P der zusammenfallenden Paare x, u durch die Formel 4) berechnet. b wird ähnlich wie in 1) berechnet und $= N^{(M)} - N^{(M-2)} = 4$ gefunden.

3) Von einem Puncte x der Curve lassen sich $\alpha^{(M-1)}$ Schmiegungsebenen an dieselbe legen, welche je in noch $M - 4$ Puncten u schneiden. Dies giebt die Correspondenz $(\alpha^{(M-1)}.(M - 4),\ \alpha^{(M-1)}.(M - 4))$. Die Fläche

durch die Puncte u ist das Aggregat eben der Schmiegungsebenen. Dasselbe enthält indess auch noch die Osculationspuncte als Schnittpuncte. Von der $[\alpha^{(M-1)}]$fachheit des Aggregates in dem Punct x ist also noch die 3fachheit des Punctes x der Fläche, welche durch jene Osculationspuncte hindurchgeht (siehe 2) abzuziehn; und zwar 3 mal. Bleibt: $b = N^{(M-1)} - 3.3.$

Unter Anwendung der Formel 4) erhält man als Anzahl der Schmiegungsebenen, welche eine fremde Tangente enthalten:

$P = 2\alpha^{(M-1)}.(M-4) + 2p\,(N^{(M-1)} - 9).$

4) Von einem Punct x der Curve lassen sich $\tau^{(M-1)}$ Doppeltangentenebenen an dieselbe legen. u seien die Berührungspuncte. Alsdann hat man die Beziehung:

$((M-4)\,N^{(M-2)},\ 2\tau^{(M-1)}).$ b erhält man am Kürzesten aus der Bemerkung, dass die Zahl P der zusammenfallenden Paare x, u dieselbe wie die des vorigen Falles (3) ist. Durch Gleichsetzen ergiebt sich $b = 4\,(M + p - 5).$

5) Von einem Punct x der Curve lassen sich $\tau^{(M-1)}$ Doppeltangentenebenen legen, deren jede in noch $M-5$ Puncten u schneidet. Dies giebt die Correspondenz:

$(2\,(M-5)\,\tau^{(M-1)},\ 2\,(M-5)\,\tau^{(M-1)}).$ Die Fläche durch die Puncte u ist das Aggregat der Doppeltangentenebenen. Die Ausscheidung der Berührungspuncte, durch welche dieselben noch hindurchgeht, geschieht durch viermalige Ausscheidung der Schnittpuncte der Fläche, welche durch dieselben hindurchgeht; nach Nr. 4 hat dieselbe in x einen $4\,(M + p - 5)$fachen

Punct; daher ist $b = 2r^{(M-1)} - 16(M+p-5)$. Setzt man diese Werthe in die Formel 4) ein, so erhält man als Anzahl der dreifach berührenden Ebenen einer Raumcurve:

$$P = 4(M-5)r^{(M-1)} + 4p(r^{(M-1)} - 8(M+p-5)).$$

6) Von einem Punct x der Curve lassen sich $d^{(M-1)}$ 3fach schneidende Sehnen legen, welche in doppelt sovielen Puncten u schneiden. Man hat also die Correspondenz: $(2d^{(M-1)}, 2d^{(M-1)})$. Von einem Punct ξ ausserhalb der Curve lassen sich $d^{(M)}$ Sehnen ziehn; rückt dieser Punct nach x, so reduciren sich die Schnittpuncte um die Differenz $2(d^{(M)} - d^{(M-1)})$, welche Puncte theilweise nach x selbst fallen, theilweise aber auch Schnittpuncte von Sehnen sind, welche ganz wegfallen, wenn ξ auf die Curve rückt. Es sind dies diejenigen Sehnen durch ξ, welche in der Ebene liegen, die durch die Tangente in x und diejenige Lage von ξ geht, welche dieser Punct unmittelbar vor dem Zusammenfallen mit x hat. Zu dieser Ebene gehören M Schnittpuncte, welche abzuziehn sind. Man hat also:

$$b = 2(d^{(M)} - d^{(M-1)}) - M = M - 4.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung (4) erhält man:

$$(M_{1,2} =)\ P = 4d^{(M-1)} + 2p(M-4)$$
$$= 2(M-2)(M-3) + 2p(M-6)$$

als Anzahl der *Tangenten der Raumcurve, welche in einem weiteren Punct dieselbe schneiden.*

Wir haben oben 6 Beispiele des Entsprechens zweier Puncte einer Raumcurve (mittelst Ebenen) aufgestellt. Liefert schon die Anwendung der Formel 4) eine Anzahl von Sätzen, so ist die des Satzes (3^a) nicht minder fruchtbar. Dieselbe verlangt die Combination zweier solcher Correspondenzen. Da nichts als eine Einsetzung der Werthe übrig bleibt, so sind durch Aufstellung der oben berechneten 6 Werthsysteme $\frac{6.5}{2} = 15$ weitere Aufgaben aus der Theorie der Raumcurven gelöst. Es wird genügen drei hier anzuführen. Die Combination von 2) und 3) giebt die *Zahl der Punctepaare der Curve, welche dieselbe Tangentialebene besitzen und deren Verbindungslinie zugleich in einer Schmiegungsebene liegt:*

$$A_{p,q} = 2N^{(M-2)} . \alpha^{(M-1)} . (M-4)$$
$$+ 2p . 4 (N^{(M-1)} - 9).$$

Combinirt man 1) mit 6) so erhält man *die Schnittpuncte der 3fach schneidenden Sehnen, welche in der Schmiegungsebene eines der Schnittpuncte liegen.*

Als uneigentliche Lösungen sind unter diesen die Schnittpuncte der Tangenten der Raumcurve, welche noch in einem fremden Punct dieselbe schneiden, enthalten. Zieht man diese Zahl ($M_{1,2}^{c}$) (P in 6)) doppelt ab, so kommt für die gesuchte Zahl:

$$2d^{(M-1)}.(M-3+\alpha^{(M-1)})$$
$$-2p(M-4).3-2.M_{1,2}$$
$$=4(M-2)(M-3)(M-4)$$
$$+6p(M^2-8M+18)-12p^2.$$

Die Combination von 2) mit 6) liefert die Berührungspuncte von Doppeltangentialebenen, in deren Verbindungslinie ein weiterer Punct der Curve liegt:

$$=4.d^{(M-1)}.N^{(M-2)}-2p.4(M-4).$$

In dieser Zahl sind wiederum $2M_{1,2}$ uneigentliche Lösungen enthalten. Nach Abzug derselben erhält man:
$4(M-2)(M-3)(M-4)+4p(M^2-10M+26)-8p^2.$

Darmstadt, im September 1871.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

8. November. №. 21. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. November.

Ueber die angebliche Handschrift des Sicardus Cremonensis in Modena.

Von G. Waitz.

Muratori hat bei seiner Ausgabe der Chronik des Sicardus Cremonensis in Vol. VII der Scriptores rerum Italicarum neben der Wiener Handschrift einen codex Estensis benutzt, der in vieler Beziehung von jenem abweicht, einen zum

Theil ganz anderen Text giebt, so dass es scheinen konnte, das Werk des Cremonenser Bischofs liege in doppelter Bearbeitung vor, während anderer Seits doch Zweifel entstehen mussten, ob wirklich ein und derselbe Mann beide Fassungen gegeben. Auf einer Herbstreise dieses Jahres besuchte ich die reiche früher herzogliche, jetzt National-Bibliothek zu Modena, und obgleich Ferien waren, ward mir von dem Bibliothekar Hrn Cavaliere Carbonieri mit Bereitwilligkeit die Benutzung derselben gestattet, und von dem sehr gefälligen und kundigen Adjuncten Hrn Al. Lodi meiner kleinen Arbeit jeder Vorschub geleistet. Bei Untersuchung der Handschrift stellte sich bald heraus, dass in derselben gar nicht das Werk des Sicardus als solches enthalten sei, sondern eine andere, viel umfassendere Chronik, die, in Reggio verfasst, besonders in ihrem zweiten Theil das Werk des Sicardus benutzt und theilweise, aber mit sehr bedeutenden Aenderungen, in sich aufgenommen hat[1]).

Die Handschrift, bezeichnet Ms. VI. H. S., ist ein Band in grösstem Folio auf Pergament im 13. Jahrhundert geschrieben; wenn ich richtig angegeben, 121 Blätter, von etwas späterer Hand bezeichnet, der Text in zwei Columnen, am Rande zahlreiche Zusätze und Erläuterungen von derselben Hand. Die blasse Dinte ist stellenweise abgesprungen und die Schrift dann schwer lesbar.

1) Muratori hat dies auch nicht verkannt, wenn er bemerkt, VII, S. 525: codicis Estensis chronicon eodem seculo, quo Sicardus a vivis excessit, interpolatum est ab Anonymo quodam, quem patria Regiensem puto; aber er hat so das Verhältniss umgekehrt, auch in seiner Ausgabe nicht genug den wahren Text des Sicardus und die Zusätze unterschieden, diese auch nur theilweise mitgetheilt.

Die Handschrift beginnt

Fol. 1. *Incipiunt capitula de omnibus etatibus et gestis factis et ordinatis a tempore Christi citra usque in hodiernum diem infra scripti libri.*

Ut istius libri sententia compendiosius ab (?) toto quolibet et levius cognoscatur, ego scriptor libri per capitula plurima secundum istius sentenciam eundem distinxi, pertractans in unoquoque, de quibus operibus intellectus in singulis omnibus habeatur.

Primum capitulum tractat de nativitate Christi etc. — 296. De tempore domorum domini Acursi et aliorum et eorum diruptione propter palacium comitis et populi faciendum et murandum et de carastia seminis canipe et de edificatione castri et cavatione fovearum dicti castri per Parmenses in contracta celle et de ponte Braçoli facto per Mantuanos. Dann von andrer Hand 297—308 später hinzugefügt.

F. 10 neue Lage, wohl älter als der Index, der später hinzugefügt scheint: *Incipit*[1]) *liber de temporibus et etatibus ad perpetuam rei memoriam.*

In nomine Domini nostri Jhesu Christi Amen. Breve conpendium collectum ex variis cronicis et per ordinem digestum de temporibus, in quibus sederunt certi pontifices Romani et imperatores imperaverunt, reges regnaverunt, sederunt Regin. pontifices, consules et potestates civitatem Reginam rexerunt, et de quibusdam gestis sub diversis pontificibus et principibus, potestatibus et aliis rectoribus, ut in certis locis hujus conpendii majora gesta et magis necessaria facilius omissa prolixitate valeant inveniri.

1) Muratori VII, S. 526 giebt den Titel unvollständig an.

Explicit prologus. De anno et tempore quando natus fuit Jesus Christus etc.

Mitunter ist einzelnes ausgestrichen, und am Rand bemerkt: vacat, auch im Text sind Aenderungen vorgenommen, am Rande Zusätze gemacht.

Die Geschichte ist theils in Prosa, theils in Versen; die letzteren sind aus Gotfrieds von Viterbo Speculum regum genommen, das fast ganz in dieses Werk übergegangen scheint und für dessen SS. XXII gedruckten, nur mangelhaft überlieferten Text der Codex wohl nicht ohne Werth gewesen wäre. Muratori hat (SS. VII, S. 350) längere Stellen aus demselben mitgetheilt, als deren Autor er richtig Gotfried bezeichnete, ohne aber das Speculum regum, dem sie entlehnt sind, zu kennen [1].

C. 66 folgt eine Geschichte der Langobarden, abweichend von der Gotfrieds im Pantheon, eingeschaltet Geschichte von den 7 dormientes in einer Höhle etc., später eine sagenhafte Erzählung der Uebertragung des Kaiserthums auf Enricus de Gibellengia.

Später: *Istoria Theodorici regis Ticinensis et Albvini regis Veronensis civitatis.*

Dann c. 96: *Proemium ante istoriam per quam ostenditur unde Theotonici venerunt ante adventum Christi.*

Die ganze Geschichte der Franken aus dem zweiten Buch von Gotfrieds Speculum.

Später ist es die Reihe der Päpste, die der Chronik als Faden dient: auch im 10ten und 11ten Jahrhundert sind die Nachrichten ziemlich ausführlich, wenn auch wohl aus den bekannten Quellen geschöpft.

1) Vgl. SS. XXII, S. 11 N. 38.

C. 134. *De gestis comitisse Matildis suorumque antecessorum et ipsorum nationibus.*

Fol. 58 folgt c. 161 was Muratori VIII, p. 1073 hat drucken lassen als Memoriale potestatum Regiensium, was aber durchaus nicht als ein besonderes Werk angesehen werden kann.

Ad majorem etc. — potestatem ist Ueberschrift des Capitels.

Auch hier findet sich Vieles, was Mur. im Text hat, am Rand.

F. 79 im Capitel 297, nicht gleich mit dem Anfang, sondern mit den Worten: honore et leticia, mit dem eine neue Seite beginnt, Mur. p. 1147, scheint die Hand zu wechseln; doch trägt das Folgende theilweise wieder einen ähnlichen Charakter. Eine entschieden andere Hand auf radiertem Grunde tritt f. 85 ein: Eodem anno et millesimo (Mur. p. 1167), und das Folgende ist dann von verschiedenen Händen zugefügt — f. 87[1] (Mur. p. 1174).

F. 88 steht eine Notiz über die Jahre 1528 und 29 von einer Hand dieser Zeit. Das übrige Blatt blieb leer.

Dann folgt f. 89 der zweite Theil des Werks, in dem Muratori den Sicardus zu finden glaubte.

Incipiunt capitula de omnibus etatibus et gestis factis et ordinatis ante tempus Christi citra usque in hodiernum diem infra scripti libri de imperatoribus et regibus Grecorum et Latinorum et regum Longobardorum et pontificibus, qui suis temporibus fuerunt, et aliis gestis ejusdem factis et ordinatis.

De Ptolomeo Dionisio et de gestis que fuerunt suo tempore etc.

geht bis:

184. De disconfita Medionalensium facta per

Cremonenses apud castrum Leonis et de amissione carocii Mediolanensium.

185. De Sibylla Tiburtina.

186. De 15 signis terribilibus qui venient prope finem mundi et consummationem seculi.

187. Incipiunt versus Merlini.

188. Nomina omnium abbatum S. Prosperi.

189. Nomina omnium episcoporum qui fuerunt in civitate Reg.

Dann der Text:

Incipit liber cronice imperatorum Latinorum et Grecorum et regum Longobardorum et aliis gestis.

Incipit cronica imperatorum Latinorum et Grecorum et regum Longobardorum et aliorum (so) nationum.

Cronica Grece dicitur que Latine temporum series appellatur. Qualem aput Grecos Eusebius Cesariensis edidit et Jeronimus presbiter in Latinam linguam convertit. Cronos enim Grece Latine tempus interpretatur. Tempora autem momentis, horis atque diebus, mensibus, annis, lustris, seculis et etatibus dividuntur. Momentum est minimum atque tempus angustissimum a motu syderum dictum. Est etiam extremitas hore in brevibus intervallis, cum aliquid sibi qd° (so) atque succedit.

Aus Isidor Etym. V, 28. 29.

Incipit prologus.

Ut futuris omnibus cupientibus nobilium predecessorum virorum strenuis actibus informari, prout res hystorialiter se habuerunt omnes et singule, procul dubio veritas innotescat, presens opusculum cum delectatione multimoda factum extat. In quorum annorum diversarum linguarum nationum et linguarum vel virorum vivendi (so)

regum plurimorum baronum necnon imperatorum Latinorum et Grecorum gesta illustria, prospera vel adversa, victorie triumphales, tribulationes multiplices, et tempore cujus pontificis unusquisque regnavit, veluti cuilibet contigit, secundum quod percipere potest intellectus humanus, plenissime continentur.

Der Text beginnt wie bei Mur. S. 529: De etc.

Nach 'Petri et Pauli' S. 533 folgt eine längere Stelle:

c. 4. De visione quam vidit Octavianus etc., mit einer Zeichnung dazu.

S. 545 nach 'redeamus':

c. 13. Hystoria de patre et matre Pylati etc.

Am Rande wird mehrmals auf die in dem Bande vorhergehende Geschichte der Päpste verwiesen, z. B.

Et si vis aliut invenire de gestis que fuerunt tempore Trajani, recurre ad cronicas Anacleti pape primi et Euaristi pape primi et omnia invenies.

Ebenso später im Text; z. B. c. 79:

Et si vis aliud scire de gestis que fuerunt eodem tempore, require cronicam Stephani pape quarti et invenies quod quesieris.

c. 82: Et si vis scire et invenire de gestis quas (so) fuerunt his temporibus, require cronicas supradictorum pontificum, s. Sergii pape, Gregorii III. pape ('et Leonis IIII.' später zugef.) et Benedicti pape tercii, omnia per ordinem invenies quod queris.

c. 84: Et si vis aliud invenire de gestis que fuerunt eodem tempore, recurre ad cronicam Johannis pape VIII, et omnia ibi invenies.

c. 85: Et si vis scire de gestis que fuerunt eodem tempore, require cronicam Formosi pape.

Und ebenso heisst es c. 89: Et si vis aliud

invenire et scire, recurre ad ystorias antecessorum comitisse Matildis et ibi omnia invenies; was sich auf c. 155 und 156 des ersten Theils bezieht.

Gerade diese Verweisungen, die zuletzt immer im Text selbst sich finden, in Verbindung mit den stets zunehmenden Abweichungen von dem Text des Sicardus, die Muratori entfernt nicht vollständig angegeben, lassen es als unzweifelhaft erscheinen, dass wir es nicht mit einer Abschrift oder andern Recension seiner Chronik zu thun haben, sondern nur mit einem daraus abgeleiteten Werk, das ihn auch nicht einmal so vollständig und genau in sich aufgenommen hat, wie es vorher mit dem Speculum regum des Gotfried geschehen ist, das ausserdem sehr viel aus anderen Quellen oder eigener Kenntnis hinzufügt, was mit dem Sicardus gar nichts zu thun hat.

Ob dahin aber auch die Stellen zu rechnen sind, in denen (Mur. S. 620. 622) ein Autor von sich in eigener Person redet und seiner Anwesenheit im Orient als Begleiter des Cardinal Peter gedenkt, muss ich dahingestellt sein lassen [1]). Beziehen sie sich auf Sicard und fehlen in allen andern Handschriften, so würde sich allerdings ergeben, dass der hier benutzte Text vollständiger gewesen als der uns sonst erhaltene. Die

1) Ich glaube bemerken zu sollen, dass, wie es hier heisst zu 1204 (Mur. VII, S. 620): mithras et baculum *me praesente* . . . tribuit pastoralem, so in dem ersten Theil zu 1288 (Mur. VIII, S. 1171): *me praesente* d. Carolum — coronavit. Das kann freilich nicht ein Autor geschrieben haben. — Streit, Comm. de auctoribus quartae quae habetur sacrae expeditionis historiam spectanibus S. 7, scheint anzunehmen, dass Sicard nicht an dem Kreuzzug theilnahm.

Vermuthung aber Muratoris, jener habe zwei Chroniken verfasst und diese Stellen seien aus einer zweiten grösseren genommen, entbehrt allen Beweises; das Mitrale (oder: Mitralis), welches Gualvaneus de la Flamma ihm beilegt und das jener für eins derselben hält (S. 525), ist ein Buch de officiis ecclesiae: ich hatte einen Codex in der Laurentiana in Florenz (Plut. VII. Sin. Cod. 4) in Händen; nachdem Mai bereits Vorrede und Inhalt bekannt gemacht, ist es neuerdings von Migne vollständig publiciert[1]).

Uebrigens hat schon Muratori (VII, S. 526. VIII, S. 1071) darauf hingewiesen, dass wahrscheinlich auch in dem ersten Theil des hier besprochenen Werkes Sicardus benutzt ist.

Der Ursprung des Ganzen in Reggio und die enge Verbindung des zweiten mit dem vorhergehenden Theile tritt ausserdem in den letzten Capiteln hervor.

183. *De multitudine puerorum.*

Eodem anno 1212. trium puerorum quasi duodecimum (?) qui se visionem vidisse dicebant etc. Mur. S. 624.

184. *De disconfita Mediolanensium facta per Cremonenses apud castrum Leonis et de amissione carotii Mediolanensium.*

Anno D. 1213. dominus Thomax Caritatum Gualbertus de Lazaris et socii, consules comunis Reg., die pascha sancto pentecostes, que fuit in festo sanctorum martyrum Marcellini et Petri, videlicet secundo die intrantis Junii etc., wie Mur. S. 624 N. 47.

1) Ueber ein anderes Werk des Sicardus, die Summa zum Decret Gratians s. Schulte in den Sitzungsber. der Wiener Akad. 1869. LXIII, 2, S. 336 ff. Hier nennt sich Sicardus p. 341: Ego vero Sychargus Cremonae filius natione et Moguntinae ecclesiae filius spiritualis translatione. Er ist also in Mainz erzogen.

Eodem anno die 13. Junii et tempore domini Guilielmi de Pristerla pot. Bononie promiserunt comune Bononie et juraverunt facere guerram Mutin. pro comune Regii et servire comune Regi. fuit (?) tempore domini Ysachi de Dovaria pot. Reg. nec facere pacem cum predictis Mutin. sine voluntate comunis Regii, ut in registro comunis Reg. continetur.

Dann folgt *De Sybilla Tiburtina* (Die Bezeichnung als c. 185 fehlt; sie scheint überhaupt später hinzugefügt). Decem autem etc.

f. 121 Zeichnung eines Vogels mit 7 Köpfen, bezüglich auf 7 persecutiones.

186. *De 15 signis terribilibus* etc.
De die judicii.

187. *Incipiunt versus Merlini.*

188. *Nomina omnium abbatum S. Prosperi.*
— Guilelmus de Lupicinis XVII. Dann von anderer Hand fortgesetzt.

189. Nomina omnium episcoporum qui fuerunt in civitate Reg.
— Guilielmus de Foliano LIII.

Das Folgende: Guilelmus (?) de Bobio LIV. vielleicht schon von anderer Hand. Jedenfalls von einer solchen Notiz über den Tod des Bischofs G. 1301 3. Sept. Das Verzeichnis der potestates fortgesetzt bis ins 16te Jahrh. Damit schliesst der Codex.

Das ganze Werk verdient, wenn auch keine vollständige Veröffentlichung, doch eine solche Benutzung, dass der Charakter desselben bestimmt hervortritt und die eigenthümlichen Nachrichten, sagenhafte und geschichtliche, vollständig mitgetheilt werden.

Vorläufige Mittheilung über das quergestreifte Muskelgewebe.

Von

Dr. Fr. Merkel, Prosector.

Vorgelegt von J. Henle.

Eine genaue Untersuchung des quergestreiften Muskels ergiebt dessen Zusammensetzung aus Elementen, deren bindegewebiger Theil aus einer röhrenförmig in sich geschlossenen Seitenmembran besteht, welche an beiden Enden durch eine Membran — Endscheibe — geschlossen ist. In der Mitte der kurzen Röhre ist eine weitere Membran ausgespannt, — Mittelscheibe —, welche das Primitivelement in zwei Fächer theilt, die vollkommen von einander abgeschlossen sind. Der Inhalt eines jeden solchen Faches oder halben Elementartheiles ist contractile Substanz und Flüssigkeit. Bei der Aktion nun tritt eine Veränderung in der mikroskopischen Struktur des Muskelelementes ein. Dieselbe besteht darin, dass die contractile Substanz, welche in der ruhenden Faser um die Mittelscheibe eines jeden Muskelelementes angehäuft ist, bei der Contraction diesen Platz verlässt und sich an die zugehörige Endscheibe anlegt. Das ganze Element wird hierbei kürzer und breiter, der contractile Inhalt ebenfalls, doch steht der Gewinn in der einen Dimension dem Verluste in der andern nicht gleich, sondern es ist die Abnahme der Höhe bedeutender als die Zunahme in der Breite, was sich aus einer Verdichtung der contractilen Substanz erklärt.

Diese Verhältnisse sind bei allen Thieren mit

quergestreifter Muskulatur die gleichen, bei Arthropoden sowohl, wie bei Wirbelthieren.

Eine ausführliche Abhandlung über diesen Gegenstand wird demnächst in dem Archiv für mikroskopische Anatomie erscheinen.

Einige Bemerkungen über das Spitzenwachsthum der Gymnospermen-Wurzeln.

Von Dr. J. Reinke.

Mitgetheilt von F. G. Bartling.

Nachdem der Bau der Wurzelspitze der Gefässkryptogamen von Nägeli und Leitgab [1], derjenige der Mono- und Dicotylen von Hanstein [2]) und mir [3]) eingehender geprüft worden, fehlte es noch an der Kenntniss dieser Verhältnisse bei den Gymnospermen.

Zunächst mögen ein paar allgemeinere Bemerkungen hier Raum finden. In der Wurzelspitze aller Gefässpflanzen finden wir zwei in deutlichem Gegensatz zu einander stehende Zellensysteme: einen axilen Strang und einen denselben umgebenden Mantel; bei den Angiospermen endlich tritt noch als drittes morphologisches Element eine von vorne herein gesonderte Oberflächenschicht hinzu. Die letztere ist bei diesen Pflanzen Dermatogen, der peripherische Gewebetheil Periblem, der axile Zellenkörper Plerom genannt worden; die beiden letzteren Ausdrücke lassen sich auf die entsprechen-

1) Nägeli, Beiträge etc. Heft IV.
2) Hanstein, Botanische Abhandl. etc. Heft. 1.
3) D. S. Heft 3.

den Formationen der Gymnospermen und Gefässkryptogamen anwenden.

Der Unterschied in der Gliederung des Gewebes der Wurzelspitze bei den drei Klassen ist nun folgender.

1. Das Wurzelende der Gefässkryptogamen[1]) besteht aus einem Pleromcylinder und einer umhüllenden Periblemmasse; beide entstehen, wie die Wurzelhaube aus den kappenförmigen, so aus den schrägen Segmenten einer Scheitelzelle, jenes aus den centralen, dieses aus den peripherischen Theilzellen der Segmente; die äusserste Schicht des Periblems bildet die Epidermis der älteren Theile.

2. Bei den Gymnospermen vermögen wir in ähnlicher Weise Plerom und Periblem zu underscheiden; auch hier wird die äusserste Schicht des letzteren zur Epidermis. Während jedoch in der vorigen Klasse Alles aus einer Scheitelzelle hervorgeht, so fehlt diese hier, die einzelnen Zellreihen führen bis zum Scheitel hinauf innerhalb ihrer Genossenschaft eine gewisse selbstständige Existenz. Die Wurzelhaube entsteht durch scheitelwärts geförderte Spaltung der Periblemschichten.

3. Bei den Angiospermen, welche gleichfalls der Scheitelzelle entbehren, tritt zu dem Plerom und Periblem das Dermatogen hinzu; letzteres

1) Der Satz gilt zunächst nur unter Reservation für einige Lycopodiaceen. Ueber den Bau der Wurzel von Lycopodium gelang es mir noch nicht, in's Klare zu kommen. Während der Bau der Haube auf eine Scheitelzelle hinweist, so ist die letztere doch durchaus nicht zu finden; der Bau des Wurzelkörperendes, namentlich die sehr früh differenzierte Epidermidalschicht, erinnert an die Angiospermen. Vgl. übrigens Sachs, Lehrb. pag. 158 Anm. u. pag. 400.

liefert die Epidermis und bildet durch tangentiale Theilung über dem Scheitel die Haube.

Schenken wir den Gymnospermen unsere Aufmerksamkeit, so finden wir eine grosse Uebereinstimmung nicht nur innerhalb der einzelnen Familien, sondern denselben Typus mit geringen Variationen der ganzen Klasse aufgeprägt. Sowohl die verschiedenen Gattungen der Coniferen als auch Ephedra und die Cycadeen zeigen jenen, oben kurz angedeuteten Bau. Der Pleromkörper erzeugt als secundäres Gebilde ein Grundgewebe mit eingelagerten Fibrovasalelementen, während das Periblem die parenchymatische Rinde bildet, deren äusserste Schicht als Epidermis fungirt; während bei den Angiospermen die Zahl der Periblemschichten dem Scheitel zu sich vermindert, so wächst sie hier und stellt die oft mächtig entwickelte Wurzelhaube dar.

Die Verzweigung der Wurzeln ist racemös; die Seitenwurzeln entstehen aber stets aus mehren Zellschichten, bei den Coniferen aus dem parenchymatischen Grundgewebe des Plerom's vor den Gefässbündeln; bei den Cycadeen betheiligen sich noch einige Schichten der Rinde an der Bildung der Seitenwurzeln, die sonst normal monopodial wie bei den Coniferen stehen. Einige Seitenwurzeln der Cycadeen jedoch fangen bald an sich an der Spitze dichotomisch zu verzweigen und zwar dichotomiren sie dann wiederholt. Bei jeder neuen Dichotomirung wird die Wurzelhaube verringert und oft auf nichts reducirt, so dass über dem Scheitel nicht mehr Periblemschichten liegen als an den Seiten: ein Anklang an die Wurzelträger von Selaginella. —

Auch das Gewebe des Stammscheitels lässt sich unter dem angedeuteten Gesichtspuncte auffassen; bei Ephedra und den Coniferen besteht das-

selbe aus Plerom und Periblem, von den Cycadeen fehlte es mir zu einer bezüglichen Untersuchung bisher an Material.

Diese Resultate stehen durchaus in Einklang mit den schönen Beobachtungen E. Pfitzers über die Embryobildung der Coniferen. Vgl. Sitzungsber. d. Niederrhein. Gesellschaft zu Bonn, Aug. 1871.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

August, September, October 1871.

Nature, 92—104.
Abhandlungen der königl. Akademie zu Berlin. 1870. Berlin 1871. 4.
Monatsbericht der königl. Akademie zu Berlin. Juni, Juli, August 1871. Ebd. 1871. 8.
Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie II. T. X. Fasc. 1. 2. 3. 4. Bologna 1870. 4.
Rendiconto delle Sessioni dell' Accademia. Ebd. 1871. 8.
Mémoires de l'Académie R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique à Bruxelles. T. 38.
Mémoires couronnés et des savants étrangers. T. 35. 36. Bruxelles 1870. 71. 4.
Bulletins de l'Académie. 2. serie. T. 29. 30. Année 39. — 2. série. T. 31. 32. Nr. 5. 6. 7. 8. Année 40. Ebd. 1870. 71. 8.
Annuaire 1871.
Collection de chroniques belges inédites: Cartulaire de St.-Trond. T. 1. — Chroniques des réligieux des Dunes. T. 1. Ebd. 1870. 4.
Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. T. XX. Ebd. 1870. 4.
Annuaire pour 1871.

Anthropométrie, ou mesure des différentes facultés de l'homme. Ebd. 1870. 8.
Diverses brochures.
Annales de l'Observatoire R. de Bruxelles. Bogen 4. 1871.
Acta Societatis Scientiarum Fennicae. T. IX. Helsingforsiae 1871. 4.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk 17. Ebd. 1871. 8.
Oefversigt af Förhandlingarne. 13. 1870—71. Ebd. 1871. 8.
Finlands officiela Statistik. 5. Ebd. 1869. 4.
Abhandlungen der philos.-philolog. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Bd. XII. Abth. 2.
— der historischen Classe. Bd. XI. Abth. 3. München 1870. 71. 4.
Annalen der königl. Sternwarte bei München. Bd. XVIII.
— Supplementband. Ebd. 1871. 8.
Sitzungsberichte der königl. Akademie. 1870. II. Hft. 3. 4.
— der philos.-philolog. u. historischen Classe. 1871. Hft. 1. 2. 3.
— der mathem.-physik. Classe. 1871. Hft. 1. Ebd. 1871. 8.
Der Zoologische Garten. Herausg. von Dr. F. C. Noll. Jahrg. XII. Nr. 1—6. Frankfurt a. M. 1871. 8.
Die Neugründung der Strassburger Bibliothek und die Göthe-Feier am 9. August 1871. Strassburg 1871. 8.
Alexander Ecker, über die verschiedene Krümmung des Schädelrohres etc. Braunschweig 1871. 8.
Ludwig Lange, Römische Alterthümer. Bd. 3. Berlin 1871. 8.
M. A. de la Rive, notice sur E. Verdet. Paris 1870. 8.
W. Wright, fragments of the Syriac Grammar of Jacob of Edessa. 4.
R. Lipschitz, Theorem der analytischen Mechanik. 8.
Proceedings of the American Pharmaceutical Association. Philadelphia 1870. 8.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. VI. Hft. 2. 3. Leipzig 1871. 8.
Transactions of the Zoological Society of London. Vol. VII. Part. 6. London 1871. 4.
Proceedings of the Zoological Society of London. 1871. Part 1. Ebd. 1871. 8.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1871. Bd. XXI. Nr. 2. April — Juni.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

15. November. № 22. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen

von

Sophus Lie in Christiania.

Vorgelegt von A. Clebsch.

Der Gedanke, die Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes auf n Dimensionen zu verallgemeinern, scheint in den letzten Jahren mehreren Mathematikern sich dargeboten zu haben. So ist derselbe zum Beispiele von Herrn Kronecker (Monatsberichte der Berl. Akademie. 1869.) ausgesprochen und näher formulirt worden. Es ist mir ferner bekannt, dass Riemann wie auch die Herren Betti, Beltrami, Christoffel, Darboux und Lipschitz sich mit derartigen Betrachtungen beschäftigt haben. Diese Untersuchungen, die ich freilich nur höchst unvollständig kenne, scheinen indess grösstentheils in ganz andere Richtung als die meinigen zu gehen. Nur Herrn Darboux's Arbeiten, die mir in der letzten Zeit oft anregend gewesen sind, haben einen mit meinen Theorien verwandten Character.

Die in Rede stehende Erweiterung der Krümmungstheorie erhält ein eigenthümliches Interesse dadurch, dass ein Zusammenhang stattfindet zwischen den Krümmungs-Theorien zweier consecutiver Räume R_n und R_{n+1}, und zwar unter vielen verschiedenen Gesichtspuncten. Herr Darboux gab zuerst (Comptes rendus, Aug. 1869) ein allgemeines und zwar sehr wichtiges Beispiel eines solchen Zusammenhanges [1]). Hiernach fasste ich einen liniengeometrischen Satz, den Herr Klein aufgestellt hatte (Gött. Nachr. März 1871.), als einen Zusammenhang zwischen den Krümmungs-Theorien der Räume R_3 und R_4 auf, und in dieser Auffassung verallgemeinerte ich sein Theorem auf n Dimensionen (Götting. Nachr. Mai 1871). Meine Note gab ein zweites merkwürdiges Beispiel eines Zusammenhänges zwischen der Theorie des R_n und des R_{n+1}; indem ich nehmlich den folgenden Satz aussprach: Wenn man die allgemeinste conforme Punkt-Transformation eines Raumes R_n bestimmt hat (und das geschieht leicht), so findet man sogleich die allgemeinste Umformung von R_{n-1}, bei welcher einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, anderseits Haupt-Configurationen (Krümmungs-Curven) covariante Gebilde sind [2]).

1) Das Verfahren von Herrn Darboux besteht darin, von einer M_{n-1} des R_n, die einem Orthogonalsysteme angehören kann, auf der Kugel des R_n ein (sogenanntes sphaerisches) Bild zu entwerfen und letzteres durch stereographische Projection auf den R_{n-1} zu übertragen.

1) Ich muss es als einen glücklichen Zweifel bezeichnen, dass, obgleich ich bei der Redaction jener Note die Darbouxsche Note (Aug. 1869) nicht kannte, ich in derselben die Lösung einiger Fragen gab, die durch Herrn Darboux's Arbeit veranlasst werden.

Es ist mir später gelungen, wie ich im September 1871 der Academie in Christiania mitgetheilt habe, in der angedeuteten Richtung weiter zu gehen. Diese neuen Theorien, die mir wichtig scheinen, werde ich versuchen, in einigen Noten, von denen die nachstehende die erste ist, kurz auseinanderzusetzen.

Meine Betrachtungen kommen im Allgemeinen darauf hinaus, wenn in einem Raume R_n eine Mannigfaltigkeit M_{n-1} gegeben ist, deren Haupt-Configuration bekannt sind, und dabei die von mir in meiner letzten Note besprochene Gruppirung haben (oder wie man auch sagen kann: eine M_{n-1}, auf welche die von Darboux in den Comptes rendus Aug. 1869 gegebene Operation sich anwenden lässt), alsdann in einem anderen Raume R_N eine neue solche Mannigfaltigkeit M_{N-1} wie auch ihre Haupt-Configurationen zu finden; hierbei kann N geringer oder grösser als n sein. Hierin liegt zugleich ein Beitrag zur allgemeinen Theorie der Orthogonal-Systeme, welche Theorie durch Herrn Darboux's mehrmals besprochene Note eine so glückliche Richtung erhalten hat, und zwar enthalten meine Operationen zur Auffindung von Orthogonal-Systemen so viele arbiträre Elemente, dass man vielleicht die Frage stellen kann, ob es nun nicht möglich sein wird, durch Combination bekannter Methoden alle Orthogonal-Systeme zu bestimmen [1].

1) Die complicirte Art der geometrischen Vorstellungen, die meinen Theorien zu Grunde liegen, wird, so fürchte ich, das Verständniss dieser Note erschweren. Ich bemerke, dass die dritte Nummer eine selbständige und einfachere Darstellung einer Theorie giebt, die sich unter diejenigen der beiden ersten Nummern subsumirt.

I.

1. Das Dupinsche Theorem, welches in der gewöhnlichen Krümmungs-Theorie eine fundamentale Rolle spielt, lautet bekanntlich folgenderweise: Wenn die Flächen dreier Schaaren, die ich der Kürze wegen als eine irreductible Schaar

$$F(x\,y\,z\,\lambda) = 0$$

betrachten werde, einander immer orthogonal schneiden, so sind die Durchschnitts-Curven jedesmal Krümmungslinien der betreffenden Flächen. Der von mir (Acad. zu Christiania, 1870, 1871) hervorgehobene Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen metrischen Geometrie und der projectivischen Geometrie eines linearen Complexes transformirt das Dupinsche Theorem, wie Herr Klein und ich es fanden, in die beiden folgenden Sätze.

Es sei gegeben in einem linearen Complexe eine Schaar Congruenzen:

$$F(x_1\,x_2\,x_3\,\lambda) = 0,$$

welche den folgenden Bedingungen genügen. Jede Gerade p des Complexes gehört dreien Congruenzen $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ an; hierbei soll p die Brennflächen dieser Congruenzen in drei Punkte-Paaren berühren, die paarweise harmonisch liegen.

Alsdann berühren die gemeinsamen Geraden je zweier Congruenzen λ_1 und λ_2, oder wie ich sagen werde, alsdann berührt die Linienfläche $(\lambda_1\,\lambda_2)$ die Brennflächen λ_1 und λ_2 nach je einer Haupttangenten-Curve. In dieser Weise findet

1) Als Coordinaten der Kugel:

$$(x-x_1)^2 + (y-x_2)^2 + (z-x_3)^2 + x_4^2 = 0$$

wende ich, wie gewöhnlich, die Grössen $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ an. Vergl. die folgende Anmerkung.

man alle Haupttangenten-Curven auf den Brennflächen λ. Auf jeder Linienfläche $(\lambda_1 \lambda_2)$ findet man zwei Haupttangenten-Curven und darnach nach einem Satze des Herrn P. Serret die übrigen durch algebraische Operationen.

In einer Note in den Göttinger Nachrichten März 1871 hat Herr Klein unter Anderem diese Theorie zu einer allgemeinen liniengeometrischen Theorie erweitert. Seine hierauf bezüglichen beiden Sätze lassen sich für Kugel-Complexe (d. h. dreifach unendliche Mannigfaltigkeiten von Kugeln) in folgender Weise aussprechen.

Es sei gegeben in einem Kugel-Raume R_4 ein Orthogonal-System

$$F(x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \, \lambda) = 0,$$

bestehend aus einfach unendlich vielen Kugel-Complexen, unter denen jeder einem bestimmten Werthe λ_1 des Parameters entspricht. Zwei Complexe λ_1 und λ_2 enthalten ∞^2 gemeinsame Kugeln, deren Umhüllungsfläche $(\lambda_1 \lambda_2)$ oder noch kürzer (12) heissen soll. Drei Complexe $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ enthalten ∞^1 gemeinsame Kugeln, deren Umhüllungsfläche (123) heissen soll. Herrn Klein's erstes Theorem besteht darin, dass die Röhrenfläche (123) jedesmal die Fläche (12) nach einer für beide gemeinsamen Krümmungslinie berührt. Variirt λ_3, so erhält man die Krümmungslinien beider Systeme auf der Fläche (12). Klein's zweites Theorem besteht im Folgenden. Auf der Röhrenfläche (123) findet man, den Flächen (12) (13) (23) entsprechend, drei nicht kreisförmige Krümmungslinien und darnach die übrigen durch algebraische Operationen.

Den ersten Satz erweiterte ich in den Göttinger Nachrichten Mai 1871 auf n Dimensionen. Der zweite Satz lässt sich auch verallgemeinern

und giebt dabei eine Theorie, deren Wichtigkeit nicht geringer ist. Die consequente Entwickelung des Dupinschen Theorems wie der beiden Klein'schen Sätze führt darauf, für jeden Raum R_n eine mit n wachsende Anzahl merkwürdiger Operationen aufzustellen, welche alle dazu dienen, wenn in R_n eine M_{n-1} gegeben ist, deren Haupt-Configurationen die characteristische Gruppirung haben, alsdann in R_N eine M_{N-1} derselben Art wie auch die betreffenden Haupt-Configurationen zu finden. Ich muss mich hier auf einige Andeutungen hinsichtlich des Raumes R_5 beschränken; indess hoffe ich, dass, was ich sage, dazu genügen wird, den Inhalt der allgemeinen Theorie zu veranschaulichen.

Ebenso[1]) wie man als Punkt in R_4 die Kugel des Raumes R_3 wählen kann, so wende ich mit Herr Klein, die Kugel des Raumes R_4:

$$(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2 + (x'_4 - x_4)^2 + x^2_5 = 0$$

oder wie man auch sagen kann, den linearen

1) Herrn Klein's und meine eigenen früheren Arbeiten zeigen, wie ich darauf geführt wurde, die Kugel des R_n als Punkt in R_{n+1} einzuführen. Es ist mir später mitgetheilt worden, dass die Herren Casey und Cayley den Kreis der Ebene als Punkt eines Raumes mit drei Dimensionen angewandt haben, dass ferner Herr Darboux in einem noch nicht erschienenen Memoire, das 1868 bei der Pariser-Academie eingeliefert wurde, die gewöhnliche Kugel als Punkt in R_4 benutzt hat. Ich bemerke ferner, dass Herrn J. A. Serret's Lösung des Problems: »alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu finden,« darauf beruht, dass er, ob auch nur implicite, die Kugel als Punkt in R_4 anwendet. Möglicherweise ist die allgemeine Idee zuerst explicite von mir ausgesprochen, oder wenigstens zuerst von mir verwerthet worden.

Kugel-Complex als Punkt in R_5 an. Als Coordinaten habe ich hierbei die Grössen $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ eingeführt. Ein Orthogonal-System [1]) in R_5:

$$F\ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \lambda) = 0$$

wird von einer Schaar Mannigfaltigkeiten M_4 gebildet, unter denen jede aus ∞^4 linearen Kugel-Complexen besteht. Ein bestimmter Werth des Parameters repräsentirt somit ∞^4 lineare Complexe C. Zwei Mannigfaltigkeiten λ_1 und λ_2 enthalten ∞^3 gemeinsame lineare Complexe, deren Enveloppe-Complex (12) heissen soll. Drei Mannigfaltigkeiten λ_1, λ_2, λ_3 enthalten ∞^2 gemeinsame lineare Complexe C, deren Enveloppe-Complex (123) heissen soll. Hierbei berührt jeder C den Complex (123) nach einer Configuration und zwar einer Configuration, die einerseits kreisförmig [2]) andererseits eine Haupt-Configuration ist. Endlich enthalten vier Mannigfaltigkeiten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ∞^1 gemeinsame Complexe C, deren Enveloppe-Complex von jedem C nach einer linearen Congruenz berührt wird, deren sämmtliche Configurationen Haupt-Configurationen sind.

In meiner früheren Note habe ich nun bewiesen, dass der Complex (12) jedesmal von einem

1) Bei den Betrachtungen dieser Note ist es unwesentlich, ob die betreffenden Orthogonal-Systeme reductibel oder irreductibel sind; der Kürze wegen setze ich immer den letzten Fall voraus.

2) Den Durchschnitt zweier Kugeln in R_3 nennt man einen Kreis; dem entsprechend werde ich die Durchschnitts-Configuration von $(n-1)$ Kugeln in R_n als eine kreisförmige Configuration bezeichnen. Bei der Ausführung der hier angedeuteten Theorien wird es überhaupt vortheilhaft sein, die gemeinsame M_{n-p} von p Kugeln in R_n als eine kreisförmige M_{n-p} zu bezeichnen.

Complexe (123) nach einer gemeinsamen Haupt-Congruenz [1]) berührt wird. Dieses genügt um die Existenz dreier Schaaren Haupt-Congruenzen zu beweisen, um ferner dieselben wie auch die betreffenden Haupt-Configurationen ohne weiteres anzugeben. (Es lässt sich auch der Satz aussprechen: Die Complexe (12) (123) und (1234) berühren einander nach einer gemeinsamen Haupt-Configuration).

In ganz ähnlicher Weise findet man (am einfachsten vielleicht durch Anwendung einer geometrischen Ueberlegung), dass auch die Complexe (123) und (1234) einander nach einer gemeinsamen Haupt-Congruenz berühren. Variirt λ_4, so findet man eine Schaar Haupt-Congruenzen, die (123) zweifach erzeugen, in dem Sinne, dass jede Kugel des Complexes zwei solchen Congruenzen angehört. Hierbei schneiden sich jedesmal zwei Congruenzen nach einer Haupt-Configuration, und zwar sind es die früher besprochenen kreisförmigen Haupt-Configurationen, die wir hier wieder treffen. Ausser diesen beiden Schaaren Haupt-Congruenzen kennen wir noch drei einzelne solche, diejenigen Congruenzen nehmlich, nach denen die Complexe (12) (13) (23) unseren Complex berühren. Dieses genügt um die Existenz einer dritten continuirlichen Schaar Haupt-Congruenzen zu beweisen, um ferner dieselben durch algebraische Operationen zu bestimmen. Auf den Complex (123) lässt sich also die Darbouxsche Operation anwenden, und zwar findet man hierdurch in R_3 ein Orthogonal-System,

1) Eine jede in einem Complexe enthaltene Congruenz, die zweifach von Haupt-Configurationen erzeugt wird, nenne ich eine Haupt-Congruenz. Wenn ein Complex drei Schaaren Haupt-Congruenzen enthält, dann und nur dann kann die Darboux'sche Operation angewandt werden.

welches aus zwei Schaaren Röhrenflächen in Verbindung mit einer dritten Flächen-Schaar besteht. Diese letzten Flächen haben, wie wohl zu bemerken ist, im Allgemeinen nicht kreisförmige Krümmungslinien, und wenn man also auf eine solche Fläche die Darbouxsche Operation anwendet, so findet man auf der Kugel oder in der Ebene eine Schaar orthogonaler Curven, unter denen sich keine Kreise befinden.

Endlich wissen wir schon, dass der Complex (1234) eine Schaar linearer Haupt-Congruenzen besitzt, deren sämmtliche Configurationen Haupt-Configurationen sind. Ohnedies existirt eine zweifach unendliche Schaar Haupt-Configurationen, die algebraisch bestimmbar sind. Man nimmt dabei seinen Ausgangspunkt darin, dass, die Complexe (12) (13) (14) (23) (24) (34) unseren Complex nach je einer gemeinsamen Haupt-Configuration berühren. Die in dieser Weise gefundenen ∞^2 Haupt-Configurationen können in unbegrenzt vielen Weisen in Haupt-Congruenzen zusammengefasst werden, indem nehmlich in gewissem Sinne jedes Orthogonal-System der Ebene eine solche Zusammenordnung giebt. Wendet man endlich die Darbouxsche Operation auf den Complex (1234) an, so findet man in R_3 eine Schaar Kugeln, deren orthogonale Trajectorien algebraisch bestimmbar sind.

Ich resumire das Obenstehende folgenderweise.

Ein Orthogonal-System des Raumes R_5:

$$F\ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \lambda) = 0$$

giebt zu den folgenden Operationen Veranlassung:

a. Jede Gruppe $(\lambda_1\ \lambda_2)$ giebt einen Complex mit drei algebraisch bestimm-

baren Schaaren Haupt-Congruenzen. (Dies ist die in der früheren Note von mir angegebene Operation.) Durch Anwendung der Darbouxschen Operation auf den gefundenen Complex erhält man ein Orthogonal-System in R_3.

b. Jede Gruppe ($\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$) bestimmt auch einen Complex mit drei Schaaren Haupt-Congruenzen. Die Darbouxsche Operation giebt ein Orthogonal-System in R_3, welches zwei Schaaren Röhrenflächen enthält. Die Flächen der dritten Schaar haben im Allgemeinen nicht kreisförmige Krümmungslinien, und also giebt eine neue Anwendung der Darbouxschen Operation ein Orthogonal-System in der Ebene, welches keine Kreise enthält. Hiermit ist die Aufstellung zweier neuer und allgemeiner Operationen angedeutet.

c. Jede Gruppe ($\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$) giebt endlich einen Complex mit einfach unendlich vielen linearen (kreisförmigen) Haupt-Congruenzen. Die zweifach unendlich vielen Haupt-Configurationen, die nicht in diesen Congruenzen enthalten sind, welche im Gegentheil dieselben in gewissem Sinne orthogonal schneiden, können in unbegrenzt vielen Weisen zu Haupt-Congruenzen zusammengefasst werden. Die Darbouxsche Operation giebt darnach eine Schaar Kugeln in R_3, deren orthogonale Trajectorien sich algebraisch bestimmen lassen.

Man übersieht nun so ziemlich, wie sich die

Sache in R_n stellen wird. Ich beschränke mich darauf den folgenden Satz auszusprechen, wobei jedoch zu bemerken ist, dass derselbe keine Operationen berücksichtigt, die Mannigfaltigkeiten [1]) mit kreisförmigen Haupt-Configurationen, oder kreisförmigen Haupt-Congruenzen u. s. w. ergeben.

Wenn in R_n ein Orthogonal-Sytem $F(x_1\ x_2 \ldots x_n\ \lambda) = 0$ gegeben ist, so bestimmt jede Gruppe $(\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_p)$ im Raume R_{n-p+1} Mannigfaltigkeiten M_{n-p}, auf welche Darboux's Operation sich anwenden lässt. In R_{n-p} findet man hierdurch allgemeine Orthogonal-Systeme, das heisst solche, deren Mannigfaltigkeiten keine kreisförmige Haupt-Configurationen enthalten [2]).

2. In der vorangehenden Nummer habe ich eine Reihe Operationen aufgestellt, die insofern einen gemeinsamen Charakter mit der Darboux-schen haben, dass etwas in R_n gegeben wird, dass darnach etwas in einem Raume, dessen Dimensionen-Zahl geringer ist, gefunden wird. Es

1) Bei den Operationen der zweiten Reihe (Cfr. Nummer 2) sind es eben Mannigfaltigkeiten mit kreisförmigen Haupt-Congruenzen, kreisförmigen Haupt-Complexen u. s. w., die in gewissem Sinne Operations-Mittel sind.

2) Hinsichtlich aller Operationen, die ich bisher betrachtet habe, gilt ein merkwürdiger Satz, der sich, ob auch in etwas unbestimmter Form, folgenderweise aussprechen lässt: Wenn dieselbe Operation auf zwei Mannigfaltigkeiten mit demselben sphärischen Bilde angewandt wird, so erhält man zwei neue solche Mannigfaltigkeiten. Bei einer anderen Gelegenheit hoffe ich hierauf näher eingehen zu können.

ist sehr bemerkenswerth, dass ein genaues Studium jener Operationen und aller dabei auftretenden Gebilde darauf führt, eine neue Reihe Operationen anzugeben. Dieselben scheiden sich dadurch von den früheren, dass die gefundenen Mannigfaltigkeiten einem Raume mit grösserer Dimensionen Zahl, als der ursprüngliche besass, angehören. Ein anderer nicht unwichtiger Unterschied liegt darin, dass die Operationen der zweiten Reihe immer Mannigfaltigkeiten geben, deren Haupt-Configurationen ein reductibles System bilden.

Der gemeinsame Charakter dieser neuen Operationen wird, wenn nicht erklärt, doch jedenfalls angedeutet, wenn ich sage, dass jedes Orthogonal-System $F(x_1\, x_2 \ldots x_n\, \lambda) = 0$ oder correkter eine jede Gruppe Mannigfaltigkeiten $(\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_p)$ eines solches Systems mir eine allgemeine Operation giebt, die wenn sie auf Mannigfaltigkeiten M_{p-2} angewandt wird, welche Orthogonal-Systemen in R_{p-1} gehören können, alsdann neue Mannigfaltigkeiten M_{n-2} bestimmen, auf welche Darboux's Operation sich anwenden lässt. Klarer ist vielleicht das Folgende. Bei einer Operation der ersten Reihe wird nur ein Orthogonal-System oder eigentlich nur eine Mannigfaltigkeit desselben als bekannt vorausgesetzt. Bei einer Operation der zweiten Reihe müssen zwei Mannigfaltigkeiten M_{n-1} und $M_{\nu-1}$ gegeben sein. Hierbei repräsentirt gewissermassen M_{n-1} diejenige Operation, die auf $M_{\nu-1}$ angewandt wird.

Um das Verständniss zu erleichtern entwickele ich zuerst eine bekannte einfache Theorie unter einem bestimmten Gesichtspunkte, der sich darnach auf R_n erweitern lässt. Ich bemerke, dass ich unter den Operationen der zweiten Reihe nur die erste und auch diese nur für R_3 und R_4 betrachte.

Es sei denn gegeben in R_3 eine continuirliche Schaar Kugeln $S_0, S_1, \ldots S_m$ mit ihren orthogonalen Trajectorien, (und hierbei kann man erinnern, dass ich in der ersten Nummer eine allgemeine Operation gegeben habe, um in einem beliebigen Raume R_n Kugel-Schaaren mit algebraisch bestimmbaren Trajectorien aufzufinden). Auf zwei Kugeln S_p und S_q betrachte ich solche Punkte als entsprechend, welche auf derselben Trajectorie liegen. Es ist bekannt, dass hierdurch eine conforme Abbildung der beiden Kugeln bestimmt wird. Diese einfache Bemerkung, (die sich auf R_n erweitern lässt, die sich noch im anderen Sinne verallgemeinern lässt) ist das eigentliche Fundamental-Princip meiner ganzen Note, ob auch dies nicht in meiner jetzigen Darstellung ersichtlich ist.

Ich betrachte nun auf S_0 eine beliebige Curve s_0 und zugleich auf allen S die in dem eben angedeuteten Sinne zugeordneten Curven s, deren Inbegriff eine Fläche F bilden. Auf derselben sind die s Krümmungslinien des einen Systems, während die in der Fläche enthaltenen Trajectorien Krümmungslinien des zweiten Systems sind. Giebt man auf S^0 eine Schaar orthogonaler Curven s_0, so bilden bekanntlich die zugehörigen Flächen F in Verbindung mit allen S ein System orthogonaler Flächen. Diese Be-

merkung, die beiläufig nicht in Betracht kommt, ist bei der Erweiterung auf R_n von fundamentaler Bedeutung.

Wendet man die Darbouxsche Operation auf eine beliebige Fläche F an, so erhält man in der Ebene R_2 eine zerfallene Schaar orthogonaler Curven. Hierbei ist es bemerkenswerth, dass man immer s_0 in solcher Weise wählen kann, dass das gefundene Orthogonal-System eine beliebige Curve k enthält. Zu diesem Zwecke braucht man nur die Ebene R_2 und die Curve k durch eine conforme Transformation des Raumes R_3 in die Kugel S_0 und eine Curve σ derselben überzuführen. Man sucht alsdann auf S_0 die der Curve σ entsprechende reciproke Polare hinsichtlich des unendlich weit entfernten imaginären Kreises und wählt dieselbe als Curve s_0; alsdann wird das Verlangte geleistet.

Wie dies sich auf R_n erweitert, wird aus den folgenden Andeutungen hinsichtlich R_4 hervorgehen.

Ich wähle eine continuirliche Schaar linearer Complexe S_0 S_1 ... S_m, das heisst Kugeln des Raumes R_4, und betrachte in S_0 eine Schaar Congruenzen s_0, die ein Orthogonal-System in diesem linearen Complexe bilden. Diese Congruenzen bestimmen ganz wie früher eine Schaar Complexe F, die in Verbindung mit den linearen Complexen S ein Orthogonal-System in R_4 bilden. Es folgt hieraus, dass die Darbouxsche Operation sich auf einen jeden Complex F anwenden lässt.

Dieses vorausgesetzt, kann man, wenn in R_4 als Operations-Mittel eine Schaar linearer Complexe S_0 ... S_m mit ihren Trajectorien gegeben ist, in folgender Weise in R_3 ein Ortho-

gonal-System finden, welches eine beliebige Fläche k enthält. Durch eine conforme Punkt-Transformation von R_4 führt man R_3 und k in S_0 und eine Congruenz derselben σ über. Aus σ erhält man durch eine Operation, die der früher angewandten nachgebildet ist, eine Congruenz, die als s_0 gewählt wird. Auf den dieser Congruenz entsprechenden Complex F wende ich die Darbouxsche Operation an mit Benutzung von S_0 als Bild-Kugel in R_4. Eine conforme Transformation von R_4 (die inverse von der früher angewandten) führt endlich S_0 und das gefundene Orthogonal-System dieses Complexes über in R_3 und ein System orthogonaler Flächen, unter denen k sich befindet.

Nicht unwichtig ist auch die folgende Bemerkung, die sich leicht verificiren lässt. In dem eben gefundenen Orthogonal-Systeme kann eine jede Fläche der einen Schaar erhalten werden, indem man auf k eine passend gewählte lineare Kugel-Transformation anwendet [1]).

Zur Erklärung meiner früheren Behauptung, dass bei einer Operation der zweiten Reihe eine gewisse Mannigfaltigkeit M_{n-1} das Operations-Mittel giebt, während die Operation selbst auf eine andere Mannigfaltigkeit angewandt wird, resumire ich das Obenstehende in folgender Weise.

Wenn in R_n ein Orthogonal-System und eine Mannigfaltigkeit desselben

1) Als lineare Kugel-Transformationen bezeichne ich alle Kugel-Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Diese Transformationen sind, wie ich an anderem Ort bewiesen habe, die allgemeinsten Umformungen, bei denen Krümmungs-Curven covariante Gebilde sind. Sie entsprechen in gewissem Sinne den gewöhnlichen linearen Transformationen des Raumes und hängen wie dieselben von 15 Constanten ab.

gegeben ist, so suche man zunächst nach den Methoden der ersten Nummer in R_{n-1} eine Schaar Kugeln $S_0 \ldots S_m$, deren Trajectorien sich algebraisch bestimmen lassen. Kennt man nun in R_{n-2} eine beliebige M_{n-3}, die einem Orthogonal-Systeme gehören kann, so führe man R_{n-2} und M_{n-3} durch eine conforme Punkt-Transformation von R_{n-1} in S_0 und eine Mannigfaltigkeit M_{n-3} derselben über. Man findet darnach in R_{n-1} eine Mannigfaltigkeit M_{n-2}, auf welche Darboux's Operation angewandt werden kann.

Es ist übrigens in diesem Falle wohl möglich das betreffende Operations-Mittel, das heisst eine Schaar Kugeln mit bekannten Trajectorien, auch in anderer Weise zu finden. Dagegen scheint es bei den übrigen Operationen der zweiten Reihe nothwendig zu sein, zuerst ein Orthogonal-System oder eine Mannigfaltigkeit desselben zu kennen.

Hier mögen die folgenden Bemerkungen ihren Platz finden.

a. Bemerkt man, dass eine Kugel-Schaar in R_{n+1} von $(n+2)$ arbiträren Funktionen abhängt, so kann man behaupten, dass wenn in R_n eine M_{n-1} gegeben ist, die einem Orthogonal-Systeme gehören kann, ein allgemeineres Orthogonal-System existirt, welches jene Mannigfaltigkeit enthält und dessen Gleichung von $(n+2)$ willkürlichen Functionen abhängt.

b. Wenn man in R_n eine Schaar Kugeln und ihre Trajectorien kennt, und diese Kugeln p gegebene Kugeln unter constantem Winkel schneiden, so findet man in R_{n-1} die Trajectorien einer Schaar Kugeln, die $(p+1)$ gegebene Kugeln unter constantem Winkel schneiden. Beispielsweise ist die Aufgabe: die Trajectorien einer Schaar Kreise in der Ebene zu bestimmen, damit äquivalent: im Raume die Trajectorien einer Schaar Kugeln, die einem linearen Complexe gehören, zu finden.

c. Die Bestimmung der Trajectorien einer Kugel-Schaar in R_n ist damit äquivalent, in R_{n-1} alle M_{n-2} zu finden, die eine Schaar Kugeln unter constanten Winkeln schneiden[1]). Beispielweise kommt die allgemeine Bestimmung der Trajectorien einer Kugel-Schaar in R_3 darauf hinaus in der Ebene alle Curven zu finden, die alle Kreise einer gegebenen Schaar unter bestimmten Winkeln schneiden.

3. Die sehr wichtigen Ergebnisse der zweiten Nummer werden hoffentlich durch die folgenden Betrachtungen, die sich unter jene Theorien subsumiren, wenn sie gleich hier eine selbstständige und einfachere Darstellung erhalten haben, in ein helleres Licht treten.

Man weiss, dass zwei unendlich nahe Flächen im Allgemeinen nicht demselben Orthogonal-Systeme angehören können. Dazu ist erforderlich und zugleich hinreichend, dass wenn man auf der einen Fläche eine Krümmungslinie wählt und

1) Für den Fall $n=4$ liegt dieser Satz implicite in J. A. Serrets Behandlung des Problems: alle Flächen anzugeben, deren Krümmungslinien des einen Systems sphärisch sind.

die entsprechenden Normalen construirt, dass dann dieselben jedesmal die zweite Fläche in den Punkten einer Krümmungslinie treffen. Offenbar stehen zwei Parallelflächen in dieser Beziehung. Indess, und dies ist keineswegs eine neue Bemerkung, wenn auch dieselbe nicht hinreichend verwerthet worden ist: eine infinitesimale Parallel-Transformation (Dilatation) ist nicht die einzige Operation, die eine beliebige Fläche in eine benachbarte überführt, die mit der gegebenen demselben Orthogonal-Systeme gehören kann. In der That, es bezeichne r eine beliebig gewählte Transformation durch reciproke Radien, ferner dp eine infinitesimale Parallel-Transformation, alsdann ist

$$r \, dp \, r$$

das Symbol einer Operation der besprochenen Art.

Führt man nun diese Operation auf eine Fläche F_0 aus, so erhält man eine Fläche F_1, die durch wiederholte Anwendung derselben Operation in F_2 übergeht. Indem man in dieser Weise continuirlich fortfährt, erhält man eine Flächen-Schaar $F_0 \, F_1 \ldots F_m$, die einem Orthogonal-Systeme gehören kann. (Ist insbesondere F_0 eine Kugel, so erhält man eine Schaar Kugeln, die einen gemeinsamen Kreis enthalten. Wir werden später finden, dass jede einfach unendliche Kugel-Schaar eine Operation mit einem Parameter repräsentirt und zwar eine, die wenn sie auf eine beliebige Fläche angewandt wird,

1) In gewissem Sinne ist $(r \, dp \, r)$ die allgemeinste infinitesimale Operation, die eine beliebige Fläche in eine benachbarte überführt, die demselben Orthogonal-Systeme wie die ursprüngliche gehören kann.

alsdann eine Schaar Flächen giebt, welche einem Orthogonal-Systeme gehören können).

In die eben gegebene Construction führt man in folgender Weise arbiträre Elemente ein. Es bezeichne $r_1\, r_2 \ldots r_m$ eine continuirliche Schaar Transformationen durch reciproke Radien, die sich auf verschiedene Fundamental-Sphären beziehen. Ich betrachte die infinitesimalen Operationen:

$$do_1 = (r_1 dp_1 r_1) do_2 = (r_2 dp_2 r_2) \ldots do_m = (r_m dp_m r_m)$$

wie auch die durch Zusammensetzung derselben hervorgehende endliche Operation o_m. Dies ist folgenderweise zu verstehen. Führt do_1 eine Fläche F_0 in F_1 über, ferner do_2 F_1 in F_2 u. s. w., so ist o_m eine Operation die F_0 in F_m transformirt. Es ist hierbei zu bemerken, dass unsere elementaren Operationen und demzufolge auch die endliche Operation o_m lineare Kugel-Transformationen sind, und also hängt o_m nur von 15 unbekannten C o n s t a n t e n ab.

Wir werden die Constanten einer jeden Transformation r_1, das heisst die vier Kugel-Coordinaten der betreffenden Fundamental-Sphäre, als g e g e b e n e Funktionen von p betrachten, und hierbei soll p eine Grösse sein, deren Differential dp wie früher Symbol einer infinitesimalen Parallel-Transformation ist.

Es ist alsdann auch die endliche Operation o_m oder, wie wir präciser sagen werden, es sind die 15 Constanten dieser Transformation Funktionen von p, und zwar genügen dieselben, wie man leicht findet, 15 simultanen Differential-Gleichungen erster Ordnung, die unter den gemachten Voraussetzungen aufgestellt werden

können. Es ist merkwürdig, dass dieses simultane System vollständig integrirt werden kann. In der That, es wäre nicht schwer zu beweisen, dass die Theorien der zweiten Nummer, insofern sie sich auf die erste Operation der zweiten Reihe beziehen, eben diese Integration leisten. Hier beschränke ich mich indess auf einen besonderen, ob auch sehr allgemeinen Fall, der durch einfachere Mittel erledigt werden kann.

Ich bemerke dann zunächst, dass wenn man eine continuirliche Schaar Flächen $F_0 F_1 \ldots F_m$ kennt, unter denen jede aus der benachbarten durch eine Transformation ($r\ dp\ r$) hervorgeht, so kann man im Allgemeinen eine solche Operation mit einem Parameter angeben, dass wenn man dieselbe auf eine beliebige Fläche anwendet, so erhält man eine Schaar Flächen, die einem Orthogonal-Systeme gehören können.

Dieses liegt darin, dass wenn *do* die infinitesimale Operation ($r\ dp\ r$) ist, welche jedesmal F in die benachbarte Fläche überführt, so ist o eine lineare Kugel-Transformation, die F_0 in solcher Weise in F überführt, dass solche Punkte der beiden Flächen zur Deckung kommen, welche durch die orthogonalen Trajectorien unserer Flächen-Schaar einander zugeordnet sind. Wenn es nun, wie im Allgemeinen der Fall sein wird, überhaupt nur eine lineare Kugel-Transformation giebt, welche F_0 in F überführt, so muss diese Operation, die ohne Integration angegeben werden kann, eben o sein, und damit ist meine Behauptung, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, erwiesen.

Nun ist es sehr leicht eine Schaar Flächen

anzugeben, unter denen jede aus der benachbarten durch eine Transformation $(r\ dp\ r)$ hervorgeht. So ist ja der Fall mit einer jeden Kugel-Schaar $S_0\ S_1 \ldots S_m$. Dieses Beispiel scheidet sich indess in zwei wichtigen Punkten von dem allgemeinen Falle. Einerseits kann S_0 in unbegrenzt vielen Weisen durch eine lineare Kugel-Transformation in S übergeführt werden, und nicht allein so, dass die durch die Trajectorien einander zugeordneten Punkte zur Deckung kommen; hieraus folgt, dass es um die anfänglich besprochene Operation o zu finden, nothwendig sein wird die Trajectorien der Kugel-Schaar zu kennen. Dies ist indess bekanntlich möglich.

Ob man aber auch die Forderung hinzufügt, dass unsere Operation o die Kugel S_0 in solcher Weise in S überführen soll, dass entsprechende Punkte zusammenfallen, so giebt es doch unter allen ∞^{15} linearen Kugel-Transformationen ∞^{10}, welche das Verlangte leisten. Unsere frühere Betrachtungen geben also in diesem Falle nur 10 Integral-Gleichungen des simultanen Systems, welches o bestimmt. Diese Schwierigkeit, die ihre natürliche Ursache darin hat, dass es einfach unendlich viele Transformationen $(r\ dp\ r)$ giebt, welche jedesmal S in die benachbarte Kugel überführt, überwinde ich dadurch, dass ich unter den ∞^{15} linearen Kugel-Transformationen nur ∞^{10} betrachte, solche nehmlich, die einen gewissen linearen Kugel-Complex in sich überführen, welche daher in dem Sinne ein geschlossenes System bilden[1], dass zwei Trans-

1) Vergl. die Abhandlung: Ueber vertauschbare lineare Transformationen . . . von Klein und Lie, Math. Annalen, T. 4.

formationen des Systems sich immer zu einer Transformation des Systems zusammensetzen lassen.

Man wähle nehmlich eine beliebige Ebene E und beschränke sich auf Transformationen, welche den Inbegriff aller Kugeln, deren Centra in E liegen, in sich überführen [1]). In diese Categorie gehören erstens alle Transformationen durch reciproke Radien, deren Fundamental-Sphären dem besprochenen linearen Kugel-Complexe E gehören, ferner alle Parallel-Transformationen, endlich alle elementaren Transformationen

$$\varrho \; dp \; \varrho,$$

wie auch alle durch Zusammensetzung solcher Operationen entstandenen endlichen Transformationen. Nun giebt es immer eine und zwar eine bestimmte Operation ($\varrho \; dp \; \varrho$), die S in die benachbarte Kugel überführt. Es folgt hieraus, dass die durch Zusammensetzung der elementaren Transformationen ($\varrho \; dp \; \varrho$) entstandene endliche Operation o, die S_0 in S in der mehrmals besprochenen Weise überführt, ohne Integration angegeben werden kann, vorausgesetzt dass die Trajectorien der Kugel-Schaar bekannt sind.

Wenn man die Trajectorien einer Kugel-Schaar kennt, so kann man mit Zugrundelegung einer beliebigen Ebene eine Operation mit einem Parameter angeben, und zwar eine solche, dass wenn man sie auf eine beliebige Fläche anwendet, man eine Flächen-Schaar erhält, die einem Orthogonal-Systeme

1) Dagegen dürfen die Sphären S nicht der Beschränkung unterworfen sein, dass ihre Centra in E liegen. In diesem Falle würde nehmlich eine neue Schwierigkeit eintreten, die sich freilich sehr leicht erledigen liesse.

gehören kann. Um die conjugirten Flächen-Schaaren zu finden, genügt es, die Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche zu kennen.

Fernere Mittheilungen über neue archäologische Untersuchungen und Entdeckungen nach Briefen und Schriften aus Petersburg und Pompeji [1]).

I.

Die südrussischen Funde sind in diesem und dem vergangenen Jahre sehr wenig reichhaltig gewesen. Auch von Schriften auf diesem Gebiet steht jetzt wenig in Aussicht.

Dagegen ist das von dem sehr kundigen Attaché an der Kaiserl. Eremitage, Herrn Georg Treu, auf Wunsch des Präsidenten der Akademie der Künste unter Oberleitung von L. Stephani in russischer Sprache angefertigte Verzeichniss des uns im J. 1870 jener Akademie, von welchem Sculpturmuseums der erste Band zukam, jetzt durch Hinzufügung des zweiten vollendet.

Wenn auch die Sammlungen dieser Akademie, bei denen es hauptsächlich auf Gypsabgüsse abgesehen ist, nur verhältnissmässig wenig an Antiken enthalten und die meisten unter denselben in künstlerischer Hinsicht unbedeutend sind, so haben doch selbst unter diesen manche ein kunstgeographisches oder antiquarisches Interesse. In jene Kategorie gehören namentlich diejenigen, welche aus den Donaugegenden stammen. Einige von ihnen sind in dem schwerlich weit verbrei-

1) S. Nachrichten, N. 10, 14 Juni 1871.

teten Werke von C. Sayger und A. Desarnod: Album d'un voyage en Turquie fait par ordre de Sa Majesté l'Empereur en 1829 et 1830, in Abbildungen herausgegeben, über welche man nähere Nachrichten findet in einer Schrift, die unter dem Titel Relation d'un voyage en Romélie zu Paris im J. 1824 erschienen ist. Wir beschränken uns darauf, im Folgenden eine kurze Uebersicht der im ersten Bande des Verzeichnisses aufgeführten Antiken zu geben.

103. Kampfscene, spätes fragmentiertes Relief.
124. Jünglingskopf, unvollendet und sehr beschädigt.
140. Flussgott und Nymphe, Relief.
149. Dionysos auf einem Kentaur gelagert, dahinter ein Satyr; röm. Relief.
153. Kolossales korinth. Kapitell.
233—34. Fragmentierte weibl. Gewandstatuen roher Arbeit.
235. Demeterkopf (Sayger und Desarnod, Taf. 50).
236. Fragm. weibl. Gewandstatue.
246. Rohes Ornamentstück (Sayger und Desarnod, Taf. 41).
247. Herakles, Votivrelief (ibid. Taf. 35).
248. Reiter auf der Löwenjagd, Relief. (Sayger und Desarnod, Taf. 29).
320. Augustus(?)kopf, sehr beschädigt.
328 und 332. Barbarenmasken, Eckstücke eines röm. Sarkophags.
331. Erote, eine Guirlande tragend, über welcher Schwäne; Relief (Sayger und Desarnod, Taf. 29).
337. Tragische und kom. Masken, Thonrelief.
338. Fragm. weibliche Gewandstatue roher Arbeit.
346. Fragm. männliche Gewandstatue roher Arbeit.

347. Torso eines Knaben, der einen Vogel an sich drückt (dem in den Berichten der sächs. Ges. d. Wiss. 1848. Taf. 1 ähnlich, nur dass der Knabe den Vogel mit der Rechten an sich drückt).
352. Fragm. rohe weibliche Gewandstatue.
375—79. Rohe griech. Grabreliefs.
380. Asklepios? Relieffragm.
382. Votivrelief mit drei Göttern, die aber wegen der starken Beschädigung der Oberfläche nicht mehr kenntlich sind. Griechisch.
383. Ornamentstück: Adler und Blitz.
385. Sehr rohes Grabrelief: Handwerker (Schmidt?) bei seiner Arbeit.
387. Isispriester, Relieffragment.
393—394. Rohe Grabreliefs.
63. Oberes Stockwerk: Hygieia (Clarac: IV. 555, 1176; Adam: coll. de Sculpt. ant., Taf. 39).

Der Besucher des Sculpturmuseums der Akademie der Künste findet in demselben auch Gypsabgüsse von Antiken, welche in der Kaiserl. Eremitage und in der Umgegend von Petersburg an Stätten aufbewahrt werden, deren Besuch für den Fremden nicht so leicht zu bewerkstelligen ist, wie der der mit so grosser Humanität verwalteten Eremitage. Auch für diese Stücke kann der Treu'sche Catalog als Wegweiser dienen. So führt derselbe in seinem ersten Bande folgende Stücke an, meist vorlängst herausgegeben, unter denen aber nur ein paar sind, deren jetziger Aufbewahrungsort allgemeiner bekannt ist.

Aus dem Schloss zu Gatschina:

317. Vespasian opfernd, Relief (Winckelmann, mon. ined. n. 175).
333. Mann auf einem Felsen sitzend, Hautrelief (Montfaucon suppl. III. Taf. 16, 2. 4).

Aus dem Schloss zu Pawlowsk:

35. Erosstatue, der in Neapel (Denkm. der Kunst. II, 50, 630) sehr ähnlich.
53. Im oberen Stock: bogenspannende Eros (Clarac: IV. 646, 1471).
65. — Polyhymnia (Clarac: III, 526, 1035[1]).

Aus dem sog. Stroganoffschen Garten:

377. Sarkophag: Achill auf Skyros (Heyne: das vermeintl. Grabmal Homers).

Obgleich ich in Pawlowsk war, habe ich doch in Folge eines ungünstigen Zufalls die sonst keineswegs unzugängliche Sammlung im Schlosse des Grossfürsten Constantin nicht zu Gesicht bekommen, wohl aber von Bekannten Einiges über dieselben gehört und bei Professor Dr. Lugebil in Petersburg Zeichnungen von mehreren Stücken gesehen, unter denen ein Euripideskopf mein besonderes Interesse in Anspruch nahm. Herr Lugebil beabsichtigte dieselben herauszugeben, ist aber durch andere Arbeiten an seinem Vorhaben verhindert. Um so erfreulicher ist die mir eben zugehende Kunde, dass jetzt Stephani im Auftrage des Grossfürsten Constantin über die Antiken von Pawlowsk zu schreiben im Begriff steht[2]).

Die für die übersichtliche Kenntniss des Bestandes der Sammlungen in der Kaiserl. Eremitage so erspriesslichen Führer, welche bis zum Jahre 1866 von Guedeonow und Stephani herausgegeben sind, haben bis jetzt keine weiteren Fortsetzungen erhalten.

1) Die Maske, welche hier die Figur auf dem Kopfe hat, beruht auf Irrthum. W.

2) Herr Treu, dem ich jene Kunde verdanke, berichtet mir auch, dass der Kopf, den ich in meinem „Narkissos" unter n. 17 nach Guattani publicirt habe, sich wie auch einige andere Sachen aus Pacetti'schem Besitz, jetzt in dem Schlosse zu Pawlowsk befindet.

Anlangend das Verzeichniss der antiken Bronzen und Terracotten, welches im J. 1866 in russischer Sprache erschien, so lässt die schon damals beabsichtigte Bearbeitung in französischer Sprache noch immer auf sich warten. Da nur wenige der nichtrussischen Archäologen der russischen Sprache mächtig sein dürften, so ist diesen ein kurzer Bericht über den Bestand, welchen wir zumeist aus dem russisch geschriebenen Verzeichniss schöpfen, wohl angenehm.

Der sogenannte Saal der antiken Bronzen enthält zwei verschiedene Sammlungen, 1) die von Metallsachen, in welcher die aus Bronze die aus anderen Metallen an Zahl bei weiter übertreffen, 2) die von Terracotten, in welchem sich auch einige Sachen aus Glas, Email, Knochen u. s. w. befinden. Der grösste Theil der Bronzen rührt aus dem Mus. Campana her und ist 1861 durch Herrn von Guedeonow erworben. Einige Stücke wurden zu Pompeji in Gegenwart des Kaisers Nikolaus I. oder anderer Mitglieder des kaiserl. Hauses ausgegraben. Ueberall stammen die Metallsachen fast sämmtlich aus Italien, namentlich aus Etrurien; nur einige wenige sind in Russland oder in Griechenland oder anderswo gefunden. Man gewahrt unter ihnen verschiedene Arten von Waffen und Rüstungen (höchst selten und ausgezeichnet in ihrer Art sind namentlich die beiden Helme n. 364 und 423, dieser aus Vulci, von Bronze, mit goldenen Zierathen, jener aus Bolsena, von Silber, mit der Inschrift AHIOYM auf der Vorderseite); Candelaber und andere zum Cultus gehörende Gegenstände, darunter den in den Mon. ined. d. Inst. di corr. arch. T. VI, t. LXIX, 2 bekannt gemachten altetruskischen Dreifuss (n. 338) und eine in Viterbo gefundene Prochus mit der In-

schrift C. POMPONIVS. ZOTICVS. COLLEGIO APOLLINARIO D. D.; verschiedene Gegenstände, welche im gewöhnlichen Leben gebraucht wurden, als Lampen, Strigiles, etruskische Spiegel, unter welchen namentlich hervorgehoben werden n. 406 (der grosse mit der Darstellung von Aphrodite und Adonis in den Mon. ined. d. Inst. arch. T. VI, t. LXIX, n. 1 und bei Gerhard Etrusk. Spiegel Taf. CCCXXII), n. 418 (der mit bisher noch unerklärter Darstellung bei Gerhard, Thetis und Priumne, Berl. 1862), n. 420 (der mit der Darstellung der Eos, welche mit Hülfe einer ihrer Gefährtinnen Memnons Leichnam davonträgt, s. Gori, Inscr. Etr. I, t. XVI, H. Meyer, Gesch. d. bild. Kunst Taf. 2, Stephani, Nimbus und Strahlenkranz S. 61), n. 444 (der mit zwei Füllhörnern, dem Kerykeion und dem beflügelten Petasos des Hermes bei Gerhard Etr. Sp. Taf. LX, n. 1), etruskische, römische und griechische Spiegelbehälter, n. 409 und 409a, (beide, namentlich der erstere, abgebildet bei Gerhard, Etr. Sp. Taf. CCXLIII, n. 2, zeichnen sich durch ihre Erhaltung, der andere auch durch den rein griechischen Stil des Bildwerks aus, vgl. Stephani im Compte rendu de la Commiss. imp. arch. pour 1865, p. 161), Cisten von cylindrischer Form aus Palestrina, eine aus der Campana'schen Sammlung herrührende, mit einer Zeichnung, deren Gegenstand nach Stephani aus dem Meleagermythos geschöpft zu sein scheint, und, auf dem Deckel, mit den Figuren eines Satyrs und einer Mänade, n. 337, vgl. R. Schöne, Ann. d. Inst. arch. T. XXXVIII, p. 182 fg., n. 63, und eine andere, später erworbene, gleichfalls aus Palestrina stammende, die früher im Helbig'schem Besitz befindliche, welche in den Mon. ined. d. Inst. Vol. VIII, t. LVI—LVIII abgebildet und

in den Annali T. XL, p. 417 fg. n. 75 von Schöne besprochen ist), Vasen, aus Bronze, wie die unter n. 43 verzeichnete, bei Köhler Ges. Schriften, herausg. von Stephani Th. VI, Taf. 10 und 11 abgebildete, und die besonders merkwürdige dreihenklige mit oskischer Inschrift am inneren Rande, welche Minervini im Bullett. arch. Napol., N. S., T. II, t. 7 herausgegeben hat, und aus Silber, wie n. 373, die in den Antiq. du Bosph. Cimmér. pl. XL—XLII, publicirte, und n. 431, das Fass, welches ebenda auf Taf. XXXIX abbildlich mitgetheilt ist. Eine alte Bekannte tritt uns in jener goldenen, zu Lavinium gefundenen Binde entgegen, welche schon bei C. A. Böttiger Sabina Bd. I, Taf. V und bei Willemin Choix de Costumes I, pl. 41 in Abbildung zu finden ist. Endlich treffen wir eine reiche Auswahl von Statuetten aus Bronze, unter denen besondere Beachtung verdienen die Grabstatuette eines jungen Etruskers von fast halber menschlicher Grösse (n. 379), welche ich schon im J. 1846 zu Perugia zu sehen Gelegenheit hatte und Micali's Mon. ined. vom J. 1844 in Abbildung bringen, die allbekannte Votivstatuette des Polykrates aus der Sammlung Pourtalès-Gorgier (n. 536, a), die 1863 in der Nähe von Janina gefundene Statuette eines Kitharöden (n. 607, a), auch die Athena mit der Eule in der Hand, welche beiden letzteren Werke nach Abfassung des Catalogs durch Stephani im Compte rendu p. 1867, p. 48 u. 153 abbildlich mitgetheilt und p. 152 und 159 besprochen sind.

Die nackte Aphrodite mit Schale und Prochus in den Händen, n. 599, ist nach Stephani's Vermuthung vielleicht die bei Clarac Mus. de sculpt. pl. 620, n. 1409 abgebildete Statuette. Der auf dem Globus stehende Eros mit Fackel

in der Hand, n. 608, hat für uns Deutsche als ein aus unserm Vaterlande stammendes Stück Interesse: es handelt sich um die durch die Abbildung in den Jahrb. von Alterthumsfr. im Rheinlande Bd. IX, Taf. V, n. 4 bekannte Statuette. Als in sachlicher Beziehung interessante Thierstatuette signalisiren wir n. 356, die an einer Nuss nagende Maus, welche durch Minervini's Besprechung und Abbildung, Mon. di Barone, t. 5, bekannt ist.

Die Terracotten und Glassachen stammen fast sämmtlich aus der Sammlung Pizzati. Unter jenen findet man besonders reich vertreten die Rhyta, Lampen und Statuetten geringer Dimensionen.

Unter den Führern in die einzelnen Abtheilungen der Eremitage, deren Erscheinen noch zu verhoffen steht, darf man wohl am ersten entgegensehen dem in die ägyptische Sammlung, mit welchem G. Treu beauftragt ist, dem wir einstweilen eine für das grössere Publicum bestimmte, anziehend geschriebene Abhandlung über diese Sammlung mit Bezugnahme auf die Todtengebräuche der alten Aegypter (St. Petersb. 1871, Verlag d. Kaiserl. Hofbuchhandlung, H. Schmitzdorff) verdanken, in welcher auch die grossartigen Sphinxe an der Newa vor der Akademie der Künste berücksichtigt werden.

Ausserordentlich wünschenswerth wäre das Erscheinen eines wissenschaftlichen Verzeichnisses der so reichhaltigen Sammlung von geschnittenen Steinen, für dessen erspriessliche Herstellung grade in Petersburg die genügenden Kräfte vorhanden sind. Doch verlautet darüber noch nichts. Auch dürfte die vorher nothwendig vorzunehmende neue Ordnung und kritische Sich-

tung des Bestandes viel Zeit und Mühe in Anspruch nehmen.

Endlich wäre auch ein Führer in die numismatischen Sammlungen der Eremitage eine verdienstliche Arbeit. Ausser dieser besitzt auch die Akademie der Wissenschaften einen wenn auch minder bedeutenden Schatz von Münzen. Da beide Sammlungen ausserhalb Petersburg's wenig bekannt sein dürften, so hat es gewiss ein besonderes Interesse, die bis zum Ende des Jahres 1867 reichenden historisch-statistischen Notizen, welche mir ein besonders genauer Kenner, der sorgfältige Conservator beider Sammlungen, Herr A. Grimm, brieflich mitzutheilen die Gefälligkeit hatte, hier veröffentlicht zu sehen.

»Was das Münzcabinet der k. Eremitage betrifft, so datirt seine Entstehung aus den ersten Jahren des laufenden Jahrhunderts. Womit die Sammlung begonnen, ist nicht zu ermitteln, doch wird schon im J. 1805 und in den nächstfolgenden mehrerer in Russland gemachten Funde antiker Münzen Erwähnung gethan, welche der Eremitage einverleibt wurden.

Den Bemühungen des bekannten Archäologen Köhler, vieljährigen Mitgliedes der hiesigen Akademie der Wissenschaften, verdankt diese Sammlung ein stetiges Anwachsen theils durch Ankauf grösserer Collectionen, theils durch Erwerbung einzelner Stücke bei gelegentlichem Angebot, aus Münzfunden u. s. w. So erwarb die Eremitage namentlich im J. 1835 von dem Stadthauptmann von Kertsch Stempkowski eine ansehnliche Sammlung bosporischer Münzen und im J. 1838 das bekannte von Sestini beschriebene Münzcabinet des Barons Choudoir. Letztere Sammlung enthielt 5201 Stück griechischer

Münzen (AV 86, AR 1665, Æ & POT 4050). Aber erst in einer späteren Zeit verdanken wir der Munificenz unserer Regierung, ausser vielen kleineren doch sehr werthvollen Erwerbungen, den Ankauf grösserer geschlossenen Sammlungen, so z. B. im J. 1857 der Sammlungen des Wirkl. Staatsraths Reichel, des Grafen Perowski und des Fürsten Sibirski, im J. 1859 der schönen von dem französischen Archäologen Beulé angelegten Sammlung attischer Tetradrachmen u. s. w.

Unser Münzcabinet zerfällt jetzt in 4 Sectionen: 1., antike Münzen, 2., russische Münzen, zu denen auch die polnischen, anderweitige slavische und baltische gezählt werden; 3., mittelalterliche und moderne und 4., orientalische Münzen. Die Summe aller Münzen überschreitet die Zahl 200,000 um ein Beträchtliches. — Was zunächst den antiken Theil betrifft, so enthält unsere griechische Sammlung 15,150 Stück (AV 569, AR 4479, Æ 10102) und die römische 7495 (AV 609, AR 2651, Æ 4235). Letztere Ziffer zeigt Ihnen, wie arm wir in römischen Münzen sind; — ein Grund dafür ist darin zu suchen, dass sich uns keine günstige Gelegenheit bot, grössere Anschaffungen zu machen, wir begnügen uns zunächst mit Einzelkäufen. Die Sammlung der griech. Münzen ist in einzelnen Partieen reicher als irgend eine der bekanntesten europäischen Cabinette; doch begnüge ich mich fürs erste damit, Ihnen in Erinnerung zu bringen: den Reichthum unserer bosporischen Münzen, die Schönheit unserer attischen Tetradrachmen und die Mannigfaltigkeit der vorderasiatischen Goldstatere.

Das Münzcabinet der k. Akademie der Wissenschaften, welches, wie Ihnen bekannt, eine viel bescheidenere Rolle spielt als das der k. Ere-

mitage und dem auch nie wie diesem die Mittel zu Gebote standen, sich ansehnlich zu vergrössern, verdankt seine Entstehung Peter dem Grossen. Als dieser Kaiser im Jahre 1714 die sogenannte Kunstkammer — ein Raritäten-Cabinet, in dem die verschiedenartigsten Dinge aufgestellt wurden — gründete, unterliess er es nicht auch eine Anzahl Münzen daselbst niederzulegen, wozu dann im J. 1721 ein Theil der Münzsammlung von Lüder im Hamburg kam, deren übriger Theil im J. 1738 erworben wurde. Mit Eröffnung der Akademie der Wissenschaften im December 1726 ging die genannte Kunstkammer mit allen bis dahin angesammelten Gegenständen in den Besitz der Akademie über und löste sich als solche erst in diesem Jahrhunderte auf, indem die rein wissenschaftlichen Sammlungen unter sich geschieden und von den sonstigen Raritäten getrennt wurden. Die erste Beschreibung dieser Sammlungen rührt von dem Bibliothekar der Akademie, Canzleirath Schumacher, her und trägt den Titel Musei Imperialis Petropolitani vol. I et II. 8°. 1745., deren zweiter und dritter Theil des zweiten Bandes die Cataloge der antiken und modernen Münzen enthält. Seit jener Zeit wuchs das Münzcabinet durch Erwerbung verschiedener Funde, durch Ankäufe und Schenkungen zu seinem jetzigen Bestande an und enthält circa 2000 griechische Münzen, gegen 15000 römische und eine nicht grosse Anzahl moderner Münzen und Medaillen, sowie die grosse Mionnet'sche Schwefelpastensammlung.«

II.

Herr Professor Dr. Gaedechens in Jena, dem wir den S. 290 fg. dieser Nachrichten mitgetheilten

vorläufigen Bericht verdanken [1]), hat seine Untersuchungen über Pompejianische Monumente während des verwichenen Sommers mit dem lebhaftesten Eifer fortgesetzt. Ueber die nächsten Früchte derselben schrieb er mir im August Folgendes.

»Ich bin hier jetzt mit zwei Arbeiten, einer kleineren und einer grösseren, vollauf beschäftigt. Die erste betrifft die trotz Ihrer durchgreifenden Bemerkungen noch immer spukende Frage: Phrixos-Helle-Theophane, die ein hiesiges, schon lange ausgegrabenes, aber wunderlicher Weise noch nicht publicirtes Wandgemälde zum Austrag bringt. In der Casa di Sallustio befindet sich an der Hauptwand eines Zimmers das bekannte Bild mit der Metamorphose des Aktaeon, während die Seitenwände mit zwei kleineren, sehr sorglich ausgeführten Gemälden geschmückt sind. Das eine stellt die Entführung der Europa dar, und ist auf demselben besonders ein Eros interessant, welcher, nachdem die Einfädelung des Liebeswerks gelungen, sich wieder in die Lüfte schwingt. Er hält aber in seinen Händen jenes verhängnissvolle gelbe, resp. goldne Geräth, welches Guigniaut, Stephani und auch schon K. O. Müller für eine Spindel, Minervini für eine Fackel erklären, Helbig als »alabastronförmiges Cultusgeräth« bezeichnet, während ich, den Akademikern folgend, es als abbrevirte Form des Skeptron nachweisen zu können glaube. Es kommt etwa 20 Male vor, meist auf Wandgemälden, doch auch in Stucco, ja selbst bei Statuen. — Diesem Sujet gegenüber ist nun Theophane dargestellt, ruhig auf dem grossen schö-

1) Herr Gaedechens hat nachher selbst ausführlicher über das betreffende Gemälde gehandelt in dem Giornale d. scavi di Pompei.

nen göttlichen Widder gelagert, der mit ihr durch die Fluthen eilt. Die Figur wird von einigen Helle genannt, Helbig bezeichnet sie, obwohl ihr weibliches Geschlecht unbezweifelbar ist, als Phrixos. Ihr eilt durch die Wellen nach eine weibliche, nicht jugendliche Gestalt, mit weissem Kopftuch, verzweifelnd die Hände ausstreckend: gewiss die Mutter oder Amme, welche sich bemüht, die Entführung zu hindern. Zwei Eroten aber halten sie mit beschwichtigenden überredenden Mienen und Gesten zurück.

Dazu kommt ein höchst interessanter und bedeutsamer Beleg im Neapler Museum. Ein kleines wenig gut ausgeführtes Wandgemälde zeigt eine mythologische Landschaft; das Meer nimmt den grössten Theil des Vordergrundes ein; ein weisser Widder mit einer ruhig auf ihm gelagerten Person ist just eben in die Wogen gesetzt; am Ufer steht eine bekleidete Frau, jammernd die Hände ausstreckend, natürlich die Mutter oder Amme oder Gespielin. Helbig nennt das Bild sehr mit Unrecht: Phrixos und Thalassa.

Ich habe nun von Theophane-Darstellungen ausserdem sechszehn Exemplare gesammelt, in Bronzen, auf geschnittenen Steinen, Münzen und Vasen, und will diese Arbeit in einen für den nächsten Band der Annali bestimmten Aufsatz, mit Hinzufügung zweier Kupfertafeln, niederlegen.

Mir ist dieser Mythos immer höchst interessant gewesen. Kein griechischer Schriftsteller, so viel mir wenigstens bekannt ist, erwähnt seiner, wir sehen uns lediglich auf Hygin und Ovid angewiesen, die aber wieder zwei ganz von einander verschiedene Segen vortragen. Und Ovid fertigt seine Version mit drei kahlen Worten ab, welche Kürze natürlich die völlige Bekanntschaft seiner Zeitgenossen mit diesem Mythos

aus uns unbekannten Quellen involvirt. Das betreffende Bild folgt nun ganz dem Ovid, welcher Dichter ja mit besonderer Vorliebe von Malern der verschütteten Städte benutzt wurde.

Bedeutungsvoll sind diese beiden Monumente auch als völlig entsprechende Pendants unter einander, wie zu dem grossen Aktaeonbilde. Ein anderes Beispiel innerlichen Zusammenhangs habe ich in meinem Ariadne-Triptolemosartikel betont. Diese Frage nach den Principien, nach denen die Pompejaner die Sujets für die Bilder, mit denen sie ihre Häuser zu schmücken gedachten, wählten, ist bis jetzt eigenthümlicher Weise noch gar nicht ordentlich ventilirt, ja man ist ihr, so anregend sie auch war, eigentlich geflissentlich aus dem Wege gegangen. Jetzt hat sich der mit mir zu gleicher Zeit in Pompei weilende Stipendiat des Instituts, Dr. Trendelenburg aus Bromberg, eingehend mit diesem Gegenstande beschäftigt und ist zu dem Resultat gelangt, dass fast alle in Einem Zimmer angebrachten Bilder unter einander in einem formellen oder sachlichen Zusammenhange stehen, wie das ja auch eigentlich von vorne herein nicht anders anzunehmen war. Ich will Ihnen nur ein niedliches Beispiel anführen. Ein Tischler hat an der einen Zimmerwand Utensilien seines Handwerks, auf der gegenüberliegenden aber Pasiphae, Daedalus und die Kuh anbringen lassen, letztere als grösstes chef d'oeuvre, das seine Zunft je erzeugt.

Die weit umfangreichere, selbständige Arbeit betrifft die Sammlung, Beschreibung und Erklärung sämmtlicher hier und im Neapler Museum befindlicher figürlichen Stuccoreliefs, wie sie die Alten zur Ausschmückung ganzer Wände, zu Friesen, zu Säulencapitelen, mehrfach auch zu

Herstellung der heiligen Schlangen, zu Auszierung der Lararien u. s. w. reichlich verwandten. Diese Denkmälerclasse ist bis jetzt so gut wie ganz vernachlässigt worden. Sie stellt sich allerdings auf den ersten Blick wenig anlockend für die Behandlung dar. Der Stucco ist meist abgefallen, nur die Umrisse haben ausgedauert, die Malerei, welche man zur Herstellung der Attribute, der Kleidung selbst der im Innern des Reliefs liegenden menschlichen Glieder statt der Stuccatur anwandte, ist erloschen, und erfordert so das Studium dieser Denkmäler sehr sichern Blick und vor Allem das richtige Mittel zwischen zu reger und zu schlaffer Phantasie; dazu sind manche der in Frage kommenden Bilder noch nicht gehörig gereinigt, andere sehr hoch angebracht und dem Auge nicht wohl erreichbar. Man ist mir nun von allen Seiten mit der grössten Liebenswürdigkeit entgegengekommen; der Soprastante Fraja hat manche allzuschwer erkennbare Stücke mit einem die Einzelheit besser hervorhebenden Wachsüberzug versehen lassen, eine grosse Leiter steht mir stets zur Verfügung; ebenso ist ein Junge zum Transportiren derselben immer bereit. Der hier weilende Maler Donner, der sich durch seinen einleitenden Vortrag zu Helbig's Werk als besten Kenner Pompejanischer Malertechnik bekundet hat, war so gütig, mir einzelne Monumente mit Meisterschaft zu zeichnen; andere lieferte ein Architect Hase aus Altenburg; nächstens gehe ich nach Neapel, um mit Fiorelli und Petra über Beschaffung eines Zeichners mich zu besprechen.

Ich habe wirklich des Interessanten recht viel gefunden und darf hoffen, ein hübsches Werk daraus zu componiren. Versagen kann ich mir nicht, Ihnen Einzelnes kurz anzugeben.

Stabianer Thermen: 1) Hylasraub, interessant dadurch, dass zwei der Nymphen völlig ruhig sind, nur die dritte die Hand verlangend nach dem schönen Jüngling ausstreckt. 2) Perseus und Andromeda, am Strande vertraulich gelagert, Zeigung des Abbildes des Medusenhauptes im Wasser, dabei das Meerungeheuer noch lebend und lustig bewegt. Also eine Verschmelzung zweier Scenen, wie sie jetzt, Angesichts zweier Aktaeonbilder, eines Parisurtheils und einer neu aufgefundenen Darstellung aus dem Bellerophonmythos für Pompei nicht mehr geleugnet werden kann und doch ein interessantes Licht auf die Philostratischen Bilder wirft, bei denen man ja gerade aus diesen verschiedenen auf einem Bilde vereinigten Scenen einen Grund für die Annahme ihrer Nichtexistenz abzuleiten suchte. Uebrigens gleicht die Composition dieses Bildes so vollkommen der Darstellung des Dionysos und der Ariadne im Codex Pighianus (Jahn Ber. d. Kgl. S. G. d. W. 1869. Taf. II. n. 4), dass, von Anderem abgesehen, schon hieraus anzunehmen ist, dass der ganze Complex nicht ein »Gemälde«, sondern eine Folge von Stuccoreliefs war. 3) Daedalos schmiedet dem Ikaros die Flügel, ganz vollkommen dem Marmorrelief Spada entsprechend, auch in der Grösse. 4) Eben so umfangreiches Werk, vermuthlich Paris inmitten seiner Heerde, Hermes, ihm die Botschaft bringend. 5) Trauernder Achilleus, vor ihm Thetis tröstend. 6) Trunkener Herakles, eine Treppe herabsteigend, einem kleinen Satyr mit riesiger Fackel aus seinem Rhyton spendend. 7) Hoch interessante Darstellung einer Stadt, vielleicht gar Pompei, von thurmbesetzten Mauern umgeben, innerhalb derselben u. A. ein dreistöckiges öffentliches Gebäude mit einem Thurm, der ganz

und gar den unsrigen gleicht. 8) Grosse Zusammenstellung palästrischer Geräthe, darunter Reifen mit den bekannten annelli und dem ἐλατὴρ sowie jenem säulentrommelähnlichen Apparat, der hier durch eine grosse Handhabe sicher als Walze für den Sand bezeichnet wird. 9) Herrlich componirte Kneipgruppe eines Satyrs und einen Bakchantin. 10) Nackte Nereiden auf herabschiessenden Delphinen, als Abschluss von Gewölbgürtungen, so prächtig, dass sie lebhaft an die Raphael'schen Grazien in der Farnesina erinnern. 11) Fries von Kriegsschiffen. 12) Alterthümliche Persische Artemis, mit Hirsch und Hirschkuh in den Händen, u. s. w.

Terme pubbliche. 13) Grosse Meergottmaske, umgeben von zwei colossalen, im grossartigsten Styl ausgeführten Tritonen, der eine Schild und Schwert handhabend, ähnlich dem bekannten Corsini'schen, der andere mit einem sehr grossen Krater auf den Schultern. 14) Reizender Fries mit Knaben, die auf Bigen wettfahren, dabei interessanter Lauf von Jünglingen, die eine halbeiförmige Mütze auf dem Kopf tragen, Wagensturz, Kampfordner, Metae. 15) Apollo auf Greif. 16) Ganymed in den Fängen des Adlers. 17) Amor auf Delphinen, hinter ihm ein grösserer Eros, mit wahrhaft forscher Keckheit auf einem der beiden von ihm gezügelten Meerpferde courbettirend.

Isistempel. 18 u. 19) An den Seitenwänden des sogenannten Purgatorium zwei prächtige schwebende Gruppen, den berühmten Herkulanensischen vergleichbar, Mars und Venus, von Eroten begleitet, deren einer das Schwert, der andere das fragliche Skeptron trägt, und Hermes, durch die Fussflügel völlig sicher gestellt, mit einer mänadenhaften Figur im lustigen

Schwebetanz; 20) an der Hauptseite desselben Gebäudes interessante Vorstellungen von Geräthen und Thieren aus dem Isiscult: Hippopotamus, Schlange, Sistrum, Nilwassereimer, darüber Procession von Frauen zu der Göttin, im Tympanon: Verehrung des Kreuzes mit Nilwasser.

Privathäuser. Aus den neueren Ausgrabungen an der rechten Seite der Stabianerstrasse: 21) Ueber einem Backofen ist ein männlicher, bärtiger Kopf aus Stucco in ronde bosse angebracht. Er trägt auf dem Kopf eine halbeiförmige Mütze, von welcher wunderlicher Weise zwei rothgemalte Bänder an den Seiten herabfallen. Es ist anscheinend Hephaistos als Schutzpatron der Oefen. Ein ganz ähnlicher Kopf ist in dem Helbig'schen Atlas publicirt, auffallender Weise aber von dem Herausgeber übersehen worden. Beide sind hübsche Gegenstücke zu den auf Vasen vorkommenden Silensköpfen an Töpferofen und werden anmuthig durch das unter den Homerischen Gedichten sich findende kleine Poem *Κάμινος* illustrirt und ergänzt.

Fortunastrasse No. 26. 22) Dieses Haus zählt zu den interessantesten der in Frage stehenden. Eine Wand in diesem in den letzten Jahren entdeckten Hause hat im untern Felde die Darstellung des schlangenwürgenden Herakles, im Beisein des Alkmene, des Iphikles und der Athena. Ueber demselben ist ein anderes Frescogemälde: eine Looziehung von Seiten Jupiter's, der Nike und einer Bakchischen weiblichen Figur. Dieses Bild nun ist von leichten gemalten Arabesken umgeben, die wiederum neun kleine Vierecke mit Stuccoreliefs auf rothem Grunde umschlossen. Von einer Spur des Stucco

ist keine Rede mehr, nur die Umrisse sind erhalten; zwei der Stücke fehlen überhaupt ganz, zwei andere, je einen Vierfüssler darstellend, sind ohne Bedeutung, ein fünftes enthält eine liegende, wenig charakteristische Figur; um so belangreicher sind die letzten vier. a) Ganz nach einem Sarkophagrelief: links Achill sitzend, vor ihm knieet Priamos, dann der von zwei Trojanern geleitete Wagen mit den Lösungsgeschenken, und nun rechts auf demselben Bilde Achill auf seinem Wagen, den Leichnam des Hektor schleifend. Leider ist gerade das Gegenstück hierzu verloren. b) Kentaur enteilend, ein jammervoll sich gebehrdendes Wesen im Arm, ein Mann eilig hinterher, wohl die Nessusgeschichte, rechts aber fünf satyreske Gestalten, meist in verwunderten oder schreckvollen Stellungen und Gebehrden ihren Antheil an der Scene kundgebend, während jedoch einer der Genossen, schon wieder seiner Lieblingsbeschäftigung nachgehend, ein schönes Mädchen aufdeckt. Als Pendant c) ist die ebenfalls etwas grotesk aufgefasste Scene des einen Gefährten verspeisenden Polyphem dargestellt. 'Odysseus sucht die andern zu beruhigen, deren Angst in der wunderlichsten Uebertreibung sich malt; einer derselben schiesst sogar einen Purzelbaum. Die vierte Scene ist eine Flucht eines Mädchens vor einem sie stürmisch verfolgenden Manne. Dank der trefflichen Donner'schen Zeichnungen wird mir die völlige Entzifferung gelingen.

Schlangen. 23) Auch für die Darstellung dieser heiligen Thiere hat man mehrfach den Stucco verwandt; beachtenswerth ist, dass diese nicht wie die gemalten in gewaltigen Schwingungen der Schwänze sich verlieren, sondern in Kreise gelegt sind, etwa einem Kringel ver-

gleichbar. Eine derselben ist von einem rothgemalten runden Felde umgeben, welches wiederum ein prächtiger grosser Eichenkranz mit Eicheln in hochreliefirtem Stucco umgiebt.

Museum zu Neapel. Nur von den mythologischen Stoffen will ich einige nennen: 24) Hylas und eine Nymphe; dieselbe Ruhe wie auf No. 1. 25) Herakles und Hesione. 26) Artemis und Aktaeon. 27) Hermes, einem kauernden Weibe gegenüber, dem Eroten zureden. 28) Pegasus weidend, mit einer Nymphe. 29) Eros auf Amphora segelnd. 30) Trunkener zottiger Silen von Satyrn unterstützt. Ferner vielleicht 40 Medaillons mit Bakchantinnen, Kentauren, Satyrn u. s. w.

Im Ganzen habe ich hier wohl drei Dutzend Häuser gefunden, die noch jetzt figürliche Stuckreliefs enthalten. Auf die einfachen vegetabilischen und phantastischen Ornamente, die nicht aus freier Hand ausgeführt, sondern in Formen ausgepresst sind, und deren Gestalt sich in verschiedenen Variationen sehr vielfach wiederholt, konnte ich natürlich keine Rücksicht nehmen.«

Möge es Herrn Gaedechens nicht an der zur Ausführung seines Unternehmens nöthigen Unterstützung fehlen! An einem umfassenden gründlichen Werke über Stuccoreliefs gebricht es gänzlich. Das letzte Beachtenswerthe, was über Arbeiten dieser Art geleistet ist, betrifft bekanntlich die Reliefs in Gräbern der via latina, welche in den Schriften des archäologischen Instituts zu Rom seit dem J. 1858 besprochen und abbildlich mitgetheilt sind. Die auf ein anderes Grab in der Umgegend von Rom bezügliche ältere Schrift: Stucchi figurati esistenti in un antico sepolcro fuori delle mura di Roma pubbl. da

Giov. Erm. Cabott, Rom CIƆ. IƆCC. XCV, bringt abgesehen von den Abbildungen nichts besonders Belehrendes. Zu Winckelmann's Zeit galten die Stuccaturen in einem Bade zu Bajae für besonders beachtenswerth, vgl. Werke I, S. 421, V, S. 96 der ältern Dresden. Ausg. Ausserdem sind von entsprechenden Werken schon früher die in der Villa Hadrians bei Tivoli berücksichtigt, aber nicht genau genug.

F. Wieseler.

Bemerkungen über die Differentialgleichung einer Art von Curven auf Flächen.

Von

A. Enneper.

In den »Comptes rendus« Nr. 12, Sept. 1871, (t. LXXIII. p. 732) hat Darboux die Differentialgleichung der Curven auf einer Fläche entwickelt, für welche die osculatorischen Kugelflächen in jedem Puncte die Fläche berühren. Für ein orthogonales Coordinatensystem findet sich die folgende Gleichung aufgestellt:

$$3\frac{d^2s}{ds}=\frac{2\Sigma d^2x\, d\frac{dF}{dx}+\Sigma dx\, d^2\frac{dF}{dx}}{\Sigma dx\, d\frac{dF}{dx}},$$

wo $F=0$ die Gleichung der Fläche ist, ds bedeutet das Bogenelement, das Zeichen Σ bezieht sich auf die drei orthogonalen Coordinaten x, y, z. Man gelangt unmittelbar zu der obigen Diffe-

rentialgleichung, indem man eine Kugelfläche, welche eine gegebene Fläche berührt, der Bedingung unterwirft, mit der Curve vier Puncte gemein zu haben. In der obigen Gleichung treten die geometrischen Bedeutungen der einzelnen Terme nicht hervor, es ist daher nicht ohne Interesse die betreffende Differentialgleichung in anderen Formen darzustellen, welche unmittelbar gestatten, die betreffenden Curven mit einigen andern Curven vergleichen zu können.

Die Coordinaten x, y, z eines Punctes einer Curve auf einer Fläche seien Functionen einer Variabeln t. Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$p' = \frac{dp}{dt}, \quad p'' = \frac{d^2p}{dt^2},$$

wo p eine Function von t ist. Das Bogenelement der Curve sei ds, ferner seien s', s'' die Differentialquotienten von s nach t. Die Winkel, welche die Normale im Puncte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, sind durch a, b, c bezeichnet.

Man setze nun zur Abkürzung:

$$1)\; S = -\left(\frac{x'}{s'}\frac{d\cos a}{dt} + \frac{y'}{s'}\frac{d\cos b}{dt} + \frac{z'}{s'}\frac{d\cos c}{dt}\right),$$

$$T = \frac{1}{s'^3}\begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'', \end{vmatrix},$$

$$H = \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x', & y', & z' \\ \frac{d\cos a}{dt}, & \frac{d\cos b}{dt}, & \frac{d\cos c}{dt} \end{vmatrix}.$$

Legt man durch die Tangente der Curve und die Normale zur Fläche im Puncte (x, y, z) eine Ebene, so ist $\frac{S}{s'}$ der reciproke Krümmungshalbmesser des Normalschnitts. Die Quantität $\frac{T}{s'}$ ist der reciproke geodätische Krümmungshalbmesser, d. h. der Krümmungshalbmesser der planen Curve, in welche die primitive Curve übergeht, durch Abwicklung der developpabeln Fläche, gebildet aus den berührenden Ebenen längs der Curve.

$T = 0$ ist die allgemeine Differentialgleichung der geodätischen Linien, durch das Verschwinden von H sind die Krümmungslinien einer Fläche definirt. Ist ϱ der Krümmungshalbmesser, r der Torsionsradius im Puncte (x, y, z) einer Curve auf der Fläche, so hat man:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dt} = \sqrt{S^2 + T^2},$$

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{ST' - S'T}{S^2 + T^2} + \frac{H}{s'}.$$

Berührt die osculatorische Kugelfläche einer Curve die Fläche auf welcher die Curve liegt, so ist:

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dt}T + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}S = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass der Halbmesser der osculatorischen Kugelfläche gleich dem Krümmungsradius des Normalschnitts ist, welcher durch die Tangente der Curve geht, eine Eigenschaft, welche auch zur Definition der Curve dienen kann. Führt man für ϱ und

r ihre Werthe ein, so nimmt die Differentialgleichung folgende Form an:

$$-S' + \frac{Ss''}{s'} + \frac{1}{s'}TH = 0,$$

oder auch:

$$2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{S}{s'}\right) = \frac{TH}{s'^2}.$$

Man findet sehr leicht durch Multiplication der Deserminanten T und H:

$$3) \quad TH = x''\frac{d\cos a}{dt} + y''\frac{d\cos b}{dt} + z''\frac{d\cos c}{dt}$$
$$- \left(x'\frac{d\cos a}{dt} + y'\frac{d\cos b}{dt} + z'\frac{d\cos c}{dt}\right)\frac{s''}{s'}$$

Mit Hülfe dieser Bemerkung ergiebt sich ohne Schwierigkeit die von Darboux gegebene Gleichung.

Sieht man die Coordinaten x, y, z als Functionen zweier Variabeln u und v an, so lassen sich in den Gleichungen 1) und 3) die rechten Seiten leicht in Function von u und v und der Derivirten dieser Quantitäten darstellen. Für den allgemeinen Fall nimmt die Gleichung eine ziemlich weitläufige Form an, es ist hierbei indessen eine bemerkenswerthe Thatsache, dass, wenn man die Gleichung 2) in der Form schreibt:

$$4) \qquad 3\frac{d}{dt}\left(\frac{S}{s'}\right) = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{S}{s'}\right) + \frac{TH}{s'^2},$$

und rechts die Differentiationen ausführt, auf der rechten Seite nur die ersten Differentialquotienten von u und v nach t vorkommen. Um eine einfache Anwendung der Gleichung 4) zu

geben, seien u und v die Argumente der Krümmungslinien, r', r'' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser, θ der Winkel, welchen die Curve mit der Tangente des Hauptschnitts bildet, dessen Krümmungshalbmesser r' ist und für welchen u allein variiren möge. Ist dann:

$$E = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2,$$

so lässt sich die Gleichung 4) auf folgende Form bringen:

$$5)\quad 3s'^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos^2\theta}{r'} + \frac{\sin^2\theta}{r''}\right) = Eu'^3\frac{d}{du}\frac{1}{r'}$$

$$+ 3Eu'^2v'\frac{d}{dv}\frac{1}{r'} + 3Gu'v'^2\frac{d}{du}\frac{1}{r''} +$$

$$Gv'^3\frac{d}{dv}\frac{1}{r''},$$

wo:

$$s'^2 = Eu'^2 + Gv'^2$$

$$\tang^2\theta = \frac{Gv'^2}{Eu'^2}.$$

Wendet man die Gleichung 5) auf die Ellipsoidfläche an, so erhält man das von Darboux gefundene Resultat. Mit derselben Leichtigkeit lässt sich die Gleichung 5) auf das elliptische Paraboloid anwenden. Ist für eine Fläche zweiten Grades das Krümmungsmaass positiv, so hat die Curve die characteristische Eigenschaft, dass der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts, wel-

cher die Tangente der Curve enthält, proportional ist der vierten Wurzel aus dem Producte der beiden Hauptkrümmungshalbmesser. Verschwindet in der Gleichung 4) oder 5) jede der beiden Seiten, so erhält man die Differentialgleichung dritten Grades der Curve der über osculirten Normalschnitte, d. h. einer Curve, welche die Eigenschaft hat, dass der Normalschnitt durch eine ihrer Tangenten mit seinem Krümmungskreis einen Contact höherer Ordnung hat. Diese Curven, welche zuerst von Transon (Journ. de Math. t. VI. p. 191) und später von de la Gournerie (J. d. M. t. XX. p. 145) erwähnt sind, bilden also einen besondern Fall der Curven definirt durch die Differentialgleichung 2).

Nimmt man allgemein:

$$\frac{S}{s'} = \frac{\cos^2\theta}{r'} + \frac{\sin^2\theta}{r''}$$

constant, so verschwindet nach 2) T oder H, d. h. die Curve ist eine geodätische oder eine Krümmungslinie. Für eine Krümmungslinie kann man in 5) einfach $u' = 0$ oder $v' = 0$ nehmen, dann ist entweder r'' unabhängig von v oder r' unabhängig von u. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Berühren die osculatorischen Kugelflächen einer Curve die Fläche auf welcher die Curve liegt, soll die Curve gleichzeitig Krümmungslinie sein, so ist die Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche, von variabelem Radius, deren Mittelpunct eine beliebige Raumcurve beschreibt.

Verschwinden in der Gleichung 2) S und T gleichzeitig, so ist eine der asymptotischen Linien einer Fläche auch kürzeste Linie derselben, die Fläche ist dann windschief. Dass die Genera-

tricen einer solchen Fläche der Bedingung 2) Genüge leisten müssen leuchtet von selbst ein, überhaupt eine Gerade, welche auf einer Fläche vorkommen kann.

Für eine cylindrische Fläche lässt sich die Gleichung 2) unmittelbar integriven. Sei P ein Punct einer festen Curve C, deren Ebene zu den Kanten der Cylinderfläche senkrecht ist. Bezeichnet man durch $d\sigma$ das Bogenelement und durch R den Krümmungshalbmesser von C im Puncte P, so ist:

$$v = \beta + \int \sqrt{\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\, d\sigma,$$

wo v die Distanz eines Punctes der Curve vom Puncte P ist, unter Voraussetzung, dass beide Puncte auf derselben Kante liegen; α und β sind Constanten.

Zu interessanten Anwendungen, welche hier übergangen werden mögen, giebt die sogenannte Cyclide Veranlassung, wenn in der Gleichung 5) r' nur von v und r'' nur von u abhängt dann ist θ constant. Die weiteren Entwicklungen für die verschiedenen Formen dieser Fläche vierten Grades lassen sich einfach mittelst der Gleichungen führen, welche sich auf Seite 258 u. f. der Nachrichten v. d. G. d. W. angemerkt finden.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

August, September, October 1871.

(Fortsetzung.)

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Nr. 7—10. Wien 1871. 8.

Archives du Musée Teyler. Vol. III. Fasc. 2. Harlem 1871. 8.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXV. Hft. 1. 2. Leipzig 1871. 8.
Dr. Richard Gosche, wissenschaftlicher Jahresbericht über die morgenländischen Studien. 1862—1867. Hft. 1. Leipzig 1871. 8.
Archiv des historischen Vereins für Unterfranken und Aschaffenburg. Bd. XXI. Hft. 1 und 2. Würzburg 1871. 8.
Tijdschrift voor Indische Taal-Land- en Volkenkunde. Deel XIX. Zevende Serie. Deel 1. Aflev 1 en 2. Aflev 3. Aflev 4 en 5. Zesde Serie. Deel 1. Aflev 6. Batavia 1869. 70. 8.
Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel VII. 1869. Nr. 2. 3. 4. Deel VIII. 1870. Nr. 1. 2. Batavia 1869. 70. 8.
Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider; Aaret 1870. Nr. 3. 1871. Nr. 1. Kjöbenhavn 1871. 8.
C. Paludan-Müller, Studier til Danmarks Historie i det 13de Aarhundrede. Ebd. 1871. 4.
Jahrbücher der Königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. Neue Folge. Hft. VI. Erfurt 1870. 8.
L. F. Schoemann, Griechische Alterthümer. Bd. I. Berlin 1871. 8.
— Opuscula Academica. Vol. IV. Ebd. 1871. 8.
Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. 2de reeks. D. 3. Utrecht 1870. 8.
Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. Bd. 2. Hft. 3 und 4. Danzig 1871. gr. 8.
Halley's Magnetic Chart.
56. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden. 1870. Emden 1871. 8.
Archives Néerlandaises. T. V. 4me, 5me livraison. T. VI. 1ère, 2ème. 3ème livraison. la Have 1870. 71. 8.
Laatste Lijst van Nederlandsche Schildvleugelige Insecten. Harlem 1870. 4.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

29. November. № 23. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Beiträge zur höheren Sprachwissenschaft

von

H. Ewald.

II[1]).

Ein Hauptheil aller fruchtbaren Sprachwissenschaft besteht dárin die Urantriebe und Urstoffe aller Wortbildung richtig zu fassen und in ihrer weiteren Bewegung genau zu verfolgen. Solche Sprachen welche überhaupt Wortbildung besitzen, können ein Gefühl haben dem Sinne der Wurzel mit ihrer bestimmten Bedeutung oder auch eines schon gegebenen Wortes durch eine neue Fassung eine bestimmtere Bedeutung zu geben: wir nennen dies, wo es eintritt, einen der Urantriebe der Wortbildung, und die durch die neue Fassung bedingte Veränderung der Laute einen Urstoff mit welchem dann die Sprache bei ihrer weiteren geschichtlichen Bewegung wie mit allen ihren Stoffen frei walten kann. Alle solche Urantriebe und Urstoffe welche einer einzelnen Sprache oder auch, da man hier sogleich

1) Den ersten Beitrag s. oben Stück 11 vom 21. Juni d. J.

bis in die Urzeiten aller Sprachbildung zurückgehen kann, einem Sprachstamme zu Gebote stehen, richtig zu erkennen, sie in ihrer nicht sehr grossen Zahl zusammenzustellen und jeden von dem ersten erkennbaren Anfange an durch alle die folgenden Wechsel und neuen Gestaltungen genau zu verfolgen, ist von hoher Wichtigkeit wenn man allmälig eine vollkommnere und fruchtbarere Sprachwissenschaft gründen will. Es kommt dies zuletzt auf den in den Sprachwissenschaftlichen Abhandlungen als so wichtig hervorgehobenen Begriff der Sprachmächte zurück: ein Urantrieb und ein ihm entsprechender Urstoff bilden zusammentreffend eine Urmacht, da die Macht nur in einem ihr freistehenden Stoffe walten kann.

Eine dieser Sprachmächte ist die Verdoppelung sei es der Wurzel oder des Wortes, deren allgemeine Bedeutung sich von selbst leicht ergibt aber dann in der einzelnen Anwendung durch neue feinere Lautunterschiede selbst wieder sehr verschieden werden kann. Sprachen welche eine nur wenig fortgeschrittene Wortbildung haben, können nur das Wort selbst verdoppeln. Die mittelländischen Sprachen dagegen denen man nach den unter uns heute noch viel zu sehr herrschenden Vorurtheilen gewöhnlich die höchste Wortbildung zuschreibt, können zwar die Wurzel selbst verdoppeln und erzielen durch die neuen Wechsel welche in die Verdoppelung einspielen die mannichfaltigsten feineren Unterschiede der Bedeutung welche sie zu tragen fähig ist: allein weil die Wurzel in ihnen ursprünglich nur eine in sich festgeschlossene Lauteinheit (éine Sylbe) bildet, so vermannichfaltigt sich die Verdoppelung bei ihnen nur in sich selbst, nicht in der Wurzel. Ganz anders die

Semitischen Sprachen. Da die Wurzel in diesen wesentlich ganz anders als in jenen gebaut ist, immer aus drei festen Lauten bestehen muss[1], aber diese drei keineswegs eine in sich geschlossene Lauteinheit (oder nur éine Sylbe) zu bilden brauchen, so kann die Verdoppelung bei ihnen in die einzelnen Laute der Wurzel selbst eindringen und sich nach diesen vermannichfachen. Was also sonst die Eigenthümlichkeit des Semitischen ist, innere Wortbildung statt der im Mittelländischen herrschenden äusseren, das vollzieht sich auch hier: und dadurch erreicht das Semitische zugleich eine Feinheit und Schärfe der Wortbildung welche man in anderen Sprachstämmen umsonst sucht. Umgekehrt aber ist auch nichts ein so deutlicher Beweis dáfür dass das Semitische ganz wesentlich auf diesem so völlig eigenthümlichen Wurzelbaue beruhet, als gerade diese gesammte Art wie sich die Verdoppelung der Wurzel in ihm bildet. Sie kann sich nämlich, da die Verdoppelung des ersten der drei Wurzellaute als bei einer inneren Wortbildung meist von selbst wegfällt[2], in drei möglichen Weisen bilden: 1) durch Wiederholung der beiden letzten Wurzellaute, wie חֲמַרְמַר; besteht aber der mittlere Laut der Wurzel nur

1) Möchte doch endlich das Vorurtheil aufhören dass die Wurzel im Semitischen auch aus bloss zwei Lauten bestehen könne wie in dem Mittelländischen und anderen Sprachstämmen. Alles was man dafür anführt, beruhet auf Täuschung. Vgl. darüber zuletzt die Gel. Anz. 1871 S. 1379 f.

2) Möglich wäre von einer Wurzel זרק allerdings die Verdoppelung זַרְזְרַק oder kürzer זָזְרַק: allein das wäre die Verdoppelung der mittelländischen Sprachen, von deren Art sich das Semitische eben von vorne an entfernte. Nur ganz versprengt kommt im Semitischen eine solche Bildung weiter verkürzt vor *SL.* §. 120 *a.* 157 *d.*

in einem langen Vocale in der Mitte oder in einer Verdoppelung des letzten, so verdoppeln sich wegen der verhältnissmässigen Schwäche dieser Laute die beiden welche ohne sie unterschieden bleiben, sodass in diesem Falle auch der erste Wurzellaut sich wiederholt, wie פְּרַפֵּר von einem פּוּר oder פַּר d. i. פַּרְרְ[1]). — 2) Der dritte verdoppelt sich wie in רַעֲנָן; 3) der zweite Wurzellaut, wie in כַּתֵּב.

Nun erhellet leicht von selbst dass nach den drei so möglichen Arten von Verdoppelung die nähere Bedeutung der Verdoppelung selbst wechseln kann: und wir haben nicht die Absicht das schon sonst darüber Gesagte hier zu wiederholen. Nur die zweite unter ihnen ist noch weniger genau verfolgt: und wir wollen vorzüglich nur sie hier weiter betrachten, da sie seltener vorkommt und doch in ihrem Ursprunge ebenso wie in ihren weiteren Entwickelungen sehr wichtig ist. Wir bemerken jedoch dass wir hier nur Andeutungen geben, das übrige als durch die neuere Gründung einer Semitischen Sprachwissenschaft schon gegeben voraussetzen. — Gehen wir nun

I. von den starken Wurzeln aus, so scheint die Verdoppelung des dritten Wurzellautes nur im Arabischen häufiger, in allem übrigen Semitischen viel seltener zu sein; und wirklich erscheint sie jetzt im Aramäischen am seltensten. Allein in der That war sie in der Urzeit allen Semitischen Sprachen gemeinsam und gehört mit

1) Diese Vorstellung über den Ursprung dieser Stämme ist auch deswegen die richtigste weil sich diese uralte Bildung noch in der sonst unverständlichen Bildung [illegible] *Gr. ar.* §. 369 erhalten hat; darnach ist das *LB.* §. 121*a* näher zu fassen. Vgl. unten S. 599 f.

zu ihren ursprünglichsten Eigenthümlichkeiten: dies zeigen die zahlreichen und starken Spuren von ihr, welche sich auch in allen übrigen Sprachen dieses Stammes erhalten haben. Man kann sogar mit Recht sagen sie habe sich im Arabischen trotzdem dass sie in ihm noch so häufig ist hinsichtlich der Vocalaussprache weniger ursprünglich erhalten: in den übrigen tritt der Vocal welcher die Verdoppelung am deutlichsten hörbar macht, noch voll hervor, wie in רַעֲנַן und im Aethiopischen ፈርዘዘ፡ ፈርገገ[1]); im Arabischen ist er im Thatworte schon ausgefallen; aber dadurch der dritte Wurzellaut in sich selbst so stark verdoppelt dass er den gesammten Wortlaut allein auf sich hinzieht und der erste vocallos wird: اسود احمر. Man kann jene die gesperrte oder starke, diese die schwache Verdoppelung des Wurzellautes nennen. Aber im Arabischen findet sich die stärkere Verdoppelung wenigstens noch bei Selbstwörtern neben Thatwörtern, wie صمحدد neben اصمحد; wogegen جلبب wohl erst neu aus جلباب gebildet ist. Bedenkt man nun dass das Thatwort *LB*. §. 119*b* den Ton auf das Ende hinzieht, so erklärt sich wie dieser Unterschied im Arabischen entstehen konnte.

Was aber die Bedeutung dieser Verdoppelung betrifft, so lässt sich im Allgemeinen nur sagen sie drücke die Umbildung des Begriffes der Wurzel, welche die Verdoppelung des zweiten und

1) Man findet jetzt solche äthiopische Bildungen gesammelt in Bernh. Stade's Abh. über den Ursprung der mehrlautigen Thatwörter in der Geezsprache (Leipz. 1871) S. 28—32: jedoch sind dort die verschiedenen hier möglichen Fälle nicht deutlich geschieden.

dritten Wurzellautes gibt, nur etwas schwächer aus. Wie mannichfach diese Bedeutung in der weiteren Anwendung werden könne, ist in Bezug auf die stärkste Verdopplung in der *SL.* bereits erläutert, und würde uns hier zu weit führen wenn wir es auf diese schwächere angewandt durch alles Einzelne hindurch zeigen wollten. Wir bemerken jedoch hier, dass nach dem Sinne und Gefühle der ältesten Sprache schon jede stärkere oder dem Gegenstande tiefer anhaftende Eigenschaft durch diese Verdoppelung ausgedrückt werden konnte: von der anderen Seite aber auch der Begriff des Zertheilten Ungeraden und daher Kleinlichen oder Verächtlichen sich durch die Wiederholung ausdrücken liess. Scheint danach das Entgegengesetzte im Sinne dieser Bildung liegen zu können, so hebt sich diese Zweideutigkeit in jedem einzelnen Falle vollkommen auf, da schon die Bedeutung der Wurzel sich auf die eine oder andere Seite neigen kann. Dass die Bildung auch eine rein geistige Bedeutung annahm, wird unten erhellen: die rein geistige Anwendung eines Begriffes ist auch in diesem Falle erst das Späteste. — In solcher Weise muss der Gebrauch dieser Wortbildung gerade in den frühesten Zeiten sehr weitreichend gewesen sein. Es war die älteste Bildung für Wörter einer etwas stärkeren Eigenschaft: und da die reinen Begriffswörter (die *Abstracta*) überhaupt in allen Sprachen nicht die ältesten sind, so ergibt sich auch in diesem Falle, dass die Bildung für die Bezeichnung der an einer Person klebenden stärkeren Eigenschaft älter ist als die der entsprechenden Eigenschaft sofern sie ansich oder als blosser Begriff betrachtet wird. Wie ursprünglich und wie alt die Bildung sei, ergibt sich jedoch besonders wenn man be-

achtet theils welche alte Ueberbleibsel von ihr in den uns schriftlich erhaltenen Semitischen Sprachen noch zerstreut dasind, theils welche späteren und doch für unsre jetzt erhaltene Semitischen Sprachen schon sehr alte neue Bildungen allmälig an ihre Stelle traten.

Welche alte Ueberbleibsel von ihr schon in die für uns ältesten Semitischen Schriften hineinragen, ergibt sich aus den *LB.* §. 157 *a* gesammelten Beispielen. Man thut nämlich (wie ich hier verbessernd bemerke) am besten solche Begriffswörter wie גַּבְנֹן *Höcker* פַּארוּר שַׁפְרִיר תַּמְרוּר noch von eben dieser Bildung abzuleiten: sie sind Begriffswörter aus einem neu abgeleiteten activen Thatworte (daher mit *a* vorne) vermittelst des aus §. 153 *a* bekannten *û* oder *î* der letzten Sylbe ebenso gebildet wie تَصْنِيف [1]); und das denkwürdige ist nur dass diese Bildungen sich im Hebräischen so lange erhalten haben. Die

1) Aussprachen mit *a* wie רַעֲנָן, أَحْمَرُ sind die ursprünglichen, und das ă vor dem Ende ist nichts als der nächste Vocal überhaupt; eben dahin gehört das פִּרְחַח Ijob 30, 12. Dagegen sind Wörter wie das unten noch zu erwähnende פַּרְשֵׁז §. 141 *b* (welches Ijob 26, 9 doch am besten als *perf.* gilt) und [illegible] *zerstreuen* [illegible] *zerkrümeln* neu abgeleitete Thatwörter, wie sich solche auch im Aethiopischen viele finden. Die Bildung des تَصْنِيف, تَقْدِيم ist schon *LB.* S. 421 Anmerk. erklärt; und wie §. 160 S. 414 gezeigt ist dass Wörter wie מַקְהֵל, מַלְבּוּשׁ erst neue stärkere Bildungen sind, ebenso sind selbstverständlich Wörter wie תַּנְחוּם (denen bei ל״ה solche wie תַּכְלִית entsprechen) Begriffswörter neuer activer Bildung.

Ursache davon war aber gewiss der unwandelbare lange Vocal welcher die beiden Mitlaute der letzten Sylbe trennte. — Eine andere Stelle im Umkreise des Hebräischen Sprachgebietes an welcher sich deutliche Spuren dieser uralten Verdoppelung erhalten haben, bezeichnet die Bildung der Wörter אֲדַמְּים von אָדֹם *roth*, wie schon *LB.* §. 149*b.* 187*b.* weiter gezeigt wurde. Schon die Bedeutung leitet zu dieser Ansicht hin, wie das Arabische beweist[1]): dass aber die beiden Mitlaute hier schon zusammenfallen und die Verdoppelung selbst dann allmälig aufhört, kann nichts gegen den Ursprung aller so gebildeten Wörter beweisen.

Denn gerade das allmälige Verschwinden dieser uralten Art von Verdoppelung ist es was sich alle Semitischen Sprachen hindurch am breitesten verfolgen lässt und was für die gesammte Sprachgeschichte des Semitischen von hoher Bedeutung wird. Sie verschwindet aber im einzelnen auf sehr verschiedene Weise:

1. Sie kann allmälig sogar ohne Ersatz verschwinden: doch ist das seltener, da sie am nächsten doch nur so verschwindet dass wie in ähnlichen Fällen der Vocal vor dem ursprünglichen verdoppelten Mitlaute sich dehnt. So ist oben gezeigt dass es einen Stamm gab גְּבַנְ, welcher eine *runde Erhöhung* bedeutet: allein der *Käse* welcher in allen Semitischen Sprachen

1) Diese Verdoppelung des letzten Wurzellautes hat demnach nichts gemein mit anderen Arten derselben welche das Hebräische bei seiner eigenthümlichen Vocalaussprache liebt und die *LB.* §. 23 zusammengefasst werden. Auch dabei können dann feinere Unterschiede in der Bedeutung einfliessen, wie die stärkere Aussprache גְּאֻלָּה um das Selbstwort *Erlösung* von גְּאֻלָה als einfachem Mittelworte *erlöste* zu unterscheiden *LB.* §. 153*d.*

davon den Namen trägt, lautet im Hebräischen und Aramäischen schon גְּבִינָה, ܓܒܬܐ (für ܓܒܝܢܬܐ) mit langen Vocale; dass dieses *i* aber aus *u* entstand und das Wort ursprünglich גֻּבְנָה lautete, erhellet aus der weiteren Verkürzung die sich im Syrischen Mehrheitsworte ܓܘܒܢܐ *gubnê*, im Aethiopischen ጕብነት (aus *gubnat*) und im Arabischen جُبْن findet: allein nach dem Qâmûs ist für diese kürzeste arabische Aussprache offenbar nach mundartigem Wechsel nicht nur auch جُبُن sondern sogar dem in der *Gr. ar.* §. 249 bemerkten فُعُلّ entsprechend جُبُنّ noch möglich, welches letztere uns darnach noch ganz zu der ursprünglichen vollen Bildung zurückführt. Man kann aber danach auch die Verdoppelung in Fällen wie לְשַׁדִּי (*mein Saft*) LB. §. 147 *a* 255 *d* für eine ursprüngliche halten.

2. Ein gewisses Verschwinden der Urbildung ist es ferner schon wenn bei der starken Verdoppelung eine Art von Erleichterung der Aussprache eintritt. Vielfach ist das nach einander Schallen zweier ganz gleicher Mitlaute in den Sprachen allmälig für lästig befunden und die Aussprache demnach erweicht, wie namentlich auch die Geschichte der Verdoppelung zu Anfange des Wortes im Mittelländischen beweist. Dass etwas ähnliches auch hier wenn auch mehr zerstreut eintrat, ist bei näherer Ansicht unverkennbar. Der S. 591 schon erwähnte hebräische Stamm פַּרְשֵׁז hat allen Anzeichen nach nur die Laute פַּרְזֵן etwas gewechselt, da ihm das ebenfalls schon oben erwähnte Aethiopische ፈርዘዘ

der Bedeutung nach entspricht; und ebenso wechselt בּוֹשֵׁס nach *LB.* 121*a* mit בּוֹסֵס. Am denkwürdigsten ist hier die Auflösung des zweiten der beiden Mitlaute in einen blossen langen Vocal: dies können wir deutlich im Aethiopischen beobachten, denn nur so erklären sich leicht solche Bildungen wie ጸዐደወ *weiss werden* ein Wort welches schon als eine Farbe bezeichnend ganz hieher gehört, und ጸመሀየ *dürr werden.* Man nimmt richtig an dass der schliessende Mitlaut mit seinem vorigen Vocale *a* in den Doppellaut *ô* (dann *â*) oder *ae* zerschmolz, und dann daraus diese Bildungen für das *perf.* hervorgingen; und noch ein weiterer Beweis für eben diese Entstehung solcher Stämme wird beiläufig unten erwähnt werden. Hieraus erklärt sich nun auch die Bildung עֻלְפֶּה Hez. 31, 15 als dem häufigeren אֻמְלַל entsprechend, und die Syrische [illegible] *LB* §. 125*b.* Jenes עֻלְפֶּה ist freilich selbst ein jetzt nur einmal vorkommendes Wort, dessen Verbindung sogar zweifelhaft scheint. Ist es Einzelwort, so scheint das vorangehende Mehrwort עֲצֵי dazu nicht zu passen: allein obgleich bei Hezeqiel gerade im c. 31 dieses עֲצֵי oft wiederkehrt, so findet sich sonst bei ihm ganz in derselben Bedeutung und Verbindung auch עֵץ, wie 15, 2. 34, 27: die Wortverbindung kann also hier keine Schwierigkeit machen. Man könnte jedoch dafür עֻלָּפָה als das weibliche *perf.* von עֻלַּף in *pausa* lesen wollen: dagegen reicht zu bemerken hin dass עֻלַּף und הִתְעַלֵּף nur vom Verschmachten der Menschen, nicht der Bäume gesagt wird. Oder man könnte meinen das Wort sei ein weibliches Nennwort nach *LB.* §. 173*b*, und die Wortverbindung sei wie jene ebenfalls bei Gewächsen gebrauchte

הַכְּרָמִים סְמָדַר HL. 2, 15 nach *LB*. §. 296 *a* zu betrachten. Allein solche Redensarten von einzelnen Gewächsen sind zu eigenthümlich um sie auf einen ganz allgemeinen Begriff wie hier der des *Verschmachtens* ist überzutragen. Immer wird man demnach jenes עִלְּפָה welches die Massôra nicht ohne Ursache so auffallend punctirt haben kann, am besten für das *perf.* dieser seltenen Stammesbildung halten. Dass aber nicht wie bei einem ל״ה für das *perf.* עִלְּפָה gesprochen werden soll, erklärt sich wenn das Wort gar nicht von einem ל״ה abstammt sondern aus עלפף verkürzt ist. Vor allem muss man festhalten dass in den Zusammenhang der Worte durchaus nur das *perf.* passt [1]).

3. Aber das Denkwürdigste und Erfolgreichste was hieher gehört, ist dass die Sprache die Verdoppelung des letzten Wurzellautes durch ein Vorrücken des Lautes aufheben kann. Und wenn die Verdoppelung selbst dann nur in den mittleren vorrückt, so kann das noch als etwas alterthümlicheres gelten: es ist dies aber deutlich genug gerade im Hebräischen sehr oft geschehen, um das Eigenschaftswort welches sich ursprünglich durch die Verdoppelung des letzten bildete übrigens so unverändert als möglich in seinem Unterschiede zu erhalten. Man kann hieher die Fälle *LB* §. 155 *e* rechnen: als Beispiel werde hier nur גִּבֵּן *höckerig* aufgeführt, welches offenbar nach S. 593 aus einem früheren גִּבְנֵן zusammen gefallen ist. — Während diese Neubildung aber allen Anzeichen zufolge mehr dem Hebräischen eigenthümlich blieb, muss sich früh eine

1) Die besondere Schwierigkeit dieser einzelnen Sache mag an dieser Stelle die ausführliche Rede darüber entschuldigen.

noch viel einfachere festgesetzt haben welche endlich die bedeutsamste und gewichtigste in diesem gesammten Gebiete wurde. Die ganze Kraft der Verdoppelung hat sich in ihr, um aus dem Thatworte ein einfaches Eigenschaftswort neu zu bilden, durch ein mit Macht voran tretendes *a* ersetzt, welches vorne an die in ihre Urlaute aufgelöste Wurzel tretend nun das ganze Wort beherrscht und daher in der zweiten Sylbe einfach wiederlautet; wie أَحْمَرُ von أَحَمَّرُ. Diese in der *SL.* §. 162 *b.* weiter erklärte Bildung war nun zwar schon in jener alten Zeit möglich in welcher das Hebräische sich noch nicht vom Arabischen oder vielmehr dieses von jenem geschieden hatte; sie ist aber vollständig erst im jetzigen Arabischen am weitesten durchgeführt[1]). In diesem sind zunächst alle Eigenschaftswörter dieser Art durchgehends so gebildet, so dass die äusserst wenigen welche wie عُتُلّ nach S. 593 noch der alten Art folgen nur wie alterthümliche Ueberbleibsel aus einer früheren Zeit erscheinen: so entsprechen denn Wörter wie أَعْوَرُ, أَعْمَى, أَعْوَجُ solchen Hebräischen wie עִוֵּר, עִקֵּשׁ. Dann aber ist der Bildungstrieb noch einen gewaltigen Schritt darüber hinausgegangen, indem diese Bildung auch schon den rein geistigen Sinn jeder in bestimmtem Bezuge auf eine andere Person höheren Eigenschaft oder den *Elativ* (Comparativ und

1) Hierin liegt also zugleich ein wichtiger Beweis für den Satz, dass das Arabische keineswegs nach einem in unsern Tagen neu aufgefrischten Vorurtheile die älteste Semitische Sprache ist; und insofern kann diese kleine Abhandlung auch als ein weiterer Beitrag zu der neulich erschienenen Abhandlung des Unterzeichneten *über die geschichtliche Folge der Semitischen Sprachen* gelten.

Superlativ) ausdrückt, wie أَكْثَرُ je nach seinem Zusammenhange im Satze sowohl unser *maximus* als unser *maior* bedeuten kann. Damit hat das Arabische unter allen Semitischen Sprachen eine besondre Kraft und Zierde erlangt: aber es ist auch so einleuchtend als möglich dass es sich auch hierin nicht als die älteste sondern als die jüngste der alten Sprachen seines Stammes ausweist.

Allein wenn das Arabische in solcher Weise für reine Eigenschaftswörter die uralte Bildung fast ganz aufgegeben hat, so behält es sie für Thatwörter desto zäher fest, ja es zeigt darin noch eine besondere Fülle und Üppigkeit der Bildung: wobei wir noch einen Augenblick hier verweilen mögen, weil sich uns dabei eine ganz neue Reihe von Erscheinungen eröffnet die recht von der Urzeit her hierher gehören. Wenn die Verdoppelung des dritten Wurzellautes, wie oben gesagt, ursprünglich den Begriff einer stärkeren Eigenschaft darreicht, so ergibt sich freilich leicht dass dabei wie bei jeder Schilderung einer Eigenschaft eine mannichfache Steigerung denkbar ist; und eben diese Steigerung kann das Arabische und hier zugleich auch das Aethiopische noch mit einer rein urkräftigen Fülle und klaren Anschaulichkeit darstellen. Was alle übrigen Semitischen Sprachen wenigstens innerhalb dieser Wortbildung nicht mehr vermögen und was wir in unsern Sprachen nur durch Umschreibung annäherungsweise ausdrücken können, wird in diesen beiden Sprachen durch einen sehr einfachen Lautwechsel innerhalb der Stammesbildung erreicht. Bei jedem Stamme dieser Art von Verdoppelung kann der Vocal gedehnt werden, so dass اِحْمَرَّ im Arabischen einfach nur

die Steigerung von أحمر ist; welcher bestimmtere Sinn sich aber mit dieser Steigerung des Lautes verbinde, ist dann die weitere Frage. Im Aethiopischen dagegen, wo nach S. 589 die starke Verdoppelung noch herrscht, wiederholt sich der Laut noch voller: ጸወሀየየ neben dem S. 594 bemerkten einfacheren ጸወሀየ [1]). Es gibt aber manche Begriffe welche nur in dieser Steigerung sich festgesetzt haben: dann wechselt nicht mehr so einfach der kurze und lange Vocal, sondern der Laut drückt sich meist in einer vollen Doppelsylbe vermittelst eines dazwischen tretenden Lautes aus, wie اطمأنّ, اشمأزّ Arabs. Fâk. Chul. p. 7, 21. 33, 10, أصمكّ neben اصمأكّ, اصمألّ, mit stärkerem Laute اصمخدّ oben S. 589 اصمخرّ oder اصمخنّ Izzeddin's Vögel p. 43 vorl., wohin man auch Fälle wie اقشعرّ ziehen kann [2]). In solchen malerischen Bildungen thun es diese beiden Semitischen Sprachen allen anderen zuvor, obgleich schon jede in eigenthümlicher Weise; und nirgends zeigt sich so wie hier welche Fülle und welche Biegsamkeit aller Bildung sie von den Urzeiten her sich erhalten haben. Die weit früher zu Schriftsprachen aufs höchste ausgebildeten übrigen Semitischen Spra-

1) Dies ist demnach noch ein besonderer Grund die oben S. 594 erwähnte einfachere Bildung des Wortes gerade so wie dies oben geschah ihrem Ursprunge nach zu erklären.

2) In solcher Weise erklären sich am leichtesten alle diese verschiedenen Bildungen: und man thut überall am besten auch bei diesen entferntesten Spracherscheinungen auf ihren letzten Zusammenhang zu achten.

chen sind hierin schon wie zu fein und zu abgeblasst geworden.

II. Eigenthümlich ist aber hier wie sonst überall das Verhältniss der schwachen Wurzeln, zunächst derer welche zwischen zwei stärkeren Wurzellauten nur einen langen Vocal haben, und der mit diesen nahe verwandten deren zweiter und dritter Wurzellaut derselbe ist. Wir wollen uns hier jedoch nur kurz fassen, und daher

1. bemerken dass deren stärkere Verdoppelung nach dem schon oben S. 588 bemerkten durch die volle Wiederholung der zwei verschiedenen festen Wurzellaute oder des Anfanges und Endes der Wurzel erfolgt, wie חֲלְחַל, זַלְזַל, دَمْدَمَ, ቀጥቀጠ. Diese Bildungen entstammen der Urzeit aller Semitischen Sprachen, und stimmen im Wesentlichen noch in allen überein; über die besonderen Lautverhältnisse aber welche auch bei ihnen schon wechseln, wollen wir hier hinwegsehen.

2. Die Verdoppelung des mittlern Wurzellautes bildet bekanntlich bei starken Wurzeln recht eigentlich eine Art neuer und stärkerer Activstämme, und ist in allen Semitischen Sprachen ein von vorne an vorherrschender Activstamm, der insofern in geradem Gegensatze zu der oben besprochenen Bildung von stärkeren Eigenschaftswörtern durch Verdoppelung des dritten Wurzellautes steht: denn diese können nach S. 591 erst durch eine neue Wendung des Begriffes auch activen Sinn empfangen. Allein eben hier entwickeln die hier zu betrachtenden schwachen Wurzeln eine besondere Eigenthümlichkeit. Da der mittlere Wurzellaut kein Mitlaut ist, so verdoppelt sich statt seiner vielmehr

noch der letzte, und zwar in demselben rein activen Sinne welcher sonst der Verdoppelung des mittlern im Thatworte einwohnt: das active *a* mischt sich also mit einem *û* als mittlerm Wurzellaute, sodass קוֹמֵם שׁוֹטֵט von קוּם שׁוּט entsteht; eine Bildung welche dann auch auf die verwandten Wurzeln übertragen wird, wie גֹּלֵל von גַּל. Aber es ist unverkennbar dass dieselbe Bildung in der Urzeit sogar auch dann eintreten konnte wenn der mittlere Wurzellaut ein Hauch, der letzte aber ein schwacher ist, wie מַחֲוָה rein activ *schiessen* bedeutet. Wir haben wenigstens noch zerstreute Fälle dieser Bildung: und nach ihr steht הִשְׁתַּחֲוָה als das mildere *sich beugen* im Sinne von *huldigen* schon neben הִשְׁתּוֹחַח als dem viel stärkeren *sich schwer beugen* oder *verzweifeln* [1]). Auch sonst lässt sich nicht verkennen dass das Hebräische die starke Verdoppelung des dritten Wurzellautes in ihrer oben bemerkten Bedeutung vorzüglich nur hinter einem Hauchlaute bewahrt hat, wie נָאוָה, שַׁאֲנַן, רַעֲנָן [2]).

1) Vermittelt wird nämlich der Uebergang einer Wurzel ע״ו oder ע״ע in eine ל״ה auch ausserdem sehr stark durch alles das was *LB*. §. 121 *a* weiter auseinander gesetzt ist; wie sich sogar הִשֹּׁחָה als *niederbeugen* neben הֵשַׁח findet. — Man wird künftig auch in der Anlage der Wörterbücher auf solche wichtige Spracherscheinungen die Aufmerksamkeit hinrichten müssen.

2) Gab es nun ein Thatwort שַׂכְוָה gebildet wie מַחֲוָה, so kann sich die Frage erheben ob nicht das nur einmal Ijob 38, 36 vorkommende und in seiner Bildung einzigartig dastehende שֶׂכְוִי daraus zu erklären sei: es wäre dann ein Selbstwort derselben Bildung wie פְּרִי, und die Zurückziehung des Tones auf die erste Sylbe würde sich aus dem Gesetze *LB*. §. 119 *b* ergeben. Leider aber kennen wir bis jetzt keinen Stamm dieser Art mit starkem mittlerem Wurzellaute, so dass die *LB*. §. 178 f. über diese

3. Was jedoch hier zuletzt noch von grosser Bedeutung ist, ist dass solche Activbildungen wie sie eben bei שׁוֹטֵט, גֹּלֵל geschildert sind sich eigentlich nur im Hebräischen finden: in allen übrigen Semitischen Sprachen hat sich die Verdoppelung des zweiten Wurzellautes in jener activen Bedeutung schon durchgesetzt; und nur im Aethiopischen sind zwar Bildungen wie ቀወመ noch ungebräuchlicher, solche aber wie ተቀዉመ, ተሀወረ, ተሀወቀ schon sehr gewöhnlich, wie sich alle diese neueren Bildungen auch im späteren Hebräischen immer stärker durchsetzen. Hier hat man also eine sehr deutliche Eigenthümlichkeit durch welche sich das Hebräische als eine verhältnissmässig alterthümliche Sprache kundgibt: es gibt auch sonst solche Zeichen an ihm dass es verglichen mit dem Syrischen Arabischen und Aethiopischen welche uns ja so wie sie sind erst in viel späteren Schriften erscheinen, aus einem viel älteren Zeitalter abstammt. Nur ist dies alles näher betrachtet nicht anders als in jenem Sinne zu verstehen in welchem alles was hieher gehört in der Abhandlung *über die geschichtliche Folge der Semitischen Sprachen* erläutert ist.

III. Das wichtige Ergebniss der Betrachtung aller dieser Erscheinungen ist demnach dass die feinste und (wie man mit Recht auch sagen kann) geistigste Bildung die späteste ist, aber dann die umfassendste und gewichtigste wird. Die Verdoppelung der Semitischen Wurzel hat sich am frühesten in die zwei Arten geschieden dass neben der stärksten eine schwächere sich ausbildete nach welcher nur der letzte der drei

seltsame Wortbildung gegebene Ansicht noch immer ihr Recht haben kann.

Wurzellaute verdoppelt wurde, sehr ähnlich wie im Mittelländischen ursprünglich eine stärkere Verdoppelung der Wurzel neben einer schwächeren steht [1]), nur dass in diesem gerade umgekehrt der Anfangslaut verdoppelt wurde. Erst dann zog sich die Wortbildung mit einem neuen (wenngleich seit einer für uns uralten, schon vor aller uns bekannten Semitischen Sprachart liegenden) Zeit auch auf den mittlern der drei Wurzellaute hin, um diesen in sich selbst zu verdoppeln; und es entstanden Bildungen von Nennwörtern wie die oben erwähnten אֻלָּם, נֵּר von der einen und solche wie גִּבּוֹר, עִזּוּז von der andern Seite, vor allem aber die Thatwörter der stärkeren Handlung wie כִּתֵּב, denen dann wieder solche Nennwörter des Thäters wie טַבָּח und צַיָּד auf dem Fusse folgten; und indem diese dem Laute nach feinste, ihrer neuen thätigen Bedeutung nach aber geistigste Verdoppelung des mittelsten Wurzellautes immer herrschender wurde, nahm die des dritten immer weiter ab. Eben diesen Fortschritt der Abnahme einer Verdoppelung des dritten Wurzellautes können wir geschichtlich noch genau im Einzelnen verfolgen, wie dies oben geschehen ist.

Wir können damit zu dém zurückkehren womit wir diese kleine Abhandlung begannen. Eine vollkommnere Erkenntniss schon der einzelnen Sprache und weiterhin auch des einzelnen Sprachstammes wie viel mehr aller Sprachen ist

1) wie am deutlichsten das Sanskrit in der Bildung seiner gewöhnlich so genannten *Intensivverba* neben den leichteren Arten von Verdoppelung der Wurzel zeigt. Der feinere Wechsel welcher dann auch in dieser leichtern Art von Verdoppelung im Mittelländischen durchdrang, lässt sich am besten mit dem jüngsten und feinsten Wechsel in der semitischen Verdoppelung vergleichen, wie er oben beschrieben ist.

nur dadurch möglich dass man die einzelnen Urmächte der Sprache genau kennt und sicher verfolgt, um danach zu begreifen, wie sie sich in der geschichtlichen Sprache mischen und gegenseitig bedingen, und welche wirkliche Erscheinung in jedem Worte auf die eine oder die andere dieser ihrer Zahl nach allerdings nicht übervielen aber desto wichtigeren Sprachmächte zurückgehe. Eine solche Urmacht ist auch die Verdoppelung von Wurzellauten: und von welcher Art diese sei und wie mannigfach ihr Gang, das näher einzusehen ist im Semitischen unentbehrlich, verbreitet aber auch auf andere Sprachstämme ein willkommnes Licht, und kann für die allgemeine Sprachwissenschaft einen lehrreichen Beitrag geben.

Erklärung.

Die neue Ausgabe von Gauss' Theoria motus corporum coelestium, welche so eben bei Perthes in Gotha erschienen und als siebenter Band der Gauss'schen Werke bezeichnet so wie mit der nachgebildeten Vignette ausgestattet ist, könnte den Schein erwecken, als sei sie ein Theil der von der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen veranstalteten Ausgabe dieser Werke. Die königl. Gesellschaft sieht sich dadurch zu der Erklärung veranlasst, dass die Bezeichnung dieser Einzelausgabe als »Gauss' Werke. Band VII« ohne ihre und der Erben Genehmigung gewählt ist und dass sie keinen Theil der im Erscheinen begriffenen, von der königl. Gesell-

schaft der Wiss. herausgegebenen Gesammtausgabe von Gauss' Werken ausmacht.

Göttingen, im November 1871.

Die königl. Gesellschaft der Wissenschaften.

Universität.

Promotionen der philos. Fakultät.

Die unter dem Decanat des G. Hofr. Hoeck vom 1. Juli 1870 bis dahin 1871 vollzogenen Promotionen sind:

A. Früher beschlossene, jetzt vollzogene:

1. v. Willemoes-Suhm. 2. Gieseke. 3. Nölle. 4. Funke. 5. Blyth. 6. Maue. 7. Post. 8. Siegel. 9. Kühlewein. 10. Woolls.

B. Beschlossene und vollzogene Promotionen:

1) Am 5. August, Julius Alsberg aus Arolsen. Dissertation: Ueber die Stellung der Wasserstoffatome im Benzol.

2) Am 6. August, Ludwig Heinrich Friedburg aus Hamburg. Diss.: Ueber die Entstehungs-Bedingungen der Orthomonobrombenzoesäure.

3) Am 12. August, Ottocar Johannes Hóman aus Ungarn. Diss.: De Coniunctivi et optativi aoristi usu Sophocleo.

4) Am 17. August, Jacob Roeters de Lennep aus Amsterdam. Diss.: De Ortho-Monobrom-Sulfo-Benzoesäure.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

29. November. № 24. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Inschrift aus dem Tempel des Zeus Agoraios in Selinus.

Von

Hermann Sauppe.

(Mit einer Tafel.)

Die *Rivista Sicula di scienze, letteratura ed arti* in Palermo enthält in ihrem Augustheft d. J. p. 201—207 einen Aufsatz des Professor Gregorio Ugdulena in Florenz über eine bei Ausgrabungen in Selinus im Frühling d. J. aufgefundene Inschrift. Ihre Wichtigkeit veranlasste mich Herrn Dr. Adolf Holm in Lübeck, der jenem Aufsatz zufolge eine Photographie von ihr besass, um Mittheilung derselben zu ersuchen. Umgehend hatte er die Güte meiner Bitte zu entsprechen und wenige Tage später erhielt ich auch durch die Freundlichkeit des Herrn Dr. Saverio Cavallari in Palermo, des jetzigen Direttore delle Antichità di Sicilia, die im Oktober 1871 zu Palermo erschienene Nummer IV des *Bullettino della commissione di antichità e belle arti di Sicilia*, in der sich p. 24—34 ein Aufsatz von Dr. Holm über diese *Iscrizione trovata nel tempio grande di Selinunte*

findet. Zu ihr gehört auch die erwähnte treffliche, von Cavallari besorgte, Photographie. Die hier beiliegende Tafel giebt links eine Nachbildung derselben.

Nach dem Fundbericht Cavallaris (Bullett. p. 23) bildete der Block von Tuffkalk, in welchen die Inschrift eingehauen ist, einen Theil der linken Ante am Eingang zu dem Allerheiligsten, das sich innerhalb der Cella des Tempels G auf dem Plane der Ruinen von Selinus bei Serradifalco oder bei Schubring (in diesen Nachrichten 1865, 15) befand. Cavallari nemlich unternahm es, im Auftrag der Commissione di antichità e belle arti in Sicilia im Februar d. J. neue Ausgrabungen in dem Ruinenberg zu machen, in den dieser grösste und glänzendste Tempel Selinunts, einer der grössten des Alterthums überhaupt, verwandelt ist. Er fand hier, indem er der Axe des Tempels folgend in die Mitte vorzudringen suchte, auf einer quer durch die Cella laufenden 1,02^m^ tiefen Stufe eine Reihe von 4 Säulen, die unten durch eine niedrige Mauer verbunden sind, so aber dass zwischen den beiden mittleren ein Eingang frei bleibt. An diese Stufe schliesst sich eine zweite 0,65^m^ tief, zwischen der und der Mauer des Allerheiligsten ein weiterer Raum von ebenfalls 0,65^m^ Tiefe liegt. Der Stein mit der Inschrift, wie er aus acht verschiedenen, nach und nach aufgefundenen Stücken zusammengesetzt werden konnte, war der vierte Block der Ante, unter ihm einer von 0,90^m^ und drei von je 0,435^m^ Höhe, er selbst ebenfalls 0,435 hoch und 1,40 lang, dick 0,60. Die Schrift also, auf der Langseite des Blockes, stand etwa 2,40 über dem Boden. Zu beiden Seiten der Inschrift sind leere Streifen, der rechts 0,165 und der links 0,150 breit.

So wunderbar die Fassung der Inschrift ist, so wenig kann doch über die ersten sieben Zeilen ein Zweifel sein. Denn dass am Ende von Z. 3 und Anfang von Z. 4 *Ποτειδᾶνα* oder *Ποσειδᾶνα* gestanden habe, haben Ugdulena und Holm, die überhaupt in diesen Zeilen fast überall übereinstimmen, eben so richtig erkannt, als dass Z. 4. 5 *Ἀθαναίαν* ergänzt werden müsse: jenes sichern das noch erkennbare *Π* in Z. 3 und *E . . . NA* in Z. 4, dies das noch erkennbare *Θ* in Z. 4 und *N . . AN* in Z. 5. Ob die Inschrift wirklich *Ποτειδᾶνα* oder *Ποσειδᾶνα* gehabt habe, das natürlich lässt sich nicht sagen, aber *E* d. h. *ει* steht fest, so dass sich die Zweifel von Ahrens dial. dor. p. 245 erledigen und die handschriftliche Lesart bei Herodianos *π. μον. λέξ.* 2 p. 91,6 Lenz. gesichert wird. Auch das ist ungewiss, ob *Ἀθαναίαν* oder *Ἀθανάαν* das Richtige sei, für jenes aber spricht sowol der Raum, der zwei Buchstaben zu fordern scheint, als die Inschrift, die Cavallari 1865 im sogenannten Heraklestempel auf der Burg von Selinunt fand (Bullett. dell Inst. di Corrisp. archeol. 1868 p. 88):

ΑΠΟ]ΛΟΝΟΣΠΑΙΛ[Ν]ΟΣ[ΚΑΙ
ΑΘ]ΑΝΑΙΑΣ.

Ferner kann nicht zweifelhaft sein, dass Z. 5 *Μαλοφόρον* von Holm und Ugdulena richtig erkannt und auf Demeter gedeutet sei. Dafür zeugt die von beiden angeführte Stelle des Pausanias 1. 44, 3: *ἐς δὲ τὸ ἐπίνειον, καλούμενον καὶ ἐς ἡμᾶς ἔτι Νίσαιαν, ἐς τοῦτο κατελθοῦσιν ἱερὸν Δήμητρός ἐστι Μαλοφόρου· λέγεται δὲ καὶ ἄλλα ἐς τὴν ἐπίκλησιν, καὶ τοὺς πρώτους πρόβατα ἐν τῇ γῇ θρέψαντας Δήμητρα ὀνομάσαι Μαλοφόρον.* Also von Megara, der Mutterstadt, war dieser Dienst der *Δημήτηρ Μαλοφόρος* über Hybla

nach Selinus gekommen. Anders gedeutet ist der Name von dem Schol. B zu Hom. Il. *I*, 542 *ἄνθεσι μήλων*] *ἐξ ἑνὸς τὸ πᾶν „καὶ μηλέαι ἀγλαόκαρποι“* (Od. 7, 115). *μηλοφόρον δὲ καὶ τὴν Δήμητραν καλοῦσιν.* Und dafür spricht auch Callimach. h. in Cerer. 137: *φέρβε βόας, φέρε μᾶλα, φέρε στάχυν, οἶσε θερισμόν*, denn hier spricht ebenso *φέρε*, als die Beobachtung von Ahrens dial. dor. p. 153, dass die Dorier die Schafe *μῆλα*, die Baumfrüchte *μᾶλα* genannt, für die Erklärung *poma*, nicht *oves* (vgl. O. Schneider 1 p. 402). Darf man darnach auf die HSS. Pindars bauen, die in diesem Worte das *ᾱ* nur Ol. 1, 12 *πολυμάλου Σικελίας*, sonst überall *η̄* geben, so würde dies gut zu der Selinuntischen *Μαλοφόρος* als Schützerin der Baumfrüchte passen. Und diese Erklärung des *πολυμάλου* findet sich schon in den Wiener Scholien: *ἡ ἀπὸ τοῦ καρποῦ τῶν μήλων· ἐκεῖ γὰρ περισσῶς λέγεται φυῆναι.* Vgl. Tycho Mommsen Scholia Germani p. 4.

Wenn *Μαλοφόρος* nur Demeter sein kann, so ist auch für die folgende Göttin, — denn dass *Πασικράτειαν* richtig gelesen und ergänzt sei, bedarf keines Beweises — kaum eine andere Deutung als auf Kora möglich, wie schon Ugdulena und Holm urtheilen, obgleich Letzterer auch an Hera denkt und sich mehr für sie entscheidet (S. 32). Schon Aidoneus Worte an Kora im homerischen Hymnos v. 364: *ἐνθάδ' ἰοῦσα δεσπόσσεις πάντων ὁπόσα ζώει τε καὶ ἕρπει, τιμὰς δὲ σχήσεισθα μετ' ἀθανάτοισι μεγίστας* beweisen für die Herrscher in der Unterwelt und keinen andern Sinn hat ihr in Arkadien und anderwärts im Kult gebräuchlicher Name *Δέσποινα.* Dass aber in Sikilien eine solche Bezeichnung am wenigsten auffallen kann, zeigt

das hohe Ansehn, in welchem ihr Dienst auf der ganzen Insel stand, die wie bekannt eben deshalb als Hochzeitsgeschenk des Zeus an Kora galt. Pindaros N. 1, 13: *σπεῖρέ νυν ἀγλαΐαν τινὰ νάσῳ, τὰν Ὀλύμπου δεσπότας Ζεὺς ἔδωκεν Φερσεφόνᾳ. κατένευσέν τέ ϝοι χαίταις, ἀριστεύοισαν εὐκάρπου χθονὸς Σικελίαν πίειραν ὀρθώσειν κορυφαῖς πολίων ἀφνεαῖς.* Andere Stellen vergleicht Ebert *Σικελιῶν* p. 11 sqq.

Es ist nun noch übrig, über die Gottheit, die unmittelbar nach Zeus genannt ist, zu sprechen. Ugdulena liest *Φόνον*, aber mit vollem Recht hat Holm in dem mittelsten Buchstaben die alterthümliche Gestalt des *B* erkannt, die zuerst von Th. Mommsen Unterital. Dial. S. 35 nachgewiesen wurde. Sie gehört einer Reihe in Italien gefundener Vasen an, die auf korinthischen Ursprung weisen: Welcker alte Denkm. 5 S. 254. 262. O. Jahn, Vasenkunde p. CXLVII. Ferner solchen, die in Korinth selbst (z. B. Archäol. Z. 1864 T. CLXXXIV, deren Inschriften auch C. I. Gr. 4, 7381 stehn) und in Kleonae gefunden sind (Arch. Z. 1863, 185). Und dass die in Karystos ausgegrabene (die Inschrift C. I. 7380. b) ebenfalls aus Korinth sei, nimmt Benndorf griech. und sicil. Vasenbilder p. 54 nach Kirchhoff mit gutem Recht an. Ferner gehört sie dem kerkyräischen Alphabet an: Ross, archäol. Aufs. 2 S. 576. Wachsmuth Rh. Mus. 18 p. 581. Ebenso findet sie sich in einer aus dem nördlichen Akarnanien, vielleicht aus Anaktorion (wie Kirchhoff griech. Alph. 1863 p. 196 vermuthet), jedesfalls aus einer korinthischen Kolonie stammenden Inschrift, C. I. 1794. h. (vol. 2 p. 983). Endlich hat Kirchhoff dieselbe Gestalt auch in zwei sehr alten melischen Inschriften entdeckt: Hermes 2 p. 454. Dazu kommt nun

die von Selinus, und wenn wir so immer neue Bestätigungen gewinnen, dass diese Gestalt des *b* dem Alphabet Korinths und aller Staaten, die mit ihm zusammenhiengen, früher eigenthümlich war und dort ohne Ausnahme gebraucht wurde, so weist dieselbe auch die Inschrift von Selinus in ziemlich frühe Zeit, da man sie später gegen die gewöhnliche, welche der Buchstabe in den andern Alphabeten hatte, aufgab: Kirchhoff, gr. Alph. S. 192. Holms Bemerkung aber (p. 29), dass aus der phönikischen Form des *b* sich die korinthische ebenso unmittelbar herausbilden konnte, als die gewöhnliche, leuchtet ein, wenn man sich der eckigen Gestalt des *b* auf dem Stein des Eschmunazar oder K. Mesa erinnert; der Vorgang ist den Doppelbildungen anderer griechischer Buchstaben, z. B. des *l*, aus der einen phönikischen Form ganz analog. Also *Φόβον* steht fest; wenn wir aber sahen, dass Demeter zu Selinus unter dem Namen *Μαλοφόρος*, Persephone als *Πασικράτεια* verehrt wurde, so darf man auch vermuthen, dass mit dem Namen *Φόβος* hier nicht der Sohn und Begleiter des Ares (Welcker Gr. Mythol. 1 S. 714), oder, wie Holm will, ein Diener und Gefährte des Zeus gemeint sei, sondern Ares selbst, der Schrecken der Feinde, bezeichnet werde. Ebenso hiess Ares anderwärts *Ἐνυάλιος*: Welcker gr. Götterlehre 2 S. 728 ff. und Schneidewin Philol. 4 S. 455.

Bis zu *μάλιστα* in der 7. Zeile ist also keine wesentliche Schwierigkeit vorhanden. Um so zweifelhafter ist es, welchen Gedanken die letzten fünf Zeilen enthielten und ob es möglich sei mit einiger Wahrscheinlichkeit die Lücken auszufüllen. Ugdulena schlägt vor (p. 203): *φιλίας δὲ γενομένας ἐν χρυσέῳ ἐλάσαντας καὶ*

ὀνύματα ταῦτα κολάψαντας ἐς τὸ Ἀπολλώνιον καθθέμεν τὸ Διὸς γέγραπται καὶ ἐς τόδε χρυσίον ἒξ μνάας καὶ τάλαντον ἐλάεν. mit der Uebersetzung: Fatta poi l'alleanza, è stato decretato, che questa statua di Giove, tirata in oro e scolpitivi questi nomi, si ponga nel tempio d' Apolline, e che per essa si tirino a martello sei mine e un talento d'oro. *ἐλάσαντας* und *κολάψαντας* ist sicher, aber *ἐν χρυσέῳ*, das Fehlen des Artikels bei *ὀνύματα ταῦτα*, die Ellipse des Substantivs, etwa *ἄγαλμα* oder *ἕδος*, bei *τὸ Διὸς* sind sprachlich unmöglich, die Form *ἐλάεν* ist sehr zweifelhaft und der ganze Ausdruck *ἐλᾷν χρυσίον ἐς τόδε*, wie auch die Nebeneinanderstellung von *χρυσίον* und *μνᾶς-τάλαντον* kaum zu rechtfertigen, endlich *γέγραπται* überhaupt und zumal an der Stelle, zwischen den beiden Infinitiven, gegen allen Gebrauch. Dann würde *καὶ ὀνύματα ταῦτα κολάψαντας*, wenn man zugeben wollte, dass der Accusativ *τὸ Διὸς* zu *ἐλάσαντας* verstanden werden könne, bedeuten müssen, dass die Namen in diese Bildsäule des Zeus eingegraben werden sollten. Und so lautet auch die Uebersetzung: *scolpitivi.* Aber wie verhält sich dann dazu die nochmalige Eingrabung auf der Ante? Mehrere dieser Einwürfe hat schon Holm nachträglich (S. 33 f.) seinem Aufsatz hinzugefügt. Er selbst hatte, ohne von Ugdulenas Arbeit etwas zu wissen, folgende Herstellung versucht (S. 28): *φιλίας δὲ γενομένας ἐνχρύσεον ἐλάσαντας καὶ ὀνύματα ταῦτα κολάψαντας ἐς τὸ Ἀπολλώνιον καθθέμεν τοδί .... ΓΡ...... ἐς τόδε χρυσίον ἒξ λίτρας καὶ τάλαντον νέμεν.* und übersetzt S. 33: ma poichè la pace si fece, di fare una lamina dorata (*ἐγχρύσεον*), di scolpirvi questi nomi e di deporla in questo tempio d'Apolline [hanno decretato i Selinuntini]

ed in questo oro [sei libre ed un] talento spendere. Zunächst kann ich auch hier ἀνάθεμα ταῦτα und τόδε χρυσίον wegen des fehlenden Artikels nicht für richtig halten, und muss sowol die Stellung des *hanno decretato* zwischen καθθέμεν und νέμεν als die vergoldete Platte mit den Namen neben derselben Inschrift auf der Ante bedenklich finden.

Aber viel wichtiger ist ein anderer Uebelstand, der mir allein schon beide Deutungsversuche unmöglich zu machen scheint. Ugdulena und Holm legen der Inschrift auch deshalb grossen Werth bei, weil durch die Ergänzung, die beide in Z. 9 angenommen haben, ἐς τὸ Ἀπολλώνιον (ohne oder mit τοδὶ), der Tempel, in dem die Inschrift in die Ante eingehauen ist, dem Apollon zugeeignet wird, also seine sichere Bestimmung erhält, und zwar gegen die bisherige unsichere Vermuthung, dass es ein Tempel des Zeus Olympios gewesen sei. Nahe genug liegt diese Ergänzung, und blendet zuerst. Aber dennoch, wie ist es denkbar, dass eine Bildsäule des Zeus oder auch nur die vergoldete Tafel mit dem feierlichen Danke der Bürgerschaft an die Götter, die den Sieg verliehen hatten, in den Tempel des Apollon gebracht und hier geweiht worden sei? Zeus wird unter den Göttern zuerst genannt und, nachdem eine Anzahl anderer angereiht, auch vorsichtig, damit nicht irgend einer, der mit zum Siege geholfen, sich übergangen glauben könne, καὶ διὰ τοὺς ἄλλους θεοὺς hinzugesetzt ist, wird so nachdrücklich als möglich noch einmal gesagt, dass man Zeus sich am meisten verpflichtet wisse (διὰ δὲ Δία μάλιστα). Es ist unmöglich, glaub' ich, zu denken, dass das sichtbare Zeichen der Dankbarkeit, das Weihgeschenk, die Ehrentafel,

in einem anderen Heiligthume seine Austellung gefunden habe, als in dem des Zeus.

Von diesem festen Punkte glaubte ich ausgehn zu müssen, als ich eine Ergänzung und Deutung der letzten Zeilen zu finden suchte. So oft und so genau ich aber auf drei verschiedenen Abzügen der Photographie, die mir zu Gebote standen, bei verschiedener Beleuchtung die Buchstaben *γρ*, die in Z. 10 stehn sollen, betrachtet habe, immer glaub' ich mit Bestimmtheit statt des <(*Γ*) ein *O* zu erkennen, dessen linke Hälfte etwas eckig ausgefallen ist. Dann aber bietet sich die Ergänzung *ΤΟΔΙΟ*[*ΣΑΓ*]*ΟΡΑ*[*ΙΟΚΑΙ* ganz von selbst, d. h. *τοῦ Διὸς ἀγοραίου καὶ*. Und dass *Ζεὺς ἀγοραῖος* zu Selinus seinen Dienst hatte, zeigt Herodotos 5, 46: *οἱ γάρ μιν* (den Tyrannen Peithagoras) *Σελινούσιοι ἐπαναστάντες ἀπέκτειναν καταφυγόντα ἐπὶ Διὸς ἀγοραίου βωμόν.*

Aber was wird nun aus den Buchstaben *ΟΑ.ΟΝΙΟΝ* Z. 9? Mit einigem Zagen ergänze ich *κολάψαντ*[*ας ἐς τ*]*ὸ* [*ΠΡΟ*]*ΦΑ*[*Ι*]*ΟΝΙΟΝ*. Ich überlegte, dass die Inschrift auf der Ante des Allerheiligsten gefunden sei, und dass vor dem Eingang in dies, wie ich oben schilderte, eine Estrade war, ganz geeignet und dem Herkommen nach bestimmt Weihgeschenke aufzunehmen. *φλιὰ* aber ist die Ante: Polybios 12, 11 p. 735 Bk. sagt, wie wenn er unsere Ante mit meinte: *καὶ μὴν ὁ τὰς ὀπισθοδόμους στήλας καὶ τὰς ἐν ταῖς φλιαῖς τῶν νεῶν προξενίας ἐξευρηκὼς Τίμαιός ἐστιν.* Wie nun *προπυλὼν* von *πύλη*, *προθυρὼν* von *θύρα*, *προκοιτὼν* von *κοίτη*, so muss auch von *φλιὰ* richtig *προφλιὼν* gebildet werden können. Und davon ist das richtig gebildete Deminutivum *προφλιώνιον*. Freilich sind *προφλιὼν* und *προφλιώνιον* bis jetzt unbekannte Wörter, aber bei solchen technischen Ausdrücken darf

das nicht auffallen: wie viele derselben haben sich nur in einer oder ein paar Inschriften gefunden. Platz für *ΠΡΟ* ist gut vorhanden; eher darf man sagen, dass *ΑΠ* ihn nicht füllt.

Wenn man diese Ergänzung gelten lässt, so ist der Gedanke dann klar und einfach: *φιλίας δὲ γενομένας ἐγχρυσέους ἐλάσαντας τὰ δ' ὀνύματα ταῦτα κολάψαντας ἐς τὸ προφλιώνιον καθθέμεν τοῦ Διὸς ἀγοραίου.* d. h. *da aber Frieden geworden ist, so soll man sie* (die vorher genannten Götter), *nachdem man sie in vergoldetem Erze gebildet und die Namen* (da, wo sie jetzt stehn) *eingehauen, in das Prophlionion des Zeus Agoraeos stellen.* Dass *φιλίας* nicht so viel als *συμμαχίας* sein, sondern nur Freundschaft, freundschaftliches, friedliches Verhältniss bedeuten könne, hat schon H o l m mit Recht gegen U g d u l e n a bemerkt. Wer die Besiegten gewesen seien, wissen wir nicht, aber es liegt sehr nahe, an die Egestäer zu denken, mit denen Selinus oft über Grenzgebiete Krieg führte. *ἐνχρυσέος* hab' ich dann ergänzt; denn nur dies oder *ἐγχρύσεον* ist möglich, beides von *ἐγχρύσεος vergoldet:* bis auf den letzten sind alle Buchstaben sicher, denn auch von dem *Ρ* erkennt man noch deutliche Spuren, und was liesse sich auch sonst denken? Sonst kommt freilich nur *ἔγχρυσος* vor (Diod. S. 3, 39. C. I. Gr. 3524 Z. 35. vgl. B o e c k h 2 p. 664) und ähnlich *ἐπίχρυσος, ἐπάργυρος*, aber *ἐγχρύσεος* ist ebenso richtig gebildet und auch jene Ausdrücke finden sich äusserst selten. Die Vernachlässigung der Assimilation hat nichts Auffälliges. Also nur *ἐγχρύσεον* oder *ἐγχρυσέος* ist möglich. Aber jenes müsste auf *Δία* gehn, und es wäre denkbar, dass man eben deshalb, weil Zeus so hervorgehoben wird, nur seine Statue habe aufstellen wollen, indessen müsste dies

dann durch wiederholtes *Δία* oder *τοῦτον*, *αὐτὸν* ausgedrückt sein. Da dies nicht der Fall ist, bleibt nur der Gedanke, dass alle genannten Götter aufgestellt werden sollen. Dann ist die Hinzufügung eines *αὐτοὺς* entbehrlich. Dafür spricht auch die bedeutende Masse Goldes, auf welche die erhaltenen Züge zu führen scheinen. Denn da *χρυσίον* deutlich erhalten ist und mit *ἐς τόδε*, das vielmehr *zu diesem Zweck* bedeutet, nicht verbunden werden darf, so kann man wol nur an *ταλάντων* denken und dann auch nur *ἑξήκοντα* ergänzen, das dem Raum genau gerecht wird, während *λίτρας καὶ* eben so wenig als *ἓξ μνάας καὶ* Platz finden. Dass der Spiritus asper bei *ἑξήκοντα* fehlt, ist freilich auffällig, aber nicht minder, wenn man *ἓξ* liest. *ἐξ*, die Präposition, ist undenkbar. Sechzig Talente ist viel, aber für die vielen Bildsäulen kaum zu viel und man darf sich des schon von Holm angeführten Epigrammes des Simonides erinnern (frg. 141 Bgk.):

Φημὶ Γέλων', Ἱέρωνα, Πολύζηλον, Θρασύβουλον,
παῖδας Δεινομένευς, τὸν τρίποδ' ἀνθέμεναι,
ἓξ ἑκατὸν λιτρῶν καὶ πεντήκοντα ταλάντων
Δαμαρέτου χρυσοῦ, τᾶς δεκάτας δεκάταν.

Vgl. die Verhandlungen der Philologenvers. in Halle S. 25 ff. Die letzten Buchstaben *EN* mit dem noch deutlich davor zu erkennenden *M* führen mit Sicherheit auf *δόμεν*: das ist der Infinitivus des Aoristes, den Holm in den Addenda für *νέμεν* wünscht. Auffällig ist vorher *καθθέμεν* für *κατθέμεν* und auch Roscher de aspiratione vulgari apud Graecos (G. Curtius, Studien z. Griech. und Lat. Gr. I, 2) S. 89 führt ausser *κάθθεσαν* aus einer späten mytilenäischen Inschrift (C. I. Gr. 2169) nur noch die Eigennamen *Κλεοθθίς* (C. I. Gr. 2 p. 1029, 2211. b.) aus Methymna und den Flussnamen *Ἄραθθος*

aus der alten kerkyräischen Grabschrift des Arniadas und auf einer ambrakischen Münze an, über den noch Bergk in dem hallischen Programm zum 4. Mai 1859 und Friedländer in d. Archäol. Z. 1869 S. 102 zu vergleichen sind. Aber mit Recht zieht Roscher S. 107 auch die kretischen Formen *ἰϑϑάνυ, συνεϑϑᾷ, ἰϑϑάντες* hierher, zu denen aus der alten Inschrift von Gortyn (Rev. archéol. 1863. 2 p. 445) die wunderbar aussehende Form *ἀποϝειπάϑϑο* d. i. *ἀπειπάσϑω* kommt. Vgl. noch Kirchhoff Philol. 13 S. 3.

Aber wovon hängen die Infinitive *καϑϑέμεν* und *δόμεν* ab? Der Versuch Ugdulenas die Schwierigkeit zu beseitigen ist misslungen und Holm ist es nicht gelungen ein passendes Verbum, an das sie sich anschliessen könnten, aufzufinden. Nach meiner Ergänzung war überhaupt ein solches Verbum nicht vorhanden. Es ist aber annehmbar, dass die Anordnung, welche das Volk getroffen hatte, hier nur im Infinitiv angegeben sei, indem man das in den Stein Geschriebene als eine Art von Auszug aus dem bezüglichen Psephisma ansieht, in welchem die Infinitive von einem *δέδοκται, ἔδοξε* abhiengen. Gewissermassen deuten die ersten Zeilen kurz die Motive, den Vordersatz des Volksbeschlusses an, die letzten fünf den Nachsatz, den eigentlichen Inhalt des Beschlusses.

All dem Gesagten zufolge schlage ich also vor die Inschrift so zu lesen: *Διὰ τοὺς ϑεοὺς τούσδε νικῶντι τοὶ Σελινούντιοι· διὰ τὸν Δία νικῶμες καὶ διὰ τὸν Φόβον καὶ διὰ Ἡρακλέα καὶ δι' Ἀπόλλωνα καὶ διὰ Ποτειδᾶνα καὶ διὰ Τυνδαρίδας καὶ δι' Ἀϑαναίαν καὶ διὰ Μαλοφόρον καὶ διὰ Πασικράτειαν καὶ διὰ τοὺς ἄλλους ϑεούς, διὰ δὲ Δία μάλιστα. φιλίας δὲ γενομένας ἐνχρυσέους ἐλάσαντας, τὰ δ' ὀνύματα ταῦτα κολάψαν-*

τας, ἐς τὸ προφλιώνιον καθθέμεν τοῦ Διὸς Ἀγοραίου καὶ ἐς τόδε χρυσίον ἑξήκοντα ταλάντων δόμεν.

Ich erwähnte schon, dass die alterthümliche Form des Alphabets die Inschrift in verhältnissmässig frühe Zeit verweist. Die Vermuthung Ugdulenas daher, dass sie in das Jahr 416 gehöre, in welchem die Selinuntier nach Thukydides 6, 6 mit den Syrakusern ein Bündniss schlossen und mit Hülfe derselben ihre Feinde, die Egestäer, besiegten, hat schon Holm mit Recht zurückgewiesen. Sowol der Begriff von *φιλία*, der nicht ohne Weiteres schon Bündniss bedeutet und hier in diesem Sinn dem Zusammenhang ganz zuwider sein würde, als auch das Alphabet sind entschieden dagegen. Wir werden vielmehr die Ansicht Holms als die richtige anerkennen müssen, dass die Inschrift in den Anfang des fünften Jahrhunderts zu setzen sei. Genauer lässt sich die Zeit bei dem grossen Mangel näherer Nachrichten über die Geschichte von Selinus nicht bestimmen.

Wenn sie aber in den Anfang des 5. Jahrh. gehört, so müssen auch diese Tempel früher gebaut sein, als Schubring in seiner trefflichen Abhandlung (S. 427) annimmt, obgleich sie jünger sind, als die in dem westlichen Theile der Stadt. Und damit stimmen die genauen Untersuchungen über die architektonischen Verhältnisse, die Cavallari in seiner Abhandlung: Tempio grande creduto di Giove Olimpico ora di Apolline in Selinunte (Bullett. p. 17 ff.) mittheilt, vollständig überein. Die Ueberschrift aber seiner Abhandlung sollte nach meiner Ansicht heissen: Tempio grande creduto di Giove olimpico e poi di Apolline *ora di Giove Agoreo in Selinunte.*

Universität.

Promotionen der philos. Fakultät.

(Fortsetzung.)

5) Am 20. August, Carl Schmidt aus Heringsdorf. Diss.: Ueber einige vom normalen Propylalkohol sich ableitende Verbindungen.

6) Am 30. August, Nicolaus Tawildarow aus Petersburg. Diss.: Ueber einige Derivate des Xylols.

7) Am 2. September, Thomas Baker aus Pensylvanien. Diss.: Researches in Electricity.

8) Am 1. October, August Salfeld aus Hildesheim. Diss.: Die Cultur der Haideflächen Nord-West-Deutschlands.

9) Am 5. October, Ludwig Marquardt aus Woldenberg. Diss.: Ueber die Derivata der Muconsäure.

10) Am 4. November, Heinrich Rose aus Höxter. Diss.: Untersuchungen über die Sulfosäuren des Mesitylens.

11) Am 10. November, Wesley C. Sawyer. Diss.: On philosophy and faith.

12) Am 19. December, Siegfried Isaacsohn. Diss.: Der Krieg des Jahrs 1674 und das Verhältniss des Wiener Hofes zu demselben.

13) Am 20. December, Heinrich Oppenheim aus Hamburg. Diss.: Ueber die Bahn des Cometen 1854. II.

14) Am 1. Februar, Gustav Kaehler aus Tilsit. Diss.: Ueber die Platonische Apologie des Sokrates.

15) Am 17. Februar, Paul Bergholz aus Greifswald. Diss.: Ueber die Entsilberung des Werkbleis mittelst Zink.

16) Am 1. März, Carl Günther aus Halberstadt. Diss.: Ueber den ersten Theil der Chronik der Magdeburger Erzbischöfe.

17) Am 5. März, Paul Böhme aus Berlin. Diss.: Die Axen eines Kegels zweiter Ordnung.

18) Am 6. März, Gustav Ellger aus Schlesien. Diss.: De prooemio theogoniae Hesiodeae.

19) Am 30. März, Carl Müller aus Hildesheim. Diss.: Ueber die Umwandlung der Glycerin- in Allyl-Verbindungen.

20) Am 8. April, Carl August vom Berg aus Wetzlar. Diss.: Ueber das Leben des Aristides.

21) Am 14. April, Samuel Sadtler aus Pensylvanien. Diss.: On the Iridium compounds analagous to the Aethylen and protochloride of Platinium salts.

22) Am 15. April, Albert Rinne aus Osterode. Diss.: Ueber die Constitution des Peperidins und über Lyanallyl.

23) Am 17. April, Nathanael Terry aus Massachussets. Diss.: Some new salts of the Sulpho-Acid.

24) Am 12. Mai, Heinrich Schaefer aus Wittenberg. Diss.: De Orestis Euripideae versib. 836—1010.

25) Am 18. Mai, Emanuel Leser aus Mainz. Diss.: Neckers zweites Ministerium. Th. 1.

26) Am 22. Mai, Hermann Theodor Wolff aus Cottbus. Diss.: Ueber Milton's Samson Agonistes.

27) Am 6. Juni, Eduard Riecke aus Stuttgart. Diss.: Ueber die magnetische Natur des weichen Eisens.

28) Am 17. Juni, Adolf Schroeder aus Lüneburg. Diss.: Ueber den Valeraldesyd.

29) Am 21. Juni Maximilian Perlbach aus Danzig. Diss.: Die ältere Chronik von Oliva.

30) Am 22. Juni, Richard Douglas Williams aus Baltimore. Diss.: Concerning the nature of the Sulpho- and Sulpho-nitro acids of Bibrombenzol.

31) Am 10. Juni, Isaac Flagg aus Cambridge in America. Diss.: Ueber Schiller's Braut von Messina.

32) Am 30. Juni, Carl Eichler aus Wildungen. Diss.: Uebertragung eines Steinerschen Problems in der Ebene auf den Raum.

33) Friedrich Wagner aus Schlesien.

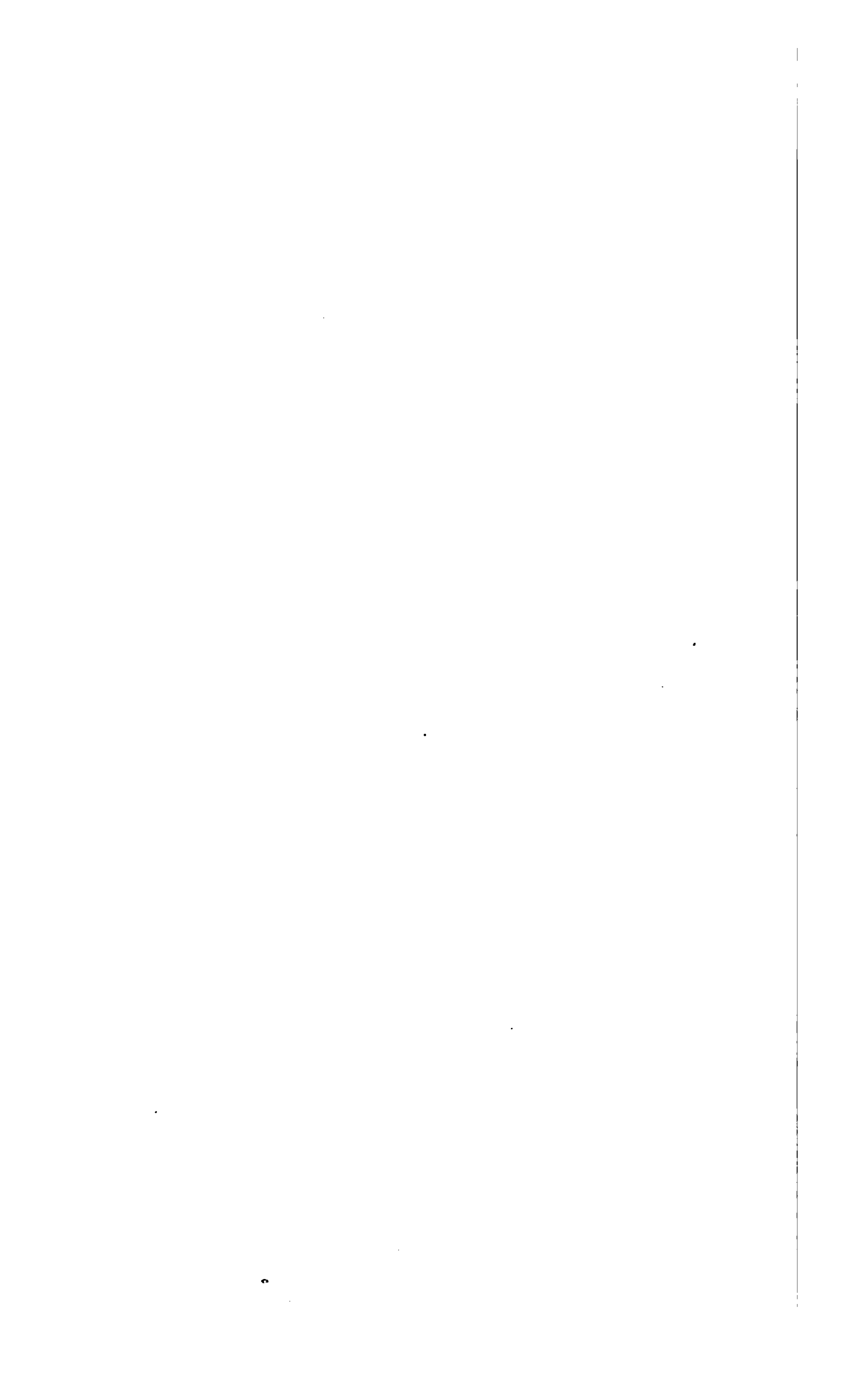
34) Carl Leisewitz aus Dorf Mark.

Ergänzt:

Δ[Ι]ΑΤΟΣΘΕΟΣΤΟΣΔΕΝΙΚΟΝΤΙΤΟΙΣΕΛ[ΙΝ]Ο[ΝΤΙΟΙ
ΔΙ[Α]ΤΟΝΔΙΑΝΙΚ[Ο]ΜΕΣΚΑΙΔΙΑΤΟΝΦΟΝΟΝ[ΚΑΙ
ΔΙΑ]ΗΕΡΑΚΛΕΑΚ[Α]ΙΔΙΑΠΟΛΛΟΝΑΚΑΙΔΙΑΠ[ΟΤ
Ε[Ι]ΔΑ]ΝΑΚΑΙΔΙΑ[Τ]ΥΝΤΑΡΙΔΑΣΚΑΙΔΙΑΘ[Α
5 ΝΑ]ΙΑΝΚΑΙΔΙΑΜ[Α]ΛΟΦΟΡΟΝΚΑΙΔΙΑΠΑΣ[ΙΚ
ΡΑ[Τ]ΕΙΑΝΚΑΙΔΙ[Α]ΤΟΣΑΛΛΟΣΘΕΟΣΔΙΑΔ[Ε]ΔΙΑ
ΜΑ[Λ]ΙΣΤ[Α]ΦΙΛΙ[ΑΣ]ΔΕΓΕΝΟΜΕΝΑΣΕΝΧ[Ρ]ΥΣ
ΕΟ[Σ]ΕΛΑ[ΣΑ]ΝΤΑΣΤΑΔΟΝΥΜΑΤΑΤΑΥΤΑΚΟΛ
Α[ΨΑ]ΝΤ[Α]ΣΕΣΤΟΠΡΟ]ΦΑ[Ι]ΟΝΙΟΝΚΑΘΘΕΜΕ
10 ΝΤΟΔΙΟ[Σ]ΚΑ[Ι]ΟΡΑ[Ι]ΟΚΑΙ]ΕΣΤΟΔΕΧΡΥΣΙΟΝ
ΕΞ[Ε]ΚΟΝΤΑΤΑ]ΛΑΝΤΟΝ[Δ]Ο]ΜΕΝ

ΑΤΟΣΘΕΟΣΤΟ ΔΕΝΙΚΟΝ ΙΤΟΙΣΕΛ ΥΟΛ
ΤΟΝΔΙΑΝΙΚ ΜΕΣΚΑΙΔΙΑΤΟΝΦΟΥΛΟΝ
ΗΕΡΑΚΛΕΑΚ ΙΔΙΑΠΟΛΛΟΝΑΚΑΙΔΙΑΠ
ΝΑΚΑΙΔΙΑ ΤΥΝΤΑΡΙΔΑΣΚΑΙΔΙΑΘ
ΚΑΙΔΙΑΜ ΛΟΦΟΡΟΝΚΑΙΔΙΑΠΑΣ
ΕΙΑΝΚΑΙΔΙ ΤΟΣΑΛΛΟΣΘΕΟΣΣΙΑΔ ΔΙ
ΙΣΤ ΘΙΑΙ ΕΓΕΝΟΜΕΝΑΣΕΝ ΔΥΣ
ΕΛΑ ΝΤΑ ΣΥΜΑΤΑΤΑΥΤΑΚΟΛ
ΑΝΤ ΣΑ ΟΝΙΟΝΚΑΘΘΕΜΕ
ΔΙΣ ΟΡΑ ΕΣΤΟΔΕ ΡΥΣΙΟΝ
ΙΑ ΝΤΟΝ ΛΕΝ

Ε
Ν
ΡΑ
ΜΑ
ΕΟ
ΑΙ
ΝΤΟ
ΕΞ



Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

6. December. № 25. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 2. December.

Sauppe, zur Erinnerung an A. Meineke und Immanuel Bekker.
Clebsch, zum Andenken an J. Plüker (erscheint in den Abhandlungen.)
Wöhler, zum Andenken an W. von Haidinger.
Wieseler, über die Imhoof-Blumer'sche Münzsammlung zu Winterthur.
Claus, die Metamorphosen der Squilliden (erscheint in den Abhandlungen).
Reinke (vorgelegt von Bartling), über gonidienartige Bildungen in einer dicotylischen Pflanze.

Am heutigen Tage feierte die K. Gesellschaft d. W. ihren Stiftungstag zum zwanzigsten Mal in dem zweiten Jahrhundert ihres Bestehens. Nachdem die obigen Vorträge gehalten waren, erstattete der Secretair den folgenden Bericht:

Das unter den drei ältesten Mitgliedern d. K. Societät jährlich wechselnde Directorium ist zu Michaelis d. J. von dem Herrn Prof. Ewald in der historisch-philologischen Classe auf Herrn Hofrath Marx in der physikalischen Classe übergegangen.

Die K. Societät betrauert den Verlust eines ihrer Assessoren, des thätigen und ausgezeichneten Professors der landwirthschaftlichen Chemie, Dr. Wilhelm Wicke, über dessen Leben und Wirken in Kurzem von anderer Seite eine Darstellung erscheinen wird. Er starb nach längerem Leiden am 6. Juni, 48 Jahr alt.

Die K. Societät verlor ferner durch den Tod 5 ihrer auswärtigen Mitglieder und 6 ihrer Correspondenten.

Von ihren auswärtigen Mitgliedern verlor sie

Wilhelm von Haidinger in Wien; gest. am 19. März im 76. Lebensjahre.

John Herschel zu Collingwood; gest. am 11. Mai im 76. Lebensjahre.

August Meineke in Berlin, gest. am 12. December 1870, 81 J. alt.

Immanuel Bekker in Berlin, gest. am 7. Juni d. J., 86 J. alt.

Georg Gottfried Gervinus in Heidelberg, gest. am 18. März d. J., 66 J. alt.

Von ihren Correspondenten verlor sie:

G. A. Carl Städeler in Zürich, gest. am 11. Januar.

Eduard Weber in Leipzig, gest. am 18. Mai, 65 J. alt.

F. Magnus Schwerd in Speyer, gest. am 22. April, 80 J. alt.

Adolph Strecker in Würzburg, gest. im November, im 50. Lebensjahre.

B. Huillard Bréholles in Paris, gest. am 23. März im 54. Lebensjahre.

Die von der K. Societät neu erwählten Mitglieder sind folgende:

Zum hiesigen ordentlichen Mitglied für die physikalische Classe wurde erwählt:

Herr Professor Carl Claus.

Zu Assessoren wurden erwählt:

Hr Hans Hübner, physik. Classe.
Hr Wilhelm Marmé, physik. Cl.
Hr Felix Klein, mathem. Cl.

Zu auswärtigen Mitgliedern wurden erwählt die bisherigen Correspondenten:

Hr Arthur Cayley in Cambridge,
Hr Wilh. von Giesebrecht in München.
Hr Moriz Haupt in Berlin.
Hr Carl Hegel in Erlangen.
Hr Heinrich von Sybel in Bonn.

Ferner

Hr E. H. Carl von Dechen in Bonn.
Hr Joh. Nicolaus Madvig in Kopenhagen.

Zu Correspondenten wurden erwählt:

Hr Adolf Erik Nordenskjöld in Stockholm.
Hr Friedr. Hessenberg in Frankfurt a. M.
Hr Hermann Grassmann in Stettin.
Hr Ludwig Schlaefli in Bern.
Hr Arthur Auwers in Berlin.
Hr Ulrich Köhler in Athen.
Hr Carl Müllenhoff in Berlin.
Hr Ludwig Müller in Kopenhagen.

Bezüglich der für dieses Jahr von der historisch-philologischen Classe gestellten Preisfrage ist zu berichten, dass sie keinen Bearbeiter gefunden hat.

Die für die Jahre 1872, 1873 und 1874 von den drei Classen gestellten Preisfragen werden demnächst in den Nachrichten bekannt gemacht.

Ueber gonidienartige Bildungen in einer dicotylischen Pflanze.

Von

Dr. J. Reinke.

Bei einer morphologisch-systematischen Bearbeitung der Gattung Gunnera begriffen, ward meine Aufmerksamkeit auf eine interessante Erscheinung gelenkt, über welche ich mir folgende, vorläufige Mittheilung erlauben möchte.

Der dicke, rübenartige Stamm von Gunnera scabra ist dicht mit stehenbleibenden, zu Spreuschuppen vertrockneten, zerschlitzten, niederblattartigen Gebilden bedeckt, welche in grösserer Zahl zwischen je zwei auf einander folgenden Laubblättern stehen, und die wir, wenn wir mit Hofmeister[1]) der Begriffsbestimmung die Entstehungsgeschichte zu Grunde legen, als Stipulae bezeichnen müssen. Dieselben entstehen vor ihren betreffenden Blättern später als diese, und zwar tritt die vor der Mittelrippe stehende Stipula zuerst auf, die übrigen folgen nach rechts und links.

In den Stiel eines Laubblattes biegen eine

1) Allgemeine Morphologie pag. 522 ff.

Anzahl zerstreuter, geschlossener Gefässbündel aus; dagegen liegen die Bündel der Stipulen in in einer Ebene.

Der Bau des Stammes erinnert an den Monocotylentypus; er besteht aus parenchymatischem Grundgewebe mit unregelmässig eingestreuten, geschlossenen Bündeln, welche häufig durch horizontale Stränge netzartig anastomosiren.

Die Laubknospe ist durchweg mit einem durchsichtigen, klebrigen Schleime erfüllt, welcher von grossen, flach-tonnenförmigen, ausgerandeten Drüsen geliefert wird, die am Grunde der Rückseite der Blätter stehen. Der Schleim wird zunächst durch Aufquellen der Zellhäute dieser Drüsen geliefert, worin sich der, vorher stark mit harzigen und Eiweissstoffen angefüllte Zellinhalt mischt. Die Auflösung der Zellen schreitet bis in das Parenchym des Stammes hinein fort und zwar an bestimmten Stellen, wodurch neben einander liegende Schleimkanäle entstehen. Diese Drüsen sind noch weiter stammabwärts als bräunliche Flecke sichtbar: später schliesst sich die von denselben gebildete Wunde durch Wucherung des umgebenden Parenchyms und vernarbt völlig.

Soviel zur morphologischen Orientirung.

Auf Querschnitten wie auf Längsschnitten des älteren Stammes findet man nun 1 bis 2 Millimeter unter der Oberfläche gelegen, in ziemlich regelmässigen Abständen, blaugrün gefärbte Flecke, welche im Durchschnitt meist einen sehr zierlichen, dendritenartigen Umriss zeigen.

Die microscopische Untersuchung ergiebt die Ursache dieser grünen Flecke; die Parenchymzellen sind nämlich an jenen Stellen dicht mit sehr kleinen, blaugrünen Zellen angefüllt, welche

zwar eng an einander gedrängt sind, aber dennoch deutlich eine Membran und plasmatischen Inhalt erkennen lassen.

Alkohol zieht aus diesen Nestern blau-grüner Zellen einen grünen Farbstoff aus und lässt einen blauen zurück, welcher seinerseits sich langsam in kaltem Wasser löst; es unterliegt keinem Zweifel, dass wir es hier mit einer Mischung von Chlorophyll und Phycocyan zu thun haben und überhaupt mit dem Vorkommen einer phycochromatischen Alge im Innern einer lebenden Gefässpflanze, analog den Gonidien der Lichenen. Die Frage ist nur die, wie diese Algen in den Körper der lebenden Pflanze hineingelangt sind, da die einzelnen Nester unter sich in keinem Zusammenhange stehen und von der Oberfläche durch eine dicke Gewebeschicht getrennt sind.

Verfolgt man diese Gonidiengruppen stammaufwärts bis in die Region der Laubknospe, so findet man dieselben an Grösse abnehmen und näher der Oberfläche liegen; auch correspondiren sie in ihrer Vertheilung mit den oben beschriebenen, schleimaussondernden Drüsen.

Eine genaue Untersuchung ergiebt nun, dass in dem die Knospe erfüllenden Schleim ausser allerlei Pilzmycelien eine zur Familie der Scytonemaceae gehörige Fadenalge lebt, die vorläufig Scytonema Gunnerae heissen mag. Dieselbe wuchert besonders zwischen den äusseren, in Auflösung begriffenen Zellen der Drüsen und dringt in Menge in die Schleimkanäle ein, welche oft dicht davon erfüllt sind, und durch dieselben hindurch in das darunter liegende eigentliche Stammparenchym. Hier wachsen die Fäden in die Parenchymzellen hinein, was ihnen durch

die grossen Tüpfel derselben erleichtert wird, und füllen sie aus, wobei sie allen in der Zelle verfügbaren Raum in Anspruch nehmen; die Fäden legen sich dabei dicht an einander und verschlingen sich knäuelförmig, so dass feine Durchschnitte später nnr massig an einander gelagerte Algenzellen, keine Fäden mehr erkennen lassen. Nachdem so eine Gruppe neben einander liegender Parenchymzellen von der Alge ausgefüllt ist, hört die weitere Ausbreitung auf, oder vielmehr sie wird so verlangsamt, dass sie nur in dem, mit zunehmendem Alter des Stammes etwas grösser werdenden Nestern erkennbar ist. Zugleich wird der Zugang zu dieser Ablagerungsstätte, wie schon oben erwähnt, durch neugebildetes Parenchym, welches das ehemalige Drüsengewebe ersetzt, verschlossen, die Alge ist somit vollständig gefangen, durch ziemlich dicke Zellschichten von der Oberfläche getrennt und darauf angewiesen, ihr Dasein von dem gerbstoffreichen Safte der Gunnera zu fristen; dabei behalten die Zellen noch in ganz alten Stämmen ihr völlig frisches Aussehen. Dass die Gonidiengruppen eine, im Durchschnitt oft dendritenartige Verästelung zeigen, ist theils durch die Fibrovasalstränge bedingt, theils dadurch, dass einzelne Parenchymzellen weniger leicht zugänglich sind, als andere.

Besonders hervorgehoben zu werden verdient, dass die hier geschilderte Erscheinung kein etwa auf den Göttinger Garten localisirter Parasitismus ist, sondern dass das Scytonema typisch mit Gunnera verbunden erscheint; nach einer gütigen Mittheilung des Hrn Schmitz in Bonn besitzt die Gunera des dortigen Gartens dieselben grünen Flecke.

Betrachten wir diese Bildung unter dem Ge-

sichtspuncte der neueren, durch de Bary und Schwendener begründeten Theorie des Flechtenthallus, so verhalten sich die Gonidien von Gunnera genau umgekehrt, wie die der Flechten.

Eine eingehende Darstellung der hier nur kurz skizzirten Verhältnisse wird im Zusammenhang mit einer grösseren Arbeit über Gunnera erfolgen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

November 1871.

Nature. 105—108.
Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark. Bd. II. Hft. III. Graz 1871. 8.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. 1868 Oct.—1871 August. Heidelberg 1871. 8.
Jacut's geographisches Wörterbuch. Bd. VI. Abth. II. Leipzig 1871. 8.
Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen. Deel XII. Afd. Natuurkunde.
— Afd. Letterkunde. Deel VI. Amsterdam 1871. 4.
Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen. Afd. Natuurkunde. 2e Reeks. Deel V.
— Afd. Letterkunde. 2e Reeks. Deel I. Ebd. 1871. 8.
Jaarboek van de Kon. Akademie voor 1870. 8.
Processen-Verbaal. 1870—71. Ebd. 1871. 8.
Ferd. von Mueller, forest culture in its relation to industrial pursuits. 8.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 5. 1871.
Repertorium für Meteorologie, herausg. von der kaiserl. Akademie, redigirt von H. Wild. Bd II. Hft. I. St. Petersburg 1871. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

13. December. № 26. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 2. December.

Für die nächsten Jahre werden von der K. Societät folgende Preisaufgaben gestellt:

Für den November 1872 von der physikalischen Classe von Neuem aufgegeben:

R. S. postulat, ut viarum lacrymalium structura omnis, comparandis cum homine animalibus, illustretur, praecipue vero de iis exponatur apparatibus, qui absorbendis et promovendis lacrymis inservire dicuntur, de epithelio, de valvulis, de musculis et plexibus venosis ductui lacrymali vel innatis vel adjacentibus.

„Die K. Societät verlangt eine vergleichend-anatomische Beschreibung des Thränen leitenden Apparats, mit besonderer Berücksichtigung der Einrichtungen, welche bei der Aufsaugung und Förderung der Thränenflüssigkeit in Betracht kommen, des Epithelium, der Klappen, der Muskeln und Gefässgeflechte in den Wänden der Thränenwege und deren Umgebung.“

Für den November 1873 wünscht die mathematische Classe:

Theoriam numerorum generalissime complexorum formarumque omnis gradus in factores lineares resolubilium.

Eine Theorie der allgemeinsten complexen Zahlen und der zerlegbaren Formen aller Grade.

Für den November 1874 von der historisch-philologischen Classe:

Ad doctrinam de linguis ulterius excolendam duo sunt ad quae animus nunc pracipue est attendendus: primum vivarum linguarum tractatio, ut virium et causarum, quarum effectus in linguarum emortuarum analysi magna cum diligentia indagati sunt, motus et actiones pariter atque reactiones ante oculos ponantur; cui fini eae imprimis inserviunt linguae vivae, quae cum veteribus sollerter exploratis affinitatis vinculo sunt conjunctae. Deinde perscrutandum est quomodo singulae ejusdem rami, vel stirpis, linguae ad se invicem referantur, quae servata sint ex lingua quae iis quasi pro fundamento fuit, quae perierint, quae nova accesserint, ex quibus ea fontibus sint hausta aut quo alio modo formata, ut uno verbo utamur: quae vel unius rami linguis vel unius stirpis ramis communia sint, quae singulis peculiaria; qua quidem ratione fiet, ut definire possimus locum, quem quaeque lingua inter eas obtineat, quibus affinis est.

Ad hujusmodi res exponendas imprimis apta videtur lingua Carduchorum (Kurden) quae cum reliquis linguis eranicis vinculo tam arcto est connexa, ut lumen ab iis non solum accipere sed iis etiam retribuere possit; eadem opera comparatione cum affinibus in-

stituta locus potest definiri, quem inter eas obtinet.

Quibus quidem considerationibus permota Societas Regia eos, qui linguis indogermanicis operam navant, provocat ad elaborandam:

> Grammaticam Carduchorum linguae comparatae cum lingua vetere Bactrorum linguisque persicis (vetere Inscriptionum cuneatim scriptarum, media (Pâzendica) et recentiore ejusque dialectis quae jam notae sunt) praecipue ad locum, quem inter eas obtinet, definiendum. Armeniae linguae comparatio grata illa quidem erit sed necessaria non est.

Für die weitere Fortbildung der Sprachwissenschaft sind jetzt zwei Momente von besonderer Erheblichkeit. Zunächst gilt es das Spiel und die Wechselwirkung der sprachschaffenden und -entwickelnden Kräfte, deren Wirkungen in der Analyse der alten erstorbenen Sprachen erkannt sind, in den lebendigen Sprachen zur vollen Anschauung zu bringen. Dazu werden diejenigen lebenden Sprachen die besten Dienste leisten, welche mit alten, sorgfältig durchforschten, eng verwandt sind. Ferner gilt es seine ganze Aufmerksamkeit auf die Erforschung des Verhältnisses zu wenden, in welchem die Sprachen eines Astes, oder Stammes, zu einander stehen, was sie von der ihnen zunächst zu Grunde liegenden Sprache bewahrt, was eingebüsst, was neugestaltet, welchen Mitteln und Einflüssen diese Neugestaltungen verdankt werden, mit einem Worte: was allen Sprachen eines Astes, den Aesten eines Stammes, gemeinsam und was den besonderten besonders eigen sei,

was auf dem Grunde der gemeinsamen Unterlage die besondre Eigenthümlichkeit der Aeste und ihrer Sprachen bilde. Dadurch wird es möglich zu bestimmen, welche Stelle jede der besonderten Sprachen in dem Sprachkreis einnimmt, zu welchem sie gehört.

Zu derartigen Forschungen scheint die Sprache der Kurden besonders geeignet zu sein. Sie ist mit den übrigen eranischen Sprachen so eng verschwistert, dass sie nicht allein fähig ist, Licht von ihnen zu empfangen, sondern auch auf sie zurückzuwerfen; zugleich wird es möglich sein durch eingehende Vergleichung mit den verwandten Sprachen die Stelle zu bestimmen, welche sie im Kreise derselben einzunehmen berechtigt ist.

Diese Erwägungen haben die Königl. Ges. d. Wiss. bewogen, aufzufordern zu der Bearbeitung einer:

> Grammatik der Kurdischen Sprache in Vergleich mit dem Altbactrischen und den persischen Sprachen (dem Altpersischen der Keilinschriften, dem Mittelpersischen [Pâzendischen] und Neupersischen sammt dessen schon bekannten Dialekten), insbesondre um die Stellung derselben im eranischen Sprachkreise genauer zu bestimmen. Gewünscht wird auch die Berücksichtigung des Armenischen, doch wird diess nicht als unumgänglich gefordert.

Die Concurrenzschriften müssen vor Ablauf des Septembers der bestimmten Jahre an die K. Gesellchaft der Wissenschaften portofrei eingesandt sein, begleitet von einem versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des

Verfassers enthält und auswendig mit dem Motto zu versehen ist, welches auf dem Titel der Schrift steht.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt funfzig Ducaten.

Universität.

Nachtrag zu dem Verzeichniss der Promotionen der philosophischen Facultät vom 1. Juli 1870—1871.

Die Dissertation von Wagner behandelt: Die Wahl Konrad II. zum König.

Die von Leisewitz ist: Die Grundsteuer und die Landwirthschaft. Zweiter Abschnitt der Schrift: Die Landwirthschaft unter dem Einflusse des in Norddeutschland herrschenden Steuersystems.

Diese Promotionen sind erst später vollzogen; ausserdem noch 10 andere beschlossen, aber nicht vollzogen, die bei dem nächsten Verzeichniss mitgetheilt werden sollen.

Abgewiesen wurden 10 Gesuche.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

November 1871.

(Fortsetzung.)

Jahresbericht des physikalischen Central-Observatoriums für 1870. Ebd. 1871. 4.

Annales de l'Observatoire Physique Central de Russie, Année 1867, 1868. Ebd. 1871. 4.

Josef Körösl vorläufiger Bericht über die Resultate der Pester Volkszählung vom Jahre 1870. (Publicationen des statistischen Bureaus der königl. Freistadt Pest. III.) Pest 1871. 8.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen auf der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1870. Mit einem Anhange: Astronomische Hülfstafeln. Abth. I. Jahrg. 31.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. V. Hft. III. Basel 1871. 8.

VI u. VII Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. Dresden 1870. 8.

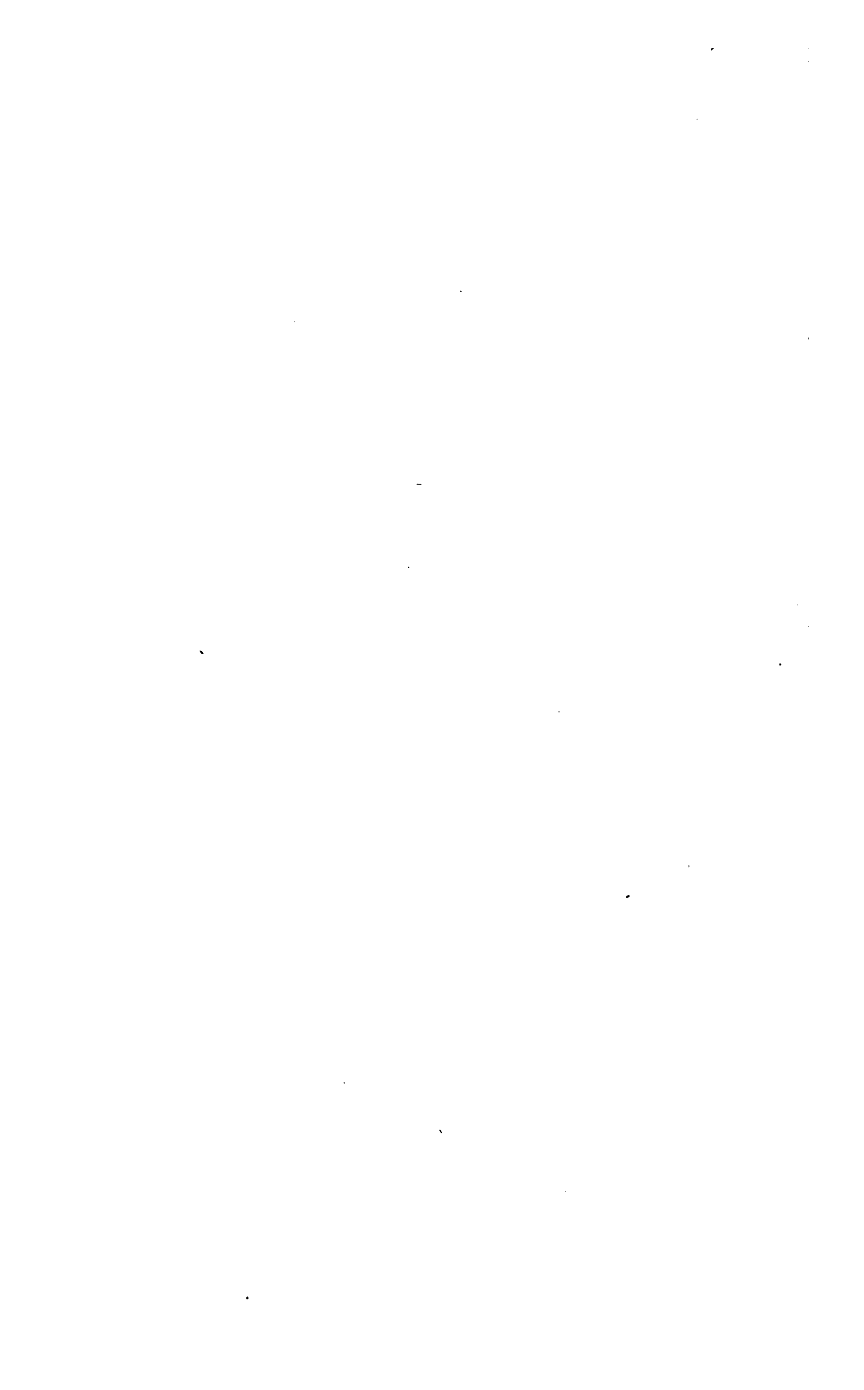
Nachtrag zum VI und VII Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. Ebd. 1870. 8.

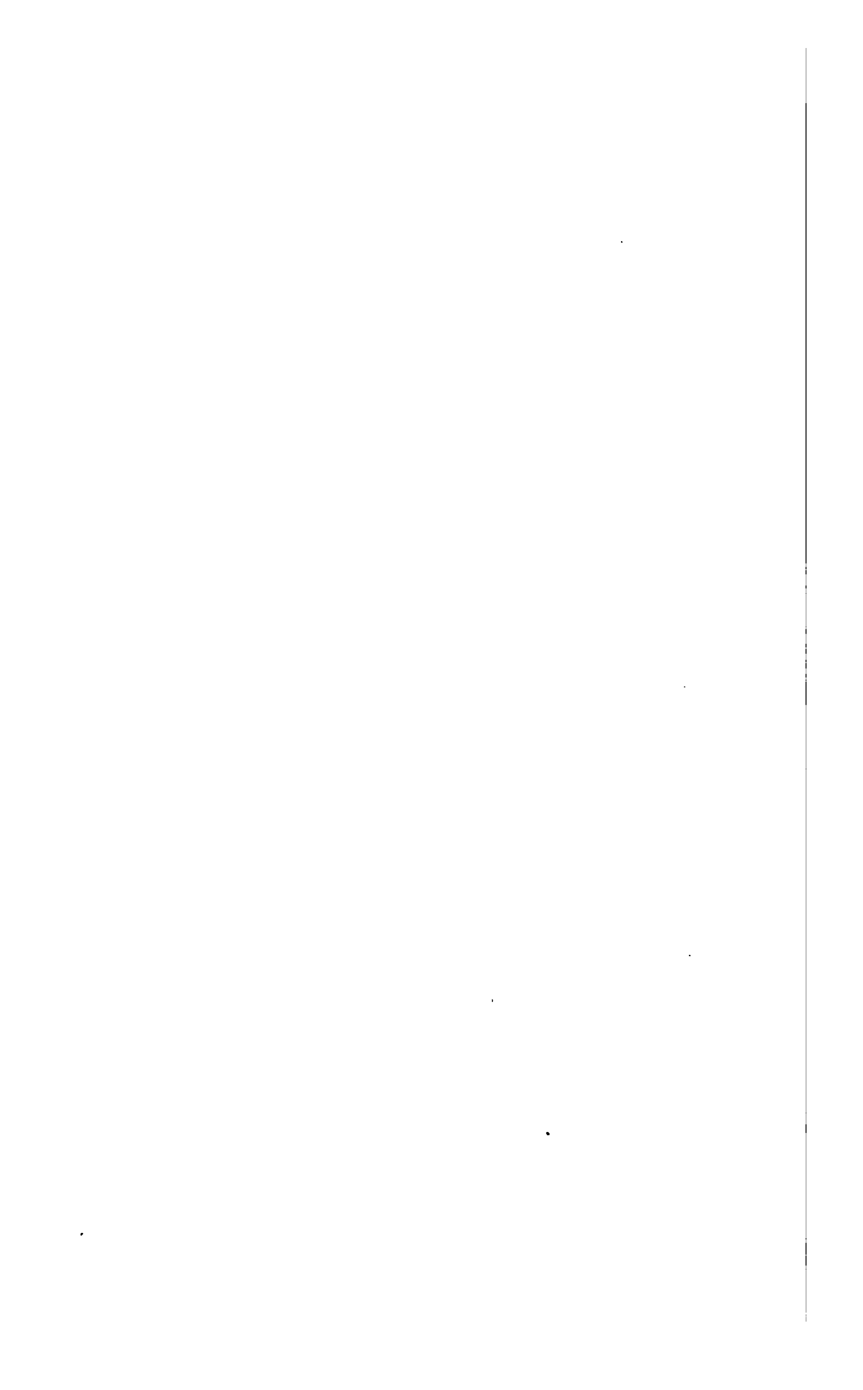
Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Bd. XI. Jahrg. 1870–71. Wien 1871. 8.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. T. XXI. Partie 1. Génève. 4.

Table des Mémoires. I—XX. Ebd. 4.

Flora Batava. Afbeelding en beschrijving van Nederlandsche Gewassen. 216. 217 Aflevering. Leyden. 4.





Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

20. December. № 27. 1871.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Imhoof-Blumer'sche Münzsammlung zu Winterthur.

Wenn auch der heutige Tag zunächst dem Andenken verdienter verstorbener Mitglieder der K. Societät gewidmet ist, so dürfte es doch auch nicht unpassend sein, eines Mannes zu gedenken, der, uns fern stehend, ja nicht einmal dem Bereiche der zünftigen Gelehrten angehörend, der Wissenschaft Dienste geleistet hat und noch leisten wird, die, zumal in unserer egoistischen und dem pecuniären Erwerb ergebenen Zeit, alles Preises würdig sind.

Ich spreche von Herrn Fr. Imhoof-Blumer zu Winterthur, der, eigentlich Kaufmann (Antheilhaber einer Spinnerei und Weberei), eine der bedeutendsten, ja, unseres Wissens, die bedeutendste unter den privaten Münzsammlungen zusammenzubringen gewusst und seine reichen Schätze theils durch eigene Publicationen bekannt gemacht hat, theils, nach einem gefälligen Schreiben an mich, jedem wissenschaftlichen Forscher gern zu Verfügung stellt, »da sein ganzes Streben darauf hinzielt, die Numismatik

den Archäologen und überhaupt der Wissenschaft möglichst zugänglich zu machen«.

Die in Rede stehende Sammlung umfasst drei Abtheilungen von Münzen: 1) des griechischen und römischen Alterthums, 2) der Schweiz, 3) des Mittelalters und der Neuzeit. Das Verhältniss, in welchem diese Abtheilungen zu einander stehen, zeigt, dass die hauptsächlichsten Triebfedern des eifrigen Sammlers feiner Kunstsinn und warmes patriotisches Interesse waren.

Unter den Münzen des classischen Alterthums findet man die griechischen in durchaus überwiegendem Maasse vertreten. Es handelt sich hier fast um 10,000 schön erhaltene Stücke, unter denen 175 von Gold, 4000 von Silber, 5500 von Kupfer, in Beziehung stehend auf 750 Städte und Völker und 250 Könige und Fürsten. Die seltensten Stücke gehören namentlich nach Kleinasien und Sicilien. Manche von ihnen stammen aus den bekannten versteigerten Sammlungen von Dupré und Gréau, die sicilischen zum grossen Theil aus der früheren Fischer'schen zu Palermo.

Die römischen Münzen beziffern sich nur auf 2500, worunter 60 goldene und 1100 silberne; aber sie sind fast alle Prachtstücke. Man findet 148 römische Familien durch ihre Münzen vertreten. Als eine Hauptzierde gelten die ausgezeichnet erhaltenen Medaillons römischer Kaiser, unter denen namentlich dasjenige das Lucius Verus hervorgehoben wird.

Die Abtheilung der schweizerischen Münzen enthält mehr als 10,600 Stücke von Gold, Silber, Billon u. s. w. Sie gilt als die wichtigste Sammlung ihrer Art, nicht bloss unter den privaten, sondern auch unter den öffentlichen. Es verdient auch ausserhalb des engeren Vaterlands

des Besitzers die höchste Anerkennung, dass dieser den kostbaren Schatz von mindestens 50000 Frcs. Werth seiner Vaterstadt als Geschenk zugesichert und dadurch auch der Wissenschaft für die Zukunft eine nicht versiegende Quelle erhalten hat.

Die Zahl der sonstigen mittelalterigen und modernen Münzen endlich ist 2200.

Die Publicationen Herrn Imhoof's betreffen fast ausschliesslich die griechischen Münzen. Der Eifer, mit welchem derselbe, nachdem er »sich erst vor sieben oder acht Jahren ans griechische Alphabet gemacht hat«, es sich angelegen sein liess, sich die zum Verständniss des zu behandelnden Materials unumgänglich nöthigen Kenntnisse zu erwerben, verdient das grösste Lob.

Zuerst machte Hr. Imhoof in den Berlin. Blättern für Münz- Siegel- und Wappenkunde Bd. V, S. 32 fg. und Taf. LIII und LIV eine Reihe grossgriechischer und sicilischer Münzen von manichfachem Interesse bekannt. Um nur Einiges hervorzuheben, so glaubt Herr Imhoof nach S. 59 in der hier beschriebenen Silbermünze von Syrakus eine Viertellitra zu besitzen, während Th. Mommsen der Ansicht war, dass diese Stadt kleinere Stücke als Hemilitren in Silber nicht geschlagen habe. Auf Taf. LIV ist unter n. 11 eine Silbermünze mit der rückläufigen Inschrift *πανοϱMITIKON* herausgegeben, eine Aufschriftform, die auf Münzen anderer Herkunft jetzt wohl bekannt (vgl. namentlich H. de Longpérier Tétradrachme inéd. de Delphes, Extr. de la Rev. num., N. Sér., t. XIV, 1869), aber für Panormus, wie für ganz Sicilien, neu ist (Imhoof, a. a. O. S. 53). Wir sind gespannt darauf, wie Hr. Imhoof den von dem genannten französischen Gelehrten p. 4. A. 1 ausgesprochenen Verdacht

zurückweisen wird. Taf. LIII, n. 2 bringt eine Münze von Herakleia mit dem Namen des für diese Stadt sonst unbekannten Stempelschneiders Aristoxenos, der, was auch sehr singulär, auf beide Seiten der betreffenden Münze gesetzt ist, vollständig auf die Vorderseite, mit Weglassung der drei letzten Buchstaben auf die Rückseite. Ueberall ist Hrn. Imhoof's Sammlung auffallend reich an solchen Stempelschneidernamen, die bekanntlich, abgesehen von einer oder einigen kretischen und einer klazomenischen, dann vielleicht einer makedonischen und einer syrischen Königsmünze, nur auf Münzen von Sicilien und einiger wenigen Städte Lucaniens vorkommen. Sie sind jetzt sorgfältig behandelt in der Schrift von Alfred von Sallet »Die Künstlerinschriften auf griech. Münzen«, Berlin 1871, S. 14, 23, 24, 33 fg., 44, 45. In kunstmythologischer Hinsicht sind von besonderem Interesse die auf Taf. LIII, unter n. 7 und 9 herausgegebenen, S. 45 fg. besprochenen Silbermünzen von Himera. Den Typus auf dem Revers der ersten kennen wir im Allgemeinen durch Torremuzza t. XXXV, 10 (Mionnet Descr. I., p. 240, n. 264) und XXXVII, n. 6 (Mionnet I, 241, 273), wohl auch durch Mionnet I, 241, 270, am genauesten, wenn auch nicht am vollständigsten durch Combe Vet. reg. et pop. num. pl. 30, n. XX und XXI (Panofka »Von dem Einfluss der Gottheiten auf die Ortsnamen« in den Abhdl. d. K. preuss. Akad. d. Wissensch. v. J. 1841, Taf. VI, n. 26). Jetzt kann an dem Umstande, dass die auf dem Bock reitende Figur, welche Panofka auf Himeros bezog, Hermes ist, kein Zweifel mehr obwalten, da das Kerykeion im linken Arm feststeht. Ob dieser aber auf der Muschel, die er mit der rechten Hand an den Mund hält, blase, wie angenommen ist, steht meines Er-

achtens sehr dahin, obgleich ich mich wohl daran erinnere, dass die Herolde sich der Salpinx bedienten. Vielmehr scheint die Muschel als Trinkgefäss zu fassen zu sein, als welches sie jetzt mehrfach nachgewiesen ist (Engelmann in der Arch. Ztg. 1870, S. 375). Hermes mit dem Trinkgefäss ist auch sonst bekannt, vgl. das Vasenbild D. a. K. II, 41, 486). Es handelt sich demnach um einen bacchischen Hermes, wie er auf diesem Vasenbilde neben einem Silen erscheint, und es kann selbst die Frage sein, ob man den Bock als eigentliches Attribut des Hermes (Jahrb. von Alterthumsfreunden in Rheinlande XXXVII, S. 124 fg.) oder als bacchisches Thier zu betrachten hat. — Die andere Münze zeigt den durch Aufschrift beglaubigten Kopf des Kronos auf dem Avers und einen Blitz zwischen zwei Gerstenähren auf dem Revers. Der Kopf ist ohne die sonst gewöhnliche Verhüllung (was indessen auch sonst vorkommt, z. B. auf dem Denar der gentes Neria und Cornelia in den D. a. K. I, 65, 340), aber mit dem Diadem geschmückt. Hr. Imhoof schliesst S. 46 mit Recht, dass auch der bärtige mit einem Diadem versehene Kopf auf der Münze von Himera bei Torremuzza Auct. II, pl. III, n. 8, welche einer früheren Zeit angehört, als der des Kronos zu betrachten sei. Der Revers beider Münzen steht zu dem Avers nicht in näherer Beziehung.

Dann behandelte Hr. Imhoof in G. W. Huber's »Numismat. Zeitschrift« Bd. III, 1871, »die Flügelgestalten der Athena und Nike auf Münzen«. In dieser auch abgesondert im Selbstverlag des Verfassers, Wien 1871, erschienenen Abhandlung, bezüglich welcher zu wünschen ist, dass sie mehrfach Nachfolge finden möge, indem sie einem wesentlichen Bedürfniss für die Disciplin der

Kunstmythologie entspricht, sucht der Verfasser hauptsächlich darzuthun, dass geflügelte Athenabilder der griechischen Kunst keinesweges fremd waren. Wenn dieser Umstand denjenigen unter den Archäologen, die es nicht versäumten den Münztypen ihre Aufmerksamkeit zuzuwenden, auch keinesweges unbekannt war, so ist es doch von dem Verfasser nicht bloss durch Beibringung neuen Materials sicherer gestellt, sondern auch historisch genauer bestimmt, wobei ihm übrigens zu meinem Bedauern unbekannt geblieben zu sein scheint, dass die von E. Beulé unter dem Titel Une drachme de Conon in der Revue num. fr., N. S., T. III, 1859, herausgegebene und erläuterte atheniensische Silbermünze mit der Darstellung einer weiblichen Halbfigur, welche auf dem Kopfe einen Helm und in der linken Hand das Palladium trägt, von mir in den Denkm. d. a. Kunst. Bd. II, zu der Wiederholung auf Taf. XX, n. 220, den auf die geflügelte Athena bezüglichen Monumenten zugesellt ist: eine Ansicht, welche durch das Ergebniss der Untersuchungen Hrn. Imhoof's, nach dem in dem Zeitraume vom Ende des sechsten bis zu Anfang oder Mitte des vierten Jahrhunderts v. Chr. den Münzstätten des eigentlichen Hellas, mit einziger Ausnahme der ältesten Münzen von Elis, die Darstellung der selbstständigen Nike fremd geblieben ist, auf das Beste bestätigt wird[1]). Die detaillirten Darlegungen über die Nike auf den autonomen griechischen Münzen sind überall reich an neuen Ergebnissen. Wenn der Verfasser, der mit Recht die früher auf eine Sirene bezogene Flügel-

1) Die Pallas mit Fussflügeln (Cicero de nat. deor. III, 23, Ttetzes z. Lyrophr. 835) ist auf Bildwerken noch nicht nachgewiesen.

figur auf den Münzen von Terina als Nike betrachtet, mit den der Nike »fremdartigen Attributen« der Taube und des Spielballs nicht fertig werden kann, so möchten wir daran erinnern, dass diese Attribute dem Kreise der Aphrodite angehören, zu welcher Nike eine sehr nahe Beziehung hat. Das Wassergefäss, welches der betreffenden Figur ein paar Male beigegeben ist, bezieht sich aller Wahrscheinlichkeit nach auf die Eigenschaft der Nike als Opferdienerin, wie schon Stephani »Der ausruhende Herakles« S. 258 vermuthete, der nicht erst im Compte rendu de la commiss. imp. arch. de St. Petersbourg p. 1866, p. 50, sondern schon in jener Schrift die Beziehung der Flügelfrau auf den Münzen von Terina richtig erkannt hat. Die übrigen Attribute dieser Nike bedürfen der von Alfred von Sallet a. a. O. S. 11 vermissten Erklärung durchaus nicht[1]).

Wir bemerken hienächst, dass eben jetzt eine

1) Unter den durch eigenthümliche Attribute oder attributive Handlung beachtenswerthen Darstellungen der Nike auf Münzen vermissen wir in der reichen Zusammenstellung von einschlägigen Münztypen, welche die Schrift Hrn. Imhoof's enthält, namentlich zwei: die schwebende Nike mit Waage und Palmzweig auf den Münzen von Palmyra in Mionnet's Descr., Suppl. T. VIII, pl. XV. n. 1, Annali d. Inst. di corr. arch. Vol. XXXII, t. B., n. 2, Berlin. Blätter für Münzkunde Bd. I. Taf. VIII, n. 19, und die stieropfernde Nike, welche uns auf zwei von F. Lajard Recherches sur le culte u. s. w. de Vénus pl. XI, n. 7 und 8 abbildlich mitgetheilten Münzen entgegentritt, durch deren letztere, moyen bronze autonome, frappé sous la domination des empereurs romains, mit dem Pallaskopfe auf dem Avers Bursian's Ansicht in dem Art. »Griech. Kunst« in der Encyclop. d. Wissensch. und Künste, Sect. I, Bd. LXXXII, S. 435, A. 22, bestens bestätigt wird, wie auch O. Jahn »Die Entführung der Europa auf ant. Kunstwerken«, Wien 1870, S. 11. bemerkt hat.

andere monographische Arbeit Herrn Imhoofs unter der Presse ist, unter den Titeln: »Zur Münzkunde und Paläographie Boeotiens, Anaktorion, Argos, Lepsimandos, Tempelschlüssel auf Münzen«, die ebenfalls zu Wien und zwar bald herausgegeben und sehr viel Neues bringen wird, um zu der wichtigsten seiner bisherigen Publicationen überzugehen.

Diese ist der Choix de Monnaies grecques du cabinet de F. Imhoof-Blumer, Winterthur 1871. Das Werk enthält auf neun Tafeln in Grossfolio Abbildungen von 268 Münzen; darunter auch vier römische. Dieselben sollen noch durch einen ausführlicheren Text erläutert werden. Für jetzt hat sich der Herausgeber mit kurzer Angabe der Heimathstätten der einzelnen Münzen begnügt, denen dann und wann auch Andeutungen über die Bedeutung und Beziehung der Typen hinzugefügt sind. Die Münzen, welche auf den Tafeln abbildlich mitgetheilt sind, die gestochenen Tafeln und der ausführlichere Text, welcher sie begleiten sollte, haben ein eigenthümliches Geschick gehabt: sie haben herrenlos die beiden letzten Belagerungen von Paris ausgehalten, die ersten ohne Schaden zu nehmen, der letzte, von dem schon einige Bogen gedruckt waren als die erste Belagerung der Stadt begann, um einer gänzlichen Umarbeitung Platz zu machen, da die mittlerweile fortgesetzten Studien des Verfassers diesem eine gänzliche Umarbeitung räthlich erscheinen liessen.

Die Forscher, welche Herr Imhoof bereits jetzt mit seinem Werke beschenkt hat, werden ihm das im Interesse der Wissenschaft besonders danken. Die Kupfertafeln enthalten schon allein einen grossen Schatz. Sie sind vom rühmlichst bekannten, in dieser Art von Arbeit besonders

geübten Künstler Dardel mit Hülfe der Correcturen Imhoof's so ausgeführt, dass alle (bis auf das Detail einer einzigen) als durchaus zuverlässig gelten können.

Wie viel das sagen will, weiss jeder, der sich mit den Münztypen nach den Originalen und nach den Abbildungen beschäftigt hat. Wie manche Irrthümer sind durch die ungenauen Abbildungen, welche die Numismatiker den Archäologen boten, veranlasst worden!

Um die Nachweisung dieses Umstandes hat sich in neuerer Zeit die grössten Verdienste erworben der besonders kundige und sorgfältige Director des Berliner Königlichen Münzcabinets Julius Friedlaender. Um nur ein Beispiel hervorzuheben, das uns besonders nahe liegt, so hatte Sestini eine Bronzemünze von Orchomenos herausgegeben, welche auf dem Avers eine knieende nakte Artemis mit dem Bogen in der linken Hand und dem Hunde hinter der Göttin, auf dem Revers aber eine auf einem Felsen sitzende nackte Gestalt mit angefesselten Armen zeigt. K. O. Müller nahm die Sestinische Abbildung in die Denkm. d. a. Kunst Bd. II, Taf. XVII, n. 187 auf und bezog die Darstellung auf die im Bade überraschte Diana einerseits, und auf den an einen Felsen gefesselten Aktäon andererseits, an welchen schon Sestini mit Rücksicht auf Pausan. IX, 38, 4 gedacht hatte. Ich machte in meiner Bearbeitung der betreffenden Abtheilung der Denkmäler die Bemerkung, dass die Auffassung der Artemis durch Müller ohne Zweifel irrig sei; es handle sich vielmehr um die Göttin als Bogenschützin. Die von Sestini in Abbildung gegebene Münze befindet sich seit längerer Zeit in München. Sie ist nur sehr unvollkommen erhalten. Vor einiger Zeit kam

ein zweites Exemplar in die Königl. Sammlung zu Berlin, das von Jul. Friedlaender zuerst in Gerhard's Arch. Ztg. Jahrg. XXII, 1864, Taf. CLXXXVIII, n. 4, dann auch in den Berlin. Blätt. für Münzkunde 1868, Taf. XV, 3 abbildlich mitgetheilt und besprochen ist. »Hier wird die für Aktäon gehaltene Gestalt durch ihr langes faltenreiches Gewand deutlich als weiblich bezeichnet; sie ist in lebhafter Bewegung, zurückfallend, mit offenem Munde, ein grosser Pfeil hat sie in den Busen getroffen, hinter ihr ist ein Knabe in ähnlich bewegter Stellung, welcher in den Falten ihres fliegenden Gewandes Schutz zu suchen scheint. Die bogenschiessende Artemis der Vorderseite lässt die rechte Hand hängen, als betrachte sie die Wirkung ihres Schusses«, — man erkennt deutlich die Spuren des enganliegenden kurzen Jagdkleides, sie hat den Köcher auf dem Rücken und trägt Jagdstiefel, — neben ihr scheint nicht ein sitzendes Hündchen dargestellt zu sein, sondern die knieende Hirschkuh« —. Friedländer denkt nun an Artemis als Tödterin der Niobiden. Das ist aber gewiss nicht richtig, nicht sowohl desshalb, weil nur die beiden Personen der Rückseite dargestellt sind, als desshalb, weil diese nicht den Eindruck von Geschwistern, sondern den von einer Mutter und einem kürzlich geborenen Sohne machen. Es handelt sich sicherlich um die Erschiessung einer Gefährtin der Artemis, welche durch die Verletzung der Keuschheit den Zorn der Göttin auf sich gezogen hatte, und zwar um die Maira, Tochter des Argivischen Königs Proitos und der Anteia, von welcher die Sage meldet, dass sie von der Artemis erschossen sei, nachdem sie von Zeus den Lokros geboren hatte, vergl. den Schol. z. Homer. od. XI, 325, der auf Pherekydes zu-

rückgeht, Eustath. z. Homer. p. 1688 a. E. Kürzlich hat Friedlaender in der Arch. Ztg. 1871, S. 79, noch eine andere Münze derselben Stadt bekannt gemacht, auf deren Revers dieselbe Gruppe vorkommt, aber in einem früheren Augenblicke gedacht. Diese Münze spricht ganz besonders für unsere Erklärung. Um einen in Folge eines Schusses der Artemis »niederstürzenden« Knaben handelt es sich hier ohne Zweifel keineswegs. Auch so bleibt es das Wahrscheinlichste, dass die Münzen dem Böotischen Orchomenos angehören. Lokros kam auch in der Böotischen Sage vor als Gehülfe des Zethos und Amphion bei der Erbauung von Theben.

Ich signalisire bei dieser Gelegenheit noch einen Umstand der sich mir neulich bei dem Studium der inhaltsreichen und prächtig ausgestatteten griech. Kunstmythologie von J. Overbeck aufdrängte. Hier wird S. 60 in dem Zeus auf den Münzen bithynischer Könige, welcher, stehend und mit der Linken ein Skeptron aufstützend, in der vorgestreckten und erhobenen Rechten einen Kranz hält, eine Nachbildung des Zeus Stratios von Dädalos vermuthet und S. 270 für diese Ansicht darauf hingewiesen, dass auf einer unter Septimius Severus geprägten Münze von Mylasa Zeus Stratios neben der Streitaxt in der Rechten einen Lorbeer-Kranz in der Linken halte, mit Berufung auf Mionnet III, p. 357, n. 314. Jene Vermuthung hat für uns schon an sich durchaus keinen Schein. Die Mionnet'sche Beschreibung aber erregt wegen der Singularität des Kranzattributs das grösste Bedenken. Wer eine Darstellung des Zeus von Mylasa, wie die bei Pinder »Ueber Cistophoren und Silbermedaillons« in den Abh. d. Berlin. Akad. d. Wissensch. vom J. 1855, Taf. VII, n. 3, betrachtet,

kommt leicht auf die Vermuthung, dass ein undeutlicher, den Kopf zurückwendender Adler für einen Kranz angesehen sein möge [1]).

1) Dass das so ausserordentlich nützliche Werk Mionnet's manche derartige Irrthümer enthält, unterliegt keinem Zweifel. Sicherlich hat ein solcher auf derselben Seite in der Beschreibung einer auch unter Septimius Severus geprägten Münze von Mylasa statt, die unter n. 812 mit folgenden Worten aufgeführt ist: Neptune debout, tenant dans la main droite sou trident posé sur un crabe, et sur la gauche un dauphin. Offenbar handelt es sich um den Zeus Osogos, Zenoposeidon, dessen bildliche Darstellungen aber nicht einen Delphin, sondern einen Adler auf der Linken zeigen. — Overbeck wird gewiss in der Fortsetzung seines viel versprechenden Werks den Münztypen noch grössere Aufmerksamkeit zuwenden als das in dem ersten Bande in löblicher Weise, indessen noch immer nicht in genügendem Umfang geschehen ist. Er wird sich gewiss noch mehr der gehörigen Behutsamkeit und Sorgfältigkeit im Detail befleissigen, die grade auf diesem Gebiete so nöthig ist. Es kann für die Wissenschaft nur nützlich sein, wenn die Pfleger derselben sich redlich auf ihre Irrthümer aufmerksam machen, und ich finde es an sich sehr passend, wenn Overbeck S. 335 »ein Grosserz von Apamea in Phrygien, unter Trajanus Decius geschlagen, Mionnet Descript. IV, 238», als »nicht zum besten abgeb. in den Denkmälern d. a. Kunst II, No. 33«, bezeichnet, vorausgesetzt, dass diese Angabe richtig ist. Der Tadel trifft dann den Zeichner und Radirer für die erste Ausgabe und an zweiter Stelle den Herausgeber K. O. Müller. Dieser giebt im Texte an, dass der Abbildung eine Mionnet'sche Schwefelpaste zu Grunde liege. Daran zu zweifeln habe ich auch keine Veranlassung. Die Paste freilich kann ich nicht vergleichen, da sie mir nicht mehr zu Gebote steht. Die Darstellung entspricht wesentlich der auf der Abbildung bei Bossière Med. ant. du cab. du Roi pl. 29 (wo inzwischen das bei Mionnet angegebene ЄΠC der Inschrift unten im Abschnitte deutlich zum Vorschein kommt), eher nach derselben copirt zu sein. Betrifft der Tadel jene vorn mangelhafte Inschrift, so wiegt er kaum so schwer als derjenige, welcher gegen die auf Overbeck's Münztaf. V, n. 4 mitgetheilte Abbildung der Münze mit

Herrn Imhoof's Choix hat aber keineswegës nur den Zweck, bis jetzt ganz unbekannte oder

der Diktynna wegen der gänzlichen Weglassung der auf die Kreter lautenden Inschrift im Abschnitte gerichtet werden kann. Overbeck hat statt jenes Stückes »ein zweites, unter Valerianus geprägtes Grosserz« abbildlich mitgetheilt auf seiner Münztaf. V, n. 6, gewiss nach eben demselben Schwefelabdruck, von welchem auch mir ein Exemplar zu Gebote steht. Seine Abbildung ist aber nicht genau genug. Der »mit einem Gewand bedeckte Gegenstand«, auf welchen die Frau das Zeuskind gesetzt haben soll (Overbeck a. a. O. S. 336), ist nicht vorhanden. Das Kind nimmt sich vielmehr als auf der linken Lende der Frau sitzend aus. Auch diese macht den Eindruck als ob sie sässe. Auf der unter Trajanus Decius geprägten Münze schreitet dagegen die Frau lebhaft nach links hin und ist auch dem Kinde, welches dieselbe ohne Zweifel mit der Rechten halten soll (wie auch auf der anderen Münze), eine andere Stellung gegeben. Dass jene Darstellung der Originalauffassung näher steht, unterliegt keinem Zweifel. Die unter Valerianus geprägte Münze liefert ein merkwürdiges Beispiel rasch gesunkener Sorgfalt und Kunst im Stempelschneiden. Das tritt auch noch in einer anderen Hinsicht zu Tage. Die frühere Münze zeigt deutlich drei Kureten, zwei behelmte und mit je einem Schilde und Schwerte versehene, welche das Weib mit dem Kinde umgeben, und einen dritten, von dem der unbehelmte nach links gewandte Kopf, so wie der Schild und ein Theil des Schwertes, oberhalb des Weibes zum Vorschein kommt. Auf der späteren Münze erblickt man an der Stelle des Kopfs einen undeutlichen runden Gegenstand, von dem Schwerte keine Spur, der Schild aber nimmt sich ganz so aus als gehöre er zu dem bogenförmigen Gewande des Weibes. Gewiss hat Mionnet, der die betreffende Münze a. a. O. S. 239, n. 270, verzeichnet, mehr Recht, wenn er von drei Korybanten spricht als Overbeck, der die Frau nur von zweien umgeben sein lässt und der Spur des dritten gar nicht Erwähnung thut. Dieser tritt uns an derselben Stelle nicht bloss auf der anderen Münze von Apamea, sondern auch auf den von Maeonia (Mon. inéd. d. Inst. arch. I, t. XLIX, A., n. 2. = Overbeck Münztaf. V, n. 8) und auf der mit dieser zunächst zusammenzustellenden von Seleukeia am Kalykadnos in den

wenig bekannte Münzen zur Kunde zu bringen, sondern auch den, zu zeigen, wie ausserordentliche Werke die antike Stempelschneidekunst hervorgebracht hat. Wir sehen zugleich, wie vortrefflich die betreffenden Exemplare seiner Sammlung erhalten sind. Hieher gehört auf Taf. I, n. 21 die Silbermünze Philipps II. von Makedonien mit dem Kopf des Zeus auf dem Avers und dem Rosswettkampfsieger auf dem Revers, auf Taf. III, n. 95 der Geldstater von Cius Bithyniae mit dem herrlichen Apollokopfe, auf Taf. VIII, n. 254 die Silbermünze von Herakleia in Lucanien mit dem Kopfe der Athena und dem löwenbekämpfenden Herakles, auf welcher sich der Name des bis dahin unbekannten Stempelschneiders Euphr(on?) findet, n. 258 die von Metapont mit dem durch die Unterschrift NIKA erklärten Kopfe der Siegesgöttin, n. 265 die Silbermünze von Eryx mit dem Kopfe der Aphrodite und dem Hunde, ganz besonders aber die eigens zu jenem Behufe auf der neunten Tafel zusammengestellten Münzen des Lysimachos, Antigonos, von Pharsalos, von Athen, von Abydos, von Erythrae, von Tyros (?), eines der Seleukiden mit Namen Antiochos, von Akragas. Man findet darunter Stücke, die bezüglich der Virtuosität der Ausführung wahrhaft staunenswürdig sind.

Der Ertrag, welchen die veröffentlichten Münzen der gelehrten Forschung bieten, ist ein manichfacher und bedeutender. Selbst in numismatisch-geographischer Beziehung lernen wir Neues. Wir sehen vier Städte vertreten, von denen bis dahin keine Münzen bekannt waren:

Berliner Blättern für Münzkunde, Bd. V, 1870, Taf. LVI, n. 81 entgegen. Ueber die Dreizahl der Kureten in Lydien vgl. Eckhel Doctr. num. vet. Vol. III, p. 160.

Pelagia in Epirus Taf. I, n. 30, Skamandria in Troas III, n. 110, Pyrnos in Karien III, n. 139, Poseidion auf der Insel Karpathos III, n. 143.

Die Typen tragen vorzugsweise bei zur Bereicherung und Erläuterung der Kunstgeschichte, Kunstmythologie und der gottesdienstlichen Alterthümer.

Wir können nicht umhin einiges Hiehergehörende zu besprechen.

Schon oben ist ein Kopf der Nike auf einer Münze von Metapont gelegentlich erwähnt. Derselbe »ist mit einem aus aufwärts stehenden Blättern gebildeten Kranz geschmückt« (Imhoof »Die Flügelgest. d. Ath. u. Nike« S. 38, c.). Der Kranz erinnert durchaus an den, welche die von mir auf Nike bezogenen Figuren des Reliefs in den D. a. K. II, 20, 214, a tragen und kann somit zur Unterstützung dieser Erklärungsweise veranschlagt werden. Eine Bronzemünze der Abderiten zeigt uns die *NIKH ΝΕΡΩΝνος*, Taf. I, n. 3. Vom grössten Belang für die Siegesgöttin ist die alte Eleische Silbermünze, ein Didrachmon, auf Taf. II, n. 55, welche Hr. Imhoof der zweiten Hälfte des fünften Jahrhunderts vor Chr. zuschreibt und als zu den ältesten der uns überlieferten Münzdarstellungen der Nike gehörend betrachtet (a. a. O. S. 24 fg.). Ob der Kopf auf der Silbermünze von Anaktorion Taf. I, n. 36, mit der Beischrift *ΔΚΤΙΑΣ* der Nike zuzuweisen ist, wie Hr. I. meint, scheint uns zweifelhaft. Vielmehr wird an die Festgöttin der *Ἄκτια* gedacht werden müssen; vgl. die *Ὀλυμπιὰς* und *Πυθιὰς* bei Athenäos XII, p. 534 d und K. O. Müller Handb. d. Arch. §. 405, A. 5, der selbst die geflügelte Jungfrau auf den Eleischen Münzen auf die Olympia oder Olympias deutete.

Auf Taf. I ist unter n. 10 eine Bronzemünze

von Imbros gegeben, deren Reversdarstellung von der in den D. a. K. II, 28,306 mitgetheilten und anderen im Texte zu dieser von mir berücksichtigten in mehreren Punkten abweicht. Hermes ist deutlich bärtig, mit alterthümlicher Haartracht, das veretrum erectum tritt besonders hervor. Vor ihm im Felde gewahrt man den Caduceus. Er hat den linken Fuss gehoben, ohne deshalb als marchant à droite (Mionnet Descr. de méd. I, p. 342 n. 7) bezeichnet werden zu können. Eher ist anzunehmen, dass er jenen Fuss auf einen (nicht angedeuteten) Gegenstand, etwa einen Felsblock, setze. Vor ihm gewahrt man einen nicht vollständig dargestellten Gegenstand, der schwerlich etwas Anderes als ein Altar oder ein Opfertisch sein kann. Auf die Oberfläche dieses hält der Gott mit der Linken einen Gegenstand, welcher sich wie ein kurzer verhältnissmässig dicker Stab ausnimmt, indem er anscheinend nach der betreffenden Stelle seine Blicke hin richtet, während er mit der Hand des gesenkten rechten Arms einen Zweig fasst. Einen keulenartigen und besonders einen dünneren Stab findet man bei Hermes häufiger, vgl. D. a. K. a. a. O. n. 306 a und b und 319, a u. 309, a nebst Text. Hier hält der Gott das Stäbchen auch schräg von sich hin, aber in sitzender Stellung und ohne dass ein Gegenstand, auf welchen das Hinhalten geschieht, zu sehen ist. Sollte auf der vorliegenden Münze eine Fackel, mit welcher der Gott als Opferer Feuer auf dem Altar anzündet, gemeint sein? Der Gegenstand in der Rechten könnte immerhin auch als ein bei dem Opfer gebräuchlicher Zweig betrachtet werden.

Die Kupfermünze von Aineia in Makedonien Taf. I, n. 15, zeigt auf dem Avers statt

des auf dem Exemplare bei Sestini Lett. num. contin. T. VIII, p. 1, t. I, fig. I. vorkommenden Kopfes der »Diana« den des Aeneas, den wir sonst in ganzer Figur als Träger des Anchises auf Münzen dargestellt zu finden pflegen.

Die Silbermünze von Lete, Taf. I, n. 17, bietet in ihrem Averstypus einen interessanten Pendant zu denen bei M. Pinder »Die ant. Münzen d. K. Mus. zu Berlin« Taf. I, n. 3 und Duc de Luynes Choix de méd. gr. pl. IX, n. 5, wo der mit thierischen Füssen ausgestattete Satyr auch geschwänzt vorgestellt ist.

Von den beiden Bronzemünzen der Magneten in Thessalien auf Taf. I, n. 25 und 26, deren Aversdarstellung die Artemis betrifft, die dort im Kopfbilde, hier in ganzer Figur dargestellt ist, hat die letztere ein namhaftes kunstmythologisches Interesse. Wir sehen die auf einem Sessel sitzende Göttin, nach welcher der zu ihren Füssen befindliche Hund zurückblickt, wie sie, mit der linken Hand eine Lanze aufstützend, in der Hand des rechten ausgestreckten Arms einen kurzen Stab (denn an eine Fackel ist nach der Zeichnung nicht sowohl zu denken) hält, um welchen sich eine Schlange ringelt, die nach der Göttin hinstrebt, während diese, sowohl nach der Haltung des rechten Arms, als auch nach der des Oberkörpers zu schliessen, das Thier nicht an sich kommen lassen will[1]). Die Schlange

1) Aller Wahrscheinlichkeit nach handelt es sich um denselben Typus auf der Bronzemünze, welche Mionnet nach Sestini den Magneten in Ionien giebt und, bezüglich der Reversdarstellung, mit folgenden Worten beschreibt Suppl. VI, p. 235, n. 1023: Apollon à demi nu, assis, tenant de la main droite un serpent avec un bâton, et de la gauche une haste; à ses pieds, un chien le regardant; dans le champ, l'astre Hesperus en contremarque?

ist, so oft sie sich auch bei der dreifachen Gestalt der Hekate findet, ein bei der einfachen Artemis ausserordentlich selten vorkommendes Attribut. Aus Pausanias VIII, 37,2 kennen wir die im Heiligthum der Despoina in Arkadien nebst dieser neben der Demeter stehende von ihrem Hunde begleitete Artemis mit Hirschfell, Köcher auf dem Rücken, Fackel in der einen und zwei Schlangen in der andern Hand. Auf einer Ruvesischen Vase im Bullett. arch. napol. 1853, t. 6 glaubte Welcker Griech. Götterlehre II, S. 494 Artemis neben Apollon mit Jagdstiefelchen versehen, mit Schlangen in beiden Händen und auf der Stirn dargestellt. In den A. Denkm. V, S. 338, z. Taf. XXII spricht er überzeugender von einer Erinys. An die Diana auf einem Schlangengespann, welche Mionnet Suppl. VII, p. 323 fg., n. 49 und 50 als auf zwei Münzen von Aurelíopolis aus der Zeit des Commodus vorkommend nach Sestini und Vaillant anführt, zu glauben, wird mir schwer. Vermuthlich handelt es sich in dem Münztypus der Magneten bloss um ein Spiel mit der Schlange. Die Göttin ist anscheinend mit einer Kopfbedeckung versehen, wie sie dieselbe ja häufiger trägt. Eigenthümlich ist der rundliche mit fünf Kugeln im Kreise um eine sechste versehene Gegenstand, welchen man auf dem Schoosse der Göttin gewahrt. Ein Schild, wie er sonst mit ähnlichen Zierath versehen vorkommt und der Artemis nicht fremd ist, kann nicht wohl gemeint sein. Eher ein Stück von dem Obergewande. Die Kugeln können immerhin siderische Beziehung haben. Auf einem Silberrelief erscheint Diana »wearing a mantle ornamented with stars« (Ch. Newton Trav. and discov. in the Levant I, p. 44).

Auf Taf. II ist unter n. 43 die Bronzemünze der Böoter gegeben, welche Hr. Imhoof in der Abhandl. über die Flügelgestalten der Athena nach diesem Dardelschen Stiche unter n. 1 wiederholt und ausführlicher behandelt hat. Er hält es für sehr wahrscheinlich, dass sie »der Zeit des makedonischen Königs Kassander angehöre und von den ersten Prägungen herrühre, welche nach dem Wiederaufbau ihrer unglücklichen Stadt die Thebaner im Namen des böotischen Bundes wieder aufzunehmen Veranlassung gefunden hatten.« Welcher besondern Auffassung die Figur entsprungen sei, bleibe noch eine schwer zu entscheidende Frage. Wir unseres Theils möchten am liebsten an die *Ἀλαλκομενηΐς* denken, deren Bild nach Aelian V. hist. XII, 57 kurz vor der Zerstörung Thebens von selbst verbrannte und zur Zeit Kassanders wiederhergestellt sein mochte.

Auf den Nachweis, dass die ebenda n. 44 abbildlich mitgetheilte Silbermünze mit einem glockenartigen Gegenstande auf dem Avers und einem sprengenden Rosse auf dem Revers dem böotischen Orchomenos zuzuschreiben sei, und auf die Deutung der Aversdarstellung bin ich sehr gespannt, um so mehr als die entsprechenden Gegenstände seit Jahren meine besondere Aufmerksamkeit erregt haben und bald in einer eigenen Schrift von mir einer neuen Behandlung unterzogen werden sollen.

Für gottesdienstliche Alterthümer hat die unter n. 45 folgende Bronzemünze der Atheniener Interesse, indem sie auf dem Avers zwei Schweine und auf dem Revers einen Gegenstand enthält, welchen Hr. Imhoof als une torche formée de branches de pin bezeichnet. Es wäre in der That überraschend, jenes Thier und die-

sen Gegenstand in den Händen eines Jünglings auf dem berühmten, für den eleusinischen Götterkreis so wichtigen Campana'schen »Vasenkönig« der Petersburger Ermitage in den Händen eines Jünglings wiederzufinden, der ein Schwein und zwei Reisbündel zum Opfer herbeiträgt, vgl. Stephani Compte rendu de la commiss. imp. arch. pour l'a. 1862, pl. III und p. 41. Indessen scheint vielmehr die vermeintliche Fackel mit jenen auch für Fackeln gehaltenen Gegenständen, die auf einigen bemalten Vasen in der Hand von eleusinischen Mysten erscheinen (Denkm. a. K. II, 10, 112 und Compte r. pour 1859, pl. II) und von Stephani für die aus den Schol. zu Aristoph. Eqq. 409 bekannten βάκχοι gehalten werden (im C. R. p. 1859, p. 91 u. 115), zusammenzustellen zu sein.

Unter den Pegasosdarstellungen Korinthischer Münzen, welche Taf. II, n. 47 fg. beigebracht sind, findet sich n. 48 die interessante des an der (nicht angedeuteten) Quelle Peirene seinen Durst stillenden Rosses. Man vergleiche damit den »weidenden« Pegasos auf der Silbermünze Mithradats VI, Eupator, bei Sestini Descriz. d. med. gr. de mus. Hedervariano t. XV, n. 12 und in den Berlin. Blätt. für Münzkunde Bd. II, Taf. XXI, n. 3 und S. 264.

Auf dem Revers der folgenden, unter Antoninus Pius geprägten Kupfermünze von Korinth sehen wir ein Weib, das nach links hineilt, indem es nach rechts zurückblickt. Es hält mit beiden Händen ein bogenförmig hinter dem Haupte wallendes Gewand. Hr. Imhoof betrachtet es als Leukothea. Hiegegen scheint uns zu sprechen, dass von Melikertes keine Spur vorhanden ist, den die sonst allerdings auf Münzen der Colonia Laus Julia Corinthus vorkommende

Leukothea, wo sie sicher ist, trägt. Aus dem eben jetzt erschienenen, sehr lehrreichen Werke Fr. Kenner's »Die Münzsammlung des Stiftes St. Florian in Ober-Oesterreich«, S. 95, ersehen wir, dass sich ein anderes Exemplar der in Rede stehenden Münze im K. K. Cabinete zu Wien befindet. Auf diesem ist neben der Figur »unten als zierliches Beiwerk ein Pferd« sichtbar, durch welches nach Kenner's Meinung »die Deutung der Figur auf Aphrodite gesichert wird, indem diese als Göttin des Meeres zugleich auch Göttin der Pferde ist (Preller Gr. Myth. I, S. 221 fg.« = 270 d. zw. Aufl.). Dardel's Abbildung zeigt auch ein Pferd, aber ganz deutlich ein nach hinten in einen Fischleib auslaufendes, also einen Hippokampen. Vermuthlich handelt es sich auch auf dem Wiener Exemplare um einen solchen. Selbst wenn hier ein gewöhnliches Pferd dargestellt wäre, würde dieses nichts für Aphrodite beweissen. Wie passt die Situation der Figur, die offenbar in hastiger Eile, sich umschauend, entweder aus Angst oder um zu suchen, vorgestellt ist, auf diese Göttin? Kenner stellt die betreffende Figur mit der auf Korinthischen Münzen mit dem Aversbilde der Plotina und des Antoninus Pius (Mionnet II, 179 226, Suppl. IV, 88, 592) zusammen, die er nicht wie gewöhnlich geschieht, auf die Isis Pharia, sondern auf die Aphrodite Euploia bezieht. Dieser Typus wiederholt sich auf dem Revers einer von ihm a. a. O. Taf. III, Fig. 9 herausgegebenen Bronzemünze von Kleonae in der Argolis mit dem Brustbilde des Elagabalus (?) auf dem Avers. Hier ist das Haupt der Figur nach seiner Angabe mit Myrtenzweigen bekränzt, die wir dahin gestellt sein lassen müssen, aber durchaus nicht als für die Aphrodite gegenüber der

Isis sprechend gelten lassen können, während der in der Abbildung oben auf dem Kopfe sichtbare Gegenstand mehr für diese als für jene zeugt. Auf anderen Münzen von Kleonae kommt, wie Kenner bemerkt, ein Pharus und die »Entführung der Europa« vor. Allein die letztere ist gewiss nicht gemeint, sondern Isis Pharia-Astarte auf dem Stier, ebenso wie auf dem nur durch einen Abdruck Stosch's bekannten geschnittenen Steine, den Winckelmann Descr. d. pierr. grav. p. 57, n. 157 und Raspe Catal. Tassie n. 1153 verzeichnen und jüngst Stephani Compte r. pour l'a. 1866, p. 167 fg. besprochen hat. Aller Wahrscheinlichkeit nach hatte zu Kleonae ebensowohl Isiscult statt, wie zu Korinth, wo die Göttin nach Pausan. II, 4,7 in zwei Heiligthümern als Pelagia und als Aegyptia verehrt wurde. Die spätere Verschmelzung der Io und Isis und Astarte und der betreffenden Sagen ist bekannt, vgl. Preller a. a. O. II, S. 44 d. zw. Aufl. Die in Rede stehende Figur der Korinthischen Münze ist zunächst als Isis Pharia zu bezeichnen. Der Hippokamp dient nur zur Andeutung der bimaris Corinthus.

Den Reverstypus der unter Geta geprägten Korinthischen Münze auf Taf. II, n. 51 bezieht Hr. Imhoof, ohne Zweifel mit Rücksichtnahme auf Pausan. II, 1,7, richtig auf den Poseidonstempel des Isthmos.

Manichfach Interessantes bieten die auf Taf. II von n. 64 bis n. 68 zusammengestellten Münzen von Argos. Die erste zeigt den Kopf der Hera und, auf dem Revers, den Tempelschlüssel in der bekannten Bildung mit den στέμματα daran. In dem Gegenstande auf dem Averse der zweiten erkennt Hr. Imhoof die forme archaique du »spiritus asper«. Ich glaube vielmehr, dass

ein heiliges Geräth oder ein Symbol gemeint ist, welches ich auch anderswo nachweisen zu können vermeine, ohne bis jetzt über Bedeutung und Bestimmung ganz im Klaren zu sein. Oder wäre in dem vorliegenden Falle ein Diptychon zu erkennen, welches sich — was sehr beachtenswerth — auf einem bekannten Berliner Vastengemälde in der Hand des Argos findet, und wäre dasselbe mit Panofka Argos Panoptes, Berlin 1838, S. 80 fg. auf Mysterien oder doch heiligen Dienst zu beziehen, wie allem Anschein nach auf dem Relief in D. a. K. II, 49, 605? — Unter n. 66 tritt uns auf einer Bronzemünze aus der Regierungszeit Antonius des Frommen eine eigenthümliche Darstellung der Verfolgung der Amymone durch Poseidon entgegen, der vollständiger als auf dem späteren Bildwerken in der Regel, mit einem langen Chiton und ausserdem mit einem kleinen Himation angethan erscheint, also wohl einem früheren Bildwerke entlehnt ist. Noch eigenthümlicher ist der Typus des Reverses der unter Septimius Severus geprägten Bronzemünze n. 67. Perseus und Athena legen die Hände, jener die linke, diese die rechte, an den Medusenkopf, der (ob an der Aegis angebracht?) an einer Lanze oder Stange aufgesteckt scheint, welche auf oder hinter einem Altare zwischen dem Heros und der Göttin steht. Jener und diese haben dabei ihr Gesicht nach links gewandt. Es sieht ganz so aus, als wollten beide das Gorgoneion einem oder mehreren Anderen zeigen (was ja die Sage von Perseus berichtete: Pausan. II, 22, 6). Dass statt eines Altares an einen Brunnen zu denken sei, wie derselbe auf zwei Vasenbildern dargestellt ist (O. Jahn in den Ber. d. K. sächs. Ges. d. Wissensch. 1847, S. 287 fg., Minervini Memorie accadem.,

t. 1) hat gar keine Wahrscheinlichkeit. Der Münztypus führt uns etwas vor, worüber bei Schriftstellern keine Nachricht erhalten ist. — Die unter demselben Kaiser geprägte Bronzemünze n. 88 enthält auf ihrem Reverse eine Darstellung, welche sehr an die von Millingen Sylloge of anc. uned. coins of gr. cit. and kings pl. III, n. 32 herausgegebene erinnert, aber doch in mehreren nicht unwesentlichen Punkten von derselben abweicht. Die schon früher bekannte Münze hat so eben eine weitere Besprechung durch Kenner a. a. O., S. 89 fg. erhalten, der mit ihr eine andere argivische Münze aus der Kaiserzeit in Verbindung bringt. Ich meines Theils muss gestehen, dass mir selbst die ziemlich allgemein angenommene Beziehung des Typus jener Münze auf Leto und Meliboia-Chloris, der sich auch Hr. Imhoof für die seinige anschliesst, sehr zweifelhaft erscheint.

Recht interessant würde es sein, wenn es Herrn I. gelänge, die Deutung des Kopfs auf dem Avers der Silbermünze von Troezen, n. 70, mit welchem zusammenzustellen ist der der Bronzemünze bei Mionnet II, p. 242, n. 86, auf die Artemis Lykeia sicher zu stellen.

Sehr belehrend sind die auf Taf. II, n. 71 bis 79 und Taf. III, n. 81 und 82 zusammengestellten älteren und späteren arkadischen Münzen. Von jenen hat kürzlich auch Overbeck Kunstmyth., Münztaf. II, n. 1—3, einige herausgegeben, darunter auch eine (n. 2), welche den Artemiskopf mit dem von griechischen Vasen her bekannten Haarsacke zeigt, den Adler auf den Lykäischen Zeus zufliegend, wie auf zwei besonders alten Münzen des britischen Museums (Combe a. a. O. p. 143, n. 1 u. 2, pl. VIII, n. 5), den Gott aber nur mit einem gewöhnlichen

Scepter, nicht mit dem sceptre à palmette, welchen Hr. Imhoof an seiner n. 76 besonders hervorhebt. Ausser den Münzen mit dem thronenden Zeus Lykaios, der sich bekanntlich auf Münzen von Kyrene wiederholt (L. Müller Numism. de l'anc. Afrique Vol. I, p. 49 u. 67, Overbeck a. a. O. n. 15, wo der auch auf S. 153 falsch angegebene Magistratsname ΘΕΥΦειδευς sein musste), findet sich unter den archaischen Münzen Arkadiens in I. s Choix auch eine, n. 79, die den Gott stehend und zwar nach dem gewöhnlichen Gebrauch des Lebens auf einen unter die linke Achsel gestellten Knotenstock gestützt darstellt; er hält auf der Rechten den Adler und macht mit der Linken eine Geberde, indem er sich nach links hin umblickt. Allem Anschein nach handelt es sich hier um eine Figur, die aus einer Gruppe entlehnt ist. Etwa aus einer von Zeus und Lykaon?

Unter n. 86 finden wir auf Taf. III eine alterthümliche Silbermünze von Gortyn auf Kreta mit dem Typus der auf dem Stier sitzenden Europa für den Avers und dem des Löwenkopfs oder genauer des Löwenkopffells für den Avers. Sie steht hinsichtlich der Darstellung auf dem Avers der im Besitz des Generals Fox befindlichen, von diesem in den Gr. coins I, pl. X, n. 109 herausgegebenen, von Numismatikern und Epigraphikern wiederholt besprochenen, den beiden Archäologen aber, welche zuletzt über Europa gehandelt haben, gänzlich unbekannt gebliebenen Münze derselben Stadt, von welcher wir so eben die Fox'sche Abbildung des Averses und Reverses auf Taf. III des zweiten Bandes der nächstens in einer neuen Auflage herauszugebenden Denkmäler der alten Kunst n. 40, b haben wiederholen lassen, am nächsten, nur dass

bei minder roher Ausführung der Stier nach links hin schreitet, die Gewandung der Europa etwas abweicht und der Delphin unter dem Stier fehlt. Auf dem Revers aber fehlt jene Inschrift um das Löwenkopffell, welche dem Fox'schen Exemplare ein so grosses Interresse verleiht, ohne dass dafür eine die Prägestätte der Münze bezeichnende Inschrift auf der Vorderseite zu finden wäre. Das Fox'sche Exemplar ist aus stylistischen und epigraphischen Gründen als das allerälteste zu betrachten; es ist entschieden viel älter als die ebenfalls alterthümliche Münze von Gortyn, welche uns in zwei nicht ganz gleichen Exemplaren durch Abbildungen schon länger bekannt ist (vgl. Millingen Syll. of anc. coins pl. III, n. 34, Lenormant Nouv. gal. pl. IX, n. 11, Mionnet Descr. de méd., Suppl. T. IV, pl. IX, n. 5), von welchen das eine kürzlich O. Jahn „Die Entführung der Europa auf alten Kunstw." Taf. IV, und Overbeck, Griech. Kunstmythologie, Münztaf. VI, n. 1, dieser aber nur den Avers, wiederholt haben. Die Inschrift des Fox'schen Exemplars wurde von Leake Num. hellen., Insul. Gr., p. 18 gelesen *Γόρτυνος τὸ ΣΑΙΜΑ*, welches letzte Wort er für identisch mit *σῆμα* hielt. Dieser Lesung und Deutung schlossen sich an R. Stuart Poole Numismatics in der Encyclop. brit. p. 373 der achten Ausg., Fox a. a. O. S. 27, und L. Thenon in der Rev. archéol., Nouv. Sér. T. VIII, Paris 1863, p. 444, trotzdem, dass in der von ihm herausgegebenen alterthümlichen Bustrophedon-Steininschrift von Gortyn das erste Zeichen des betreffenden Wortes der Münzinschrift, Ͻ, für *π* gebraucht ist, ja noch Ch. Newton On an Electrum stater, possibly of Ephesus, London 1870, wo übrigens der Ausdruck *σῆμα* für »coin« nach-

gewiesen wird; während A. Kirchhoff, welcher das Zeichen zuerst für ein $\bar{\varphi}$ gehalten hatte, nachdem ihm die Bustrophedoninschrift aus der Rev. arch. bekannt geworden war, das in Rede stehende Zeichen für $\bar{\pi}$ gebraucht erachtete, vgl. Studien z. Gesch. d. griech. Alphabets, zweite Aufl., Berlin 1867, S. 54 und 136 fg. Dieselbe Ansicht hatte schon lange vorher vorgetragen Fr. Lenormant in der Rev. arch., N. S., T. IX, 1864, p. 103 fg. In dem Umstande, dass das dritte Zeichen in dem letzten Worte der Münzaufschrift ein $\bar{\iota}$ sein solle, stimmen alle obigen Gelehrten überein. Aber mit *ΠΑΙΜΑ* lässt sich in sprachlicher Beziehung ebensowenig etwas machen als mit *ΣΑΙΜΑ*. Freilich hat, während ein Sprachkenner wie Kirchhoff erklärte, dass ihm der letzte Theil der Aufschrift der Gortyner Münze nicht verständlich sei, Fr. Lenormant sie zu verstehen vermeint, indem er *παῖμα* von *παίειν* ableitete und mit *τύπος* von *τύπτειν* verglich und somit deutete *le type* (est celui) *de Gortyne*, also in dieser Münzinschrift einen Pendant fand zu der aus des Duc de Luynes Essai sur la numism. des Satrap., 1846, pl. VI und p. 45 bekannten: *ΣΕΥΘΑ ΚΟΜΜΑ*, Ansichten, die in Frankreich selbst bei einem so tüchtigen jungen Gelehrten wie H. de Longpérier Tétradrachme inéd. de Delphes, Extr. de la Rev. num., N. S., T. XIV, 1869, p. 4 Anklang fanden, bei uns in Deutschland aber ohne bessere Begründung unzulässig befunden werden werden. Allein täuscht uns nicht Alles, so soll weder das erste Zeichen der Münzaufschrift ein $\bar{\sigma}$ oder selbst ein $\bar{\pi}$, noch das dritte ein $\bar{\iota}$ bezeichnen. Man thut ohne Zweifel Unrecht, wenn man die viel ältere Bustrophedoninschrift als absolute Norm für die Münzaufschrift geltend macht. Betrachten wir diese

genauer, so finden wir, dass das ῑ dort dem hier als ῑ gefassten Zeichen keineswegs vollständig entspricht. Das vermeintliche ῑ der Münzaufschrift lehnt sich nun aber grade so an eine der Ecken des durch erhabene Linien hergestellten Vierecks, welches das Löwenkopffell umgiebt, dass man annehmen kann, der schräge Strich eines Ϻ zumeist nach rechts solle durch eine Seitenlinie des Vierecks zugleich mit vertreten werden oder sei weggelassen, weil es wegen dieser an Platz für ihn fehlte. War das der Fall, so war ein σ̄ gemeint. Das erste Zeichen der Münzaufschrift aber, Ͻ, wird man sicherlich mit dem ersten Zeichen der Aufschrift älterer Münzen von Phästos auf Kreta für identisch zu halten haben, vgl. Mionnet Descr., Atlas, pl. XXXV, n. 145, Pinder's Verz. d. ant. Münzen des K. Mus. zu Berlin, Taf. I, n. 5 nebst S. 55, auch Streber in den Abhdl. der phil. Cl. d. K. bayer. Akad. d. Wissensch. Th. I, Taf. II, n. 3 = Denkm. d. a. Kunst Bd. II, Taf. III, n. 39, wo freilich das Zeichen die Form ϑ hat, welche auch durch Streber S. 161 fg. ausdrücklich bezeugt wird. So erhalten wir das Wort *φάσμα*. Dieses Wort kommt in der That in der Bedeutung von *γνώρισμα, σύμβολον* vor, bei Philostrat. sen. Imagg. I, 15, wie Heyne richtig bemerkte und auch Welcker in der Ausgabe der Imagg. p. 299 annahm.

Ob in der interessanten Figur auf dem Revers der Silbermünze von Sinope eine »divinité du culte égyptien« zu erkennen sei, scheint uns sehr fraglich. Es liesse sich doch mit grösserer Wahrscheinlichkeit, wie wir meinen, an einen Hermes denken.

Unter den Typen der Elektronmünzen von Kyzikos Taf. III, n. 98 bis 102, welche dem

Kreise der griech. Mythologie angehören, nimmt besonders der sehr sorgfaltig ausgeführte spitzbärtige Kopf n. 100 Interesse in Anspruch, den auch Mionnet Descr. II, p. 527, n. 73 und p. 528, n. 80 beschreibt. Wer nicht an einen bärtigen Apollon denken will, der allerdings nicht unerhört wäre, wird sich wohl zur Annahme eines Hermes entschliessen müssen, obgleich dieser Gott auf den Münzen von Kyzikos nur sehr selten vorkommt. — Die Figur auf n. 102 fällt in den Bereich des mittelasiatischen Religionskreises, vgl. Lajard Culte de Vénus pl. XVII und p. 130 fg.

Der Athenakopf auf dem Avers der Silbermünze von Lampsakos n. 103 zeichnet sich durch das seltene Helmemblem eines Löwenkopfs aus und erinnert dadurch an die Pallas in der Villa Albani (Clarac Mus. de sculpt. pl. 742, Braun Tages, Taf. V, Vorschule zur Kunstmythol. Taf. 70, Gerhard »Metroon zu Athen« u. s. w., Berlin 1851, Taf. II, n. 5) und noch mehr an den Pallaskopf auf dem Goldblättchen in den Antiq. du Bosphore cimmér. pl. XXI, n. 2.

Die unseres Wissens bisher nicht bekannte Bronzemünze von Ilium Troadis Taf. XVI, n. 109 zeigt auf der Vorderseite laut der Aufschrift die einander zugewandten Köpfe des Galba und der *CYNKΛHToC*, auf der Rückseite ein auch anderswoher bekanntes Cultusbild der Athena, welches mit der Rechten die Lanze hebt (aber nicht zückt) und die Linke auf den am Boden stehenden Schild hält.

Die ebenda unter n. 112 mitgetheilte Münze von Zeleia in der Troas, ist abgesehen von der Seltenheit der Münzen dieses Ortes auch deshalb von Belang, weil sie uns den Kopf auf der Vorderseite, vermuthlich denselben, welcher sich

auch auf dem Exemplar bei Dumersan Descr. des méd. du cab. Allier de Hauteroche pl. XIII, n. 20 findet, wegen des Hirsches auf der Rückseite mit Wahrscheinlichkeit auf die Artemis beziehen lässt. Die auf dem Imhoof'schen Exemplare höhere und deutlicher dargestellte einem Stephanos ähnliche Kopfbedeckung steht nicht entgegen, verleiht inzwischen dem Typus noch ein besonderes Interesse.

Taf. IV, n. 123 bringt uns eine Bronzemünze von Magnesia in Ionien aus der Regierungszeit des Maximus, welche auf ihrem Revers die durch Mionnet's Beschreibung Suppl. VI, p. 243, n. 1063 einer Münze derselben Stadt mit dem Kopfe des Macrinus nur unvollständig bekannte Darstellung zeigt: zwei Schlangen, die sich um je einen ovalen Gegenstand emporringeln und mit ihren Mäulern einen Reif, von welchem Binden herabhängen, gefasst halten. Sollten die ovalen Gegenstände cistae mit Deckeln und der Typus auf die Hekate bezüglich sein? Vgl. D. a. K. II, 71, 886.

Für Kunstgeschichte und Kunstmythologie zugleich wichtig ist die Reihe der knidischen Silbermünzen mit dem Kopfe der Aphrodite im älteren und späteren Stil, n. 127 bis 137, von denen erst wenige durch gute Abbildungen bekannt sind.

Unter n. 143 und 144 sind zwei Exemplare der Silbermünzen von Kos mit dem bekannten Typus des tanzenden nackten Tympanonschlägers neben einem Dreifusse gegeben, welche sich dadurch unterscheiden, dass das eine Mal der Name der Insel aufgeschrieben ist und dass in diesem Falle eine Keule zwischen Dreifuss und Tänzer zu sehen ist, in jenem aber, wie auch sonst gewöhnlich, nicht. Gewöhnlich bezieht man die

Figur bekanntlich auf Apollon; vgl. namentlich Broendsted Voy. et rech. en Grèce II, p. 311. Die Keule würde, wenn sie zu der Figur gehörte, nicht durchaus entgegenstehen, zumal da Apollon auf einer Kaisermünze von Milet mit der Keule vorkommt, s. Kenner a. a. O. Taf. IV, fig. 7 und S. 125. Doch handelt es sich auf unserer Münze wohl um dieselbe Keule, welche sonst auf dem Revers der koischen neben der Krabbe erscheint. Ist Apollon gemeint, so ist jedenfalls ein Attribut des Cultus des Dionysos oder der Kybele auf ihn übertragen. In dieser Beziehung ist beachtenswerth, dass kürzlich ein bacchischer Typus auf einer Kaisermünze von Kos bekannt geworden ist, vgl. Kenner Taf. IV, 19. Aber an sich hat es doch wohl die grösste Wahrscheinlichkeit, dass der Tänzer dem bacchischen Kreise angehöre, welcher Annahme der Dreifuss durchaus nicht im Wege steht.

Als n. 154 ist den so seltenen Münzen von Telmissos eine kleine kupferne hinzugefügt, welche auf dem Avers den Kopf des Hermes und auf dem Revers ein Insect enthält. Sehr wohl möglich, dass das letztere, etwa eine Biene, als Attribut des ersteren zu betrachten ist. Auch auf der Münze von Imbros in D. a. K. II, 28, 306 und auf der von Termessos bei Mionnet Suppl. VII, p. 139, n. 234 findet man ein solches Insect neben Hermes.

Taf. V. bringt unter n. 163 eine unter Kaiser Philippus geprägte Bronzemünze von Sillyum, deren Revers eine interessante Darstellung der unterwärts bekleideten Aphrodite zeigt.

Dieselbe Tafel enthält unter n. 166 auf dem Revers einer Bronzemünze von Sagalassos aus der Regierungszeit des Claudius Gothicus und

unter 184 auf dem Rev. einer solchen von Philadelphia Lydiae aus der Zeit des Caracalla den dort sitzenden, hier stehenden Hermes mit einem Knäbchen auf der Hand des ausgestreckten linken Arms. Noch interessanter ist es, dass in der Imhoof'schen Sammlung sich dem Vernehmen nach eine noch nicht herausgegebene Münze befindet, welche das bei Pausan. III, 11, 8 erwähnte Standbild des Hermes mit dem Knaben Dionysos zeigen soll.

Von den n. 168 fg. mitgetheilten Münzen der Einwohner von Selge hat namentlich die unter n. 169, eine unter dem Kaiser Antoninus Pius geprägte Bronzemünze, durch den Typus des Reverses Interesse. Hr. Imhoof glaubt hier »deux styrax« zu erkennen. Es handelt sich aber wesentlich um dieselbe Darstellung wie die auf der von Mionnet Suppl. VII, p. 210 fg. verzeichneten Bronzemünze mit den Köpfen des Caracalla und Geta und auf der ebenfalls in der Sammlung bei der Bibliothek zu Paris befindlichen mit dem Brustbilde des Caracalla, von welcher F. Lajard Rech. sur le culte u. s. w. de Vénus en Orient et en Occident, pl. III, n. 1 eine Abbildung gegeben hat, nur dass das Imhoof'sche Exemplar, weil kleiner, den Gegenstand nicht so vollständig vor die Augen bringt. Denselben hat Lajard a. a. O. p. 136 fg., p. 168 des Genaueren zu erörtern versucht. Es unterliegt keinem Zweifel, dass er sich auf den Cultus der Astarte bezieht. Blitz und Keule, welche man zumeist nach links und rechts auf dem Postament gewahrt, finden sich auch in den Händen der stierköpfigen Astarte auf der Münze von Rhosus Syriae, welche Taf. VII, n. 223 bringt.

Dieselbe Göttin, nicht »Artemis«, ist auch auf dem Revers der unter n. 172 mitgetheilten

Kupfermünze von Termessos in der vermuthlich stierköpfigen, eine Lanze in der Linken haltenden Figur zwischen den Dioskuren zu erkennen, von welchen die etwas anders gebildete Astarte auch auf Münzen von Tripolis umgeben erscheint (Lajard a. a. O. pl. V, n. 10, pl. XIV H, n. 8), während auf anderen Münzen dieser Stadt, z. B. auf der unter Julia Domna geprägten in der Rev. num. fr. 1861, pl. V, n. 7, und auf anderen Bildwerken, z. B. auf dem Relief in Mus. Nan. 234 und bei Gerhard »Ueber Agathodaemon und Bona Dea« Taf. I, n. 3, anstatt der Göttin ihr Symbol die Mondsichel zwischen den Dioskuren erscheint und anderseits die Astarte auf jener Münze von Rhosos von blossen Dioskurenmützen umgeben ist.

Auf dem Avers der Bronzemünze ΣΥΝΝΑΔΕΩΝ ΙΩΝΩΝ, welche Taf. VI, n. 194 in Abbildung bringt, sehen wir den Kopf des ΠΑΝΔΗΜΟϹ ΖΕΥϹ, dessen Beinamen und ganze Figur uns von Kaisermünzen her bekannt sind.

Die auf derselben Tafel unter n. 228 abgebildete Kupfermünze von Sidon aus der Regierungszeit des Elagabalus zeigt auf dem Revers den unbärtigen, jugendlichen mit langem dünnen Chiton und einem um die Mitte des Leibes geworfenen Himation angethanen Dionysos, durch den vor ihm am Boden kauernden Panther unverkennbar, gegenüber der Hygieia (wie Hr. Imhoof annimmt), beide, wie es scheint, einen und denselben Kranz fassend. Oder sind es zwei verschiedene Zweige, die von ihnen gehalten werden? Dionysos stützt mit der Rechten den mit der Spitze nach unten gekehrten Thyrsolonchos auf den Boden. Die andere Figur legt die Linke auf einen Dreifuss, um welchen sich die Schlange emporringelt, was sehr wohl zu

Hygieia passt (D. a. K. II, 61, 792, b). Der Thyrsolonchos entspricht hinsichtlich der bindenartigen Verzierung in der Mitte ganz dem »Caduceus« des »bacchischen Hermes« auf der unter Septimius Severus geprägten Münze von Marcianopolis in den D. a. K. II, 28, 306, C, der also auch wohl als bacchisches Attribut zu fassen ist; denn der Umstand, dass hier der lange Stab keine Spitze hat, kann keinen Unterschied machen. Ja es ist in der That sehr fraglich, ob es sich hier wirklich um einen Hermes handelt. Diese Benennung rührt von Fiorelli Osservaz. sopra tal. mon. rar. di città gr. p. 69 her, der die betreffende Münze auf Taf. II, n. 16 zuerst herausgegeben hat. Ich folgte ihr, weil die Abbildung eine petasosartige Kopfbedeckung zeigt und weil der Stab in der Linken mit Fiorelli wohl als eine Form des Caduceus gefasst werden zu können schien. Steht aber jene Kopfbedeckung sicher? Ist nicht vielmehr Dionysos zu erkennen, der auf anderen unter Septimius Severus geprägten Münzen von Marcianopolis unzweifelhaft erscheint; vgl. Mionnet Suppl. II, p. 12 fg. n. 107 und 118, zumal da auch die Kothurne an den Beinen der Figur bei dem Hermes Bedenklichkeit erregen? Eine ganz unbekleidete Figur mit Kantharos in der gesenkten Rechten und Thyrsos (»spear«), um dessen Mitte wiederum jene Binden geschlungen sind, zeigt die von Fox Gr. coins II, 7, 142 herausgegebene Kupfermünze von Appia Phrygiae. Hier ist schwerlich an einem Dionysos zu zweifeln, dessen Thyrsos ja auch sonst, wenn auch an einer anderen Stelle, oben unter der Spitze, mehrfach mit Binden umwunden vorkommt. — Was endlich die mit dem Dionysos gruppirte Figur der Imhoof'schen Münze anbetrifft, so steht es nichts weniger als

sicher, dass Hygieia gemeint ist. Kommt doch Apollon auch sonst mehrfach so dargestellt vor, dass er sich durchaus wie ein Weib ausnimmt, vgl. z. B. D. a. K. II, 134 b u. e. Dieser mit dem Dionysos so eng verbundene Gott würde hier auch in anderer Beziehung besonders gut passen.

Unter n. 232 enthält Taf. VII eine kleine phönikische Silbermünze mit der Darstellung einer bärtigen mit einer mützenähnlichen Kopfbedeckung versehenen Figur, von welcher nur der Obertheil zu sehen ist, weil man die andere Partie des Körpers sich als im Wasser befindlich zu denken hat, auf dem Avers, und Dreizacke nebst Delphin auf dem Revers. Hr. Imhoof bezeichnet dieselbe als »Dagon«. So oder Oannes wird die tritonenartige Figur auf phönikischen Münzen, deren eine auch in unserem Choix unter n. 231 mitgetheilt ist, und auf mittelasiatischen Denkmälern allerdings gewöhnlich genannt, vgl. Millingen Syll. of anc. coins p. 81 zu pl. IV, n. 60. 61, Layard Niniveh und seine Ueberreste, übers. von Meissner, S. 424 z. Fig. 88, Nineveh und Babylon, übers. von Zenker, S. 261 fg. (343 fg.) z. Taf. VI, während ein namhafter Kenner wie L. Müller De puniske Gudebilleder, Kopenhagen 1871, p. 21 fg. den Dagon vielmehr nach Philon als *Ζεὺς ἀρότριος* gefasst wissen will. Doch um hiervon abzusehen, so ist es sehr die Frage, ob man auf n. 232 dieselbe Figur zu erkennen hat wie auf n. 231. Dort kann sehr wohl eine vollkommen menschliche Gestalt gemeint sein. Die wie ein Triton gebildete Figur mittelasiatischer Denkmäler kommt allerdings auch mit einer mützenartigen Kopfbedeckung vor. Diese ist aber durchaus nicht mit der auf der Imhoof'schen

Münze zusammenzustellen. Letztere entspricht vielmehr denjenigen, welche sich, in der Form leicht abweichend, nicht allein bei tritonenartigen Wesen, wie die auf den Lampen, welche wir in diesen Nachrichten 1870, S. 184, besprochen haben, findet, sondern auch bei Poseidon und zwar nicht nur auf Pompejanischen Wandgemälden, wie dem in D. a. K. II, 7,83 und dem in den Annali d. Inst. Vol. XXII, t. K sondern auch auf Münzen, z. B. denen von Lampsakos bei Sestini Stater. ant. pl. VI, fig. 2 u. 3, der von Samos bei Sestini Descr. d. med. ant. d. mus. Hedervar. t. IV in Add., fig. 15, ja möglicherweise auch auf der Vase des Malers Amasis in Ch. Lenormant's u. J. de Witte's El. d. mon. céramogr. I, 78, d. Arch. Ztg. 1846, T. XXIX, n. 4, und bei Panofka Poseidon Basileus und Athena Sthenias, Berlin 1857, n. 3. Auf den Poseidon führt aber der Typus des Reverses, welcher doch mit dem des Averses im engsten Zusammenhange zu stehen scheint, zunächst. Ich entsinne mich in der That nicht, die Tritonengestalt asiatischer Denkmäler mit dem Attribute des Dreizacks versehen gefunden zu haben. Dass Poseidon mehrfach mit halbem Leibe aus den Wogen hervorragend dargestellt gefunden wird, ist auch bekannt. Wir glauben demnach auf n. 232 den phönikischen Poseidon erkennen zu müssen, jenen θαλάσσιος Ζεύς, welcher nach Hesychios u. d. W. ἐν Σιδῶνι τιμᾶται, dessen einheimischer Name uns aber unbekannt ist (L. Müller a. a. O. S. 13).

Auf dem Taf. VIII, n. 263 abgebildeten Revers einer Silbermünze von Akragas findet sich, als besonders merkwürdig von Herrn L. signalisirt, eine face humaine sur la carapace d'un crabe. Wir treffen dieses Gesicht noch deutli-

cher ausgeführt auf zwei Silbermünzen derselben Stadt, deren eine schon in Cartier's und De la Saussaye's Rev. numism. 1843, pl. XVI, n. 1 herausgegeben und in meinen D. a. K. II, 72, 919 wiederholt und besprochen ist, während die andere, jener durchaus ähnliche, jüngst durch Ant. Salinas Le mon. delle ant. città di Sicilia t. VIII, n. 1 abbildlich mitgetheilt wurde (wo sich unter n. 14 auch eine gute Abbildung eines Exemplars der im Imhoof'schen Choix pl. IX, n. 264, gegebenen schönen Silbermünze von Akragas findet). Der Typus (welchen minder ausgeführt wie auf der Münze n. 263 das Werk von Salinas ein paar Male auf Taf. IV bringt) scheint nicht bloss lunarische, sondern auch, und zwar hauptsächlich, prophylaktische Beziehung zu haben; vgl. auch Stephani im Compte rendu pour 1865, p. 84.

Um schliesslich noch eine Münze zu erwähnen, deren Revers auch mit einem in den Bereich der Kunstmythologie gehörenden Typus versehen ist, deren hauptsächlichstes Interesse aber auf einem anderen Gebiete liegt, so trifft man auf der unter Antoninus Pius geprägten Bronzemünze Taf. III, n. 104 um die in den Figuren des Asklepios und der Hygieia (?) bestehende Reversdarstellung herumlaufend die Inschrift *ΕΠΙ ...... ΝΥΜΦΙΔΙΑϹ ΒΕΡΟΝΙΚΗϹ*, wonach Hr Imhoof die »Nymphidia Beronice« als »magistrat« bezeichnet glaubt. Sicherlich handelt es sich um eine Priesterin, wie auf der Münze von Attuda in Phrygien, welche Mionnet IV, p. 243, n. 293 nach Sestini verzeichnet: *ΔΙΑ. ΚΛ. ΦΛΑΒΙΑϹ. ΑΡΡΙ. ΙΕΡΕΙΑϹ.* So steht auf einer Bronzemünze der Pergamener aus der Regierungszeit des Commodus statt des sonst gewöhnlichen *ΕΠΙ ΣΤΡ.* u. s. w.: *ΕΠΙ. ΑΥΡ. ΚΕΛ. ΙΕΡΕΩϹ. ΔΙΑ. ΒΙΟΥ. ΤΩΝ.*

ΘΕΒ. (Mionnet Suppl. V, p. 446, n. 1046). Die Lücke zwischen *ΕΠΙ* und dem Eigennamen dürfte demnach das Wort *ΙΕΡΕΙΑC* enthalten haben, aber anscheinend nicht vollständig ausgeschrieben.

Friedrich Wieseler.

Register

über die

Nachrichten

von der

königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1871.

Göttingen,
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.
W. Fr. Kästner.

